

# АНТЕННЫ, ВОЛНОВОДНАЯ И КВАЗИОПТИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

УДК 520.274

Л. Е. КОПИЛОВИЧ

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,  
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина  
E-mail: kopil@ire.kharkov.ua

## БЕЗЫЗЫТОЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ АНТЕНН НА ДВУМЕРНОЙ АПЕРТУРЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРА, ДАЮЩИЕ ПОЛНОЕ ПОКРЫТИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ПЛОСКОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

*Предлагается регулярный метод построения безызыточной многоэлементной конфигурации антенн на двумерной решетке. Этот метод основан на использовании последовательностей специального типа – планарных разностных множеств. С их помощью строится математическая модель радиоинтерферометра, обеспечивающего полное покрытие центральной области в плоскости пространственных частот. Приведены удовлетворяющие этому условию безызыточные конфигурации с числом элементов вплоть до 38.*

*Ключевые слова:* интерферометры, безызыточные конфигурации, планарное разностное множество,  $(u, v)$ -плоскость

### 1. Введение

В радиоастрономии для получения высокого разрешения используются радиоинтерферометры, элементы которых образуют безызыточную конфигурацию (БК) [1]. При заданном числе элементов, интерферометр такого типа позволяет измерять максимальное число пространственных частот, а также использовать методы, исключающие фазовые флуктуации, вызванные неоднородностью среды [2]. Желательно при этом разместить элементы БК таким образом, чтобы обеспечить компактное (по возможности, полное) покрытие центральной области наибольшего размера в плоскости пространственных частот  $((u, v)$ -плоскости) [3].

При разработке математической модели многоэлементного интерферометра такого типа с двумерной апертурой следует учитывать то обстоятельство, что с возрастанием числа элементов (сопровождающимся необходимостью увеличения размера апертуры) резко возрастает объем вычислений. Для преодоления этого затруднения в [4] был предложен итеративный метод поиска оптимальной БК элементов.

В то же время для решения этой проблемы вполне подходит метод, основанный на использовании специальных комбинаторных конструкций – планарных разностных множеств [5]. С помощью этих множеств в [6] решалась задача поиска БК с большим числом элементов на прямоугольных решетках. Здесь мы используем такие множества для нахождения БК на квадратных и прямоугольных решетках (называемых также квадратами и прямоугольниками Голомба [7]), обеспечивающих полное покрытие центральных областей в  $(u, v)$ -плоскости.

### 2. Планарные разностные множества

Планарное разностное множество (ПРМ) с параметрами  $(V, k)$  представляет собой целочисленную  $k$ -элементную последовательность

$$0 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k, \quad (1)$$

размещенную на линейной решетке длиной, не большей, чем  $V$ , и характеризующейся тем свойством, что каждое целое число  $\mu$ ,  $0 < \mu < V$ , может быть единственным образом представлено в виде

$$\mu \equiv d_i - d_j \pmod{V},$$

т. е.  $\mu = d_i - d_j$ , или  $\mu = V - (d_i - d_j)$ ,  $i > j$ . Поскольку любая разность между элементами (1) встречается не более чем один раз, эта последовательность является безызыточной.

В качестве примера рассмотрим последовательность

$$\{d_j\} = \{0, 1, 6, 8, 18\}. \quad (2)$$

Это ПРМ с параметрами  $k = 5$ ,  $V = 21$ . Нетрудно видеть, что 10 чисел, меньших числа 21, могут быть представлены в виде разностей между элементами последовательности (2), а еще 10 – как 21 минус одна из таких разностей, и такое представление является в каждом случае единственным.

ПРМ существуют при всех  $k = q + 1$ , где  $q$  – простое число или степень простого числа [5]; таким образом, они существуют при

$$k = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots \quad (3)$$

Важным свойством ПРМ, как и любого циклического разностного множества (РМ), является то, что при циклическом сдвиге (по модулю  $V$ ) всех его элементов или при их умножении на число, взаимно-простое с  $V$  (и взятии по модулю  $V$ ) мы снова получим ПРМ с теми же параметрами [5]. Таким образом, имея одно ПРМ, мы можем получить целый ансамбль таких множеств (называемых эквивалентными) и выбрать наилучшее из них, согласно заданному критерию, при решении конкретной оптимизационной задачи.

ПРМ с  $k < 100$  приведены в таблице циклических  $(V, k, \Lambda)$ -РМ (частным случаем которых при  $\Lambda = 1$  они являются) в [5]. Таблицы ПРМ для значений  $k$  вплоть до  $k = 150$  имеются также в [8].

### 3. Метод поиска оптимальной БК на квадратной решетке

Наш подход к решению задачи состоит в том, что эквивалентные ПРМ из ансамбля, представленные в виде (1), преобразуются в БК на квадратной решетке с помощью операции свертывания, представляющей собой процедуру, обратную сканированию квадратной решетки. Пример этой операции приведен на рис. 1, где линейная БК (2) свертывается на решетку размером  $5 \times 5$ ; при этом участок от 0 до 3 переходит в первую строку квад-

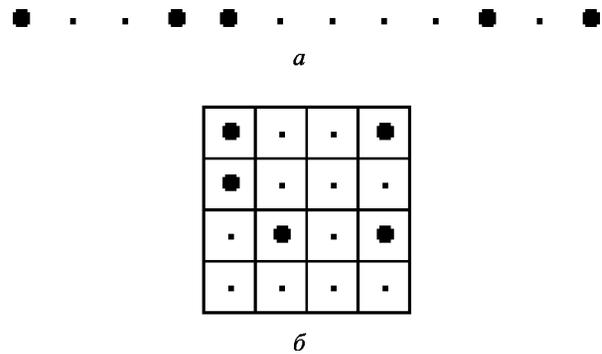


Рис. 1. Пример свертывания линейной БК на квадрат: а – БК на линии; б – БК, полученная на квадрате

рата, участок от 4 до 7 – во вторую строку и т. д. Здесь важно то, что разности (базы) между элементами БК на линии переходят в различные базовые расстояния на квадрате. В самом деле, если бы какая-то пара этих разностей перешла в одинаковые базы на квадрате, то при сканировании решетки эти базы перешли бы в одинаковые разности на линии, что противоречит условию.

Таким образом, мы избавляемся от необходимости проверки на безызыточность конфигураций, получаемых на квадрате, что существенно экономит время вычислений.

Итак, из одного ПРМ мы получаем ансамбль эквивалентных последовательностей и по очереди свертываем их на квадратную решетку такого размера, чтобы все элементы последовательности уместились на ней. Одна из БК на квадрате, полученная таким путем, вместе с покрытием ею  $(u, v)$ -плоскости, приведена на рис. 2 (показана лишь часть решетки, на которой разместились элементы БК).

Обозначим центральную область размера  $n \times n$  в  $(u, v)$ -плоскости через  $A(n)$  (ее определение видно из рис. 2., где выделена область  $A(5)$ ).

Общее число точек (баз) в  $A(n)$  равно  $N = 2n(n - 1)$ . Мы будем искать БК, покрывающие все  $N$  точек в этой области.

Заметим, что разброс элементов БК по всей решетке не даст удовлетворительного решения нашей задачи. Только те БК, все элементы которых сконцентрированы в некотором внутреннем участке решетки, могут рассматриваться как перспективные в этом плане, причем чем меньше этот участок, тем более плотным оказывается покрытие центральной области  $(u, v)$ -плоскости.

Приведем пример использования предлагаемого метода. Возьмем циклическое РМ с парамет-

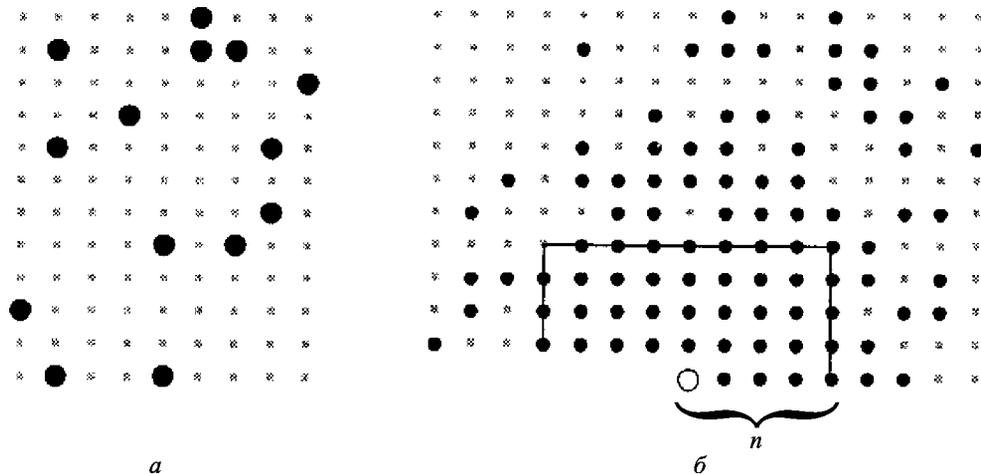


Рис. 2. Пример БК на прямоугольной решетке (а) и покрытия ею  $(u, v)$ -плоскости (б).  $A(n)$  – центральная часть  $(u, v)$ -плоскости – выделена (здесь  $n = 5$ , область покрыта не полностью)

рами  $V = 307$ ,  $k = 18$ ,  $\Lambda = 1$  из таблицы в [5] (поскольку  $\Lambda = 1$ , это – ПРМ):

$$\{0, 1, 3, 30, 37, 50, 55, 76, 98, 117, 129, 133, 157, 189, 199, 222, 293, 299\}. \quad (4)$$

Ансамбль последовательностей, эквивалентных (4), получаем методом, описанным в предыдущем разделе. В нашем случае  $V$  – простое число, поэтому для получения полного ансамбля должны быть произведены сдвигки последовательности (4)

на все числа от 1 до  $V - 1$  и ее умножение на все числа от 2 до  $V - 1$ . Далее, одну за другой свертываем последовательности ансамбля на решетку размером  $l \times l$ , где  $l$  следует взять близким к  $k = 18$  (но не больше), и проверяем полученные БК на полноту покрытия области  $A(n)$  при  $n \geq 5$ . В результате находим последовательность, которая, будучи свернута на решетку размером  $16 \times 16$ , дает 18-элементную БК, размещенную на ее внутреннем участке размером  $15 \times 12$  и полностью покрывающую область  $A(5)$  (см. рис. 3).

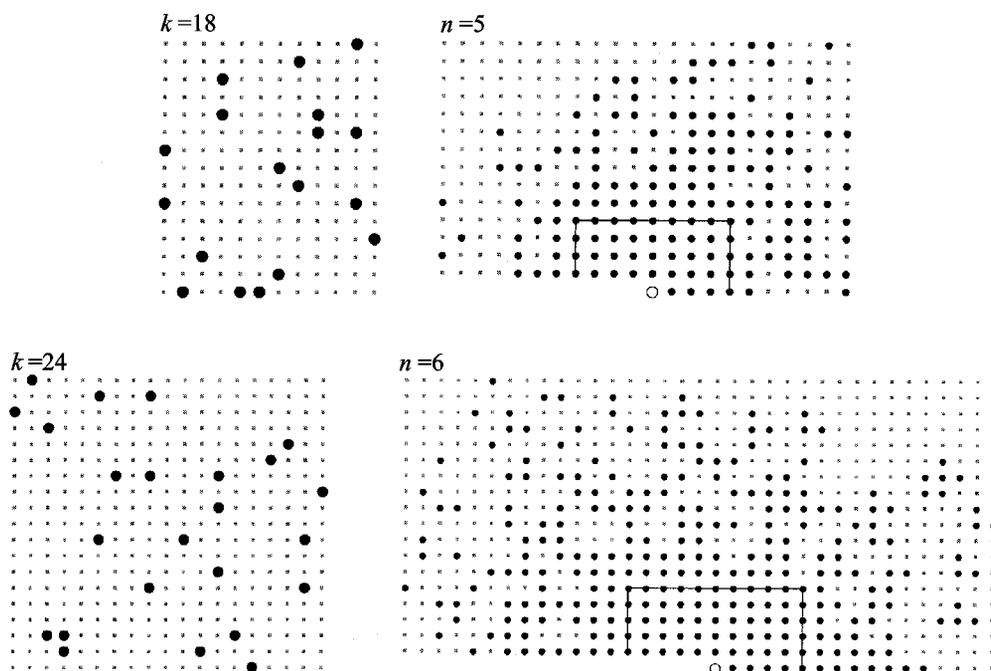


Рис. 3. Слева – найденные БК при  $k = 18$  и 24, справа – покрытия ими  $(u, v)$ -плоскости (выделены полностью покрытые области  $A(5)$  и  $A(6)$ )

#### 4. Численные результаты

С помощью описанного выше метода были обчислены ансамбли ПРМ с числом элементов  $k$ , изменяющимся от 18 до 38, из ряда (3). Проводился поиск БК, обеспечивающих полное покрытие областей  $A(n)$  при  $n \geq 5$  (для меньших значений  $n$  эта задача была решена в [9] поисковым методом). Во всех рассмотренных нами случаях наилучшие результаты были получены при свертывании  $k$ -элементных последовательностей, представляющих собой ПРМ, на квадратные решетки с длинами стороны  $l$ , близкими к  $k$  (обычно при  $l = k - 1$  или  $l = k - 2$ ). В итоге были найдены БК,

полностью покрывающие области  $A(n)$  при  $n = 5 \div 8$ . Эти БК размещены на внутренних квадратных либо прямоугольных участках решетки размеров  $l_x \times l_y$ . Характеристики этих БК перечислены в табл. 1, а сами они, вместе с их покрытием  $(u, v)$ -плоскости, приведены на рис. 3–5.

Таблица 1. Характеристики найденных БК

$k$	18	24	28	38
$l_x \times l_y$	15×12	19×19	25×23	36×36
$n$	5	6	7	8

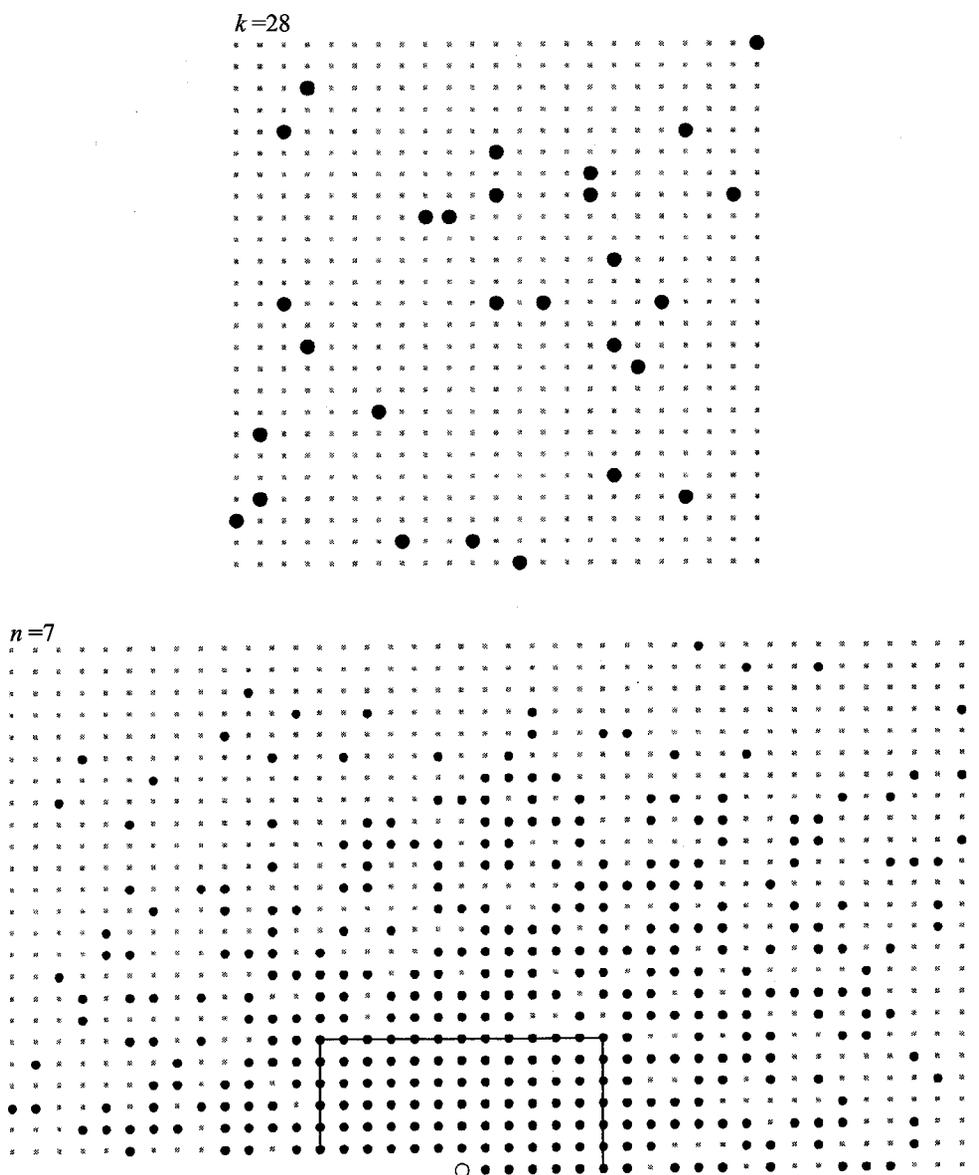


Рис. 4. Найденная 28-элементная БК (вверху) и покрытие ею  $(u, v)$ -плоскости (внизу); область  $A(7)$  покрыта полностью

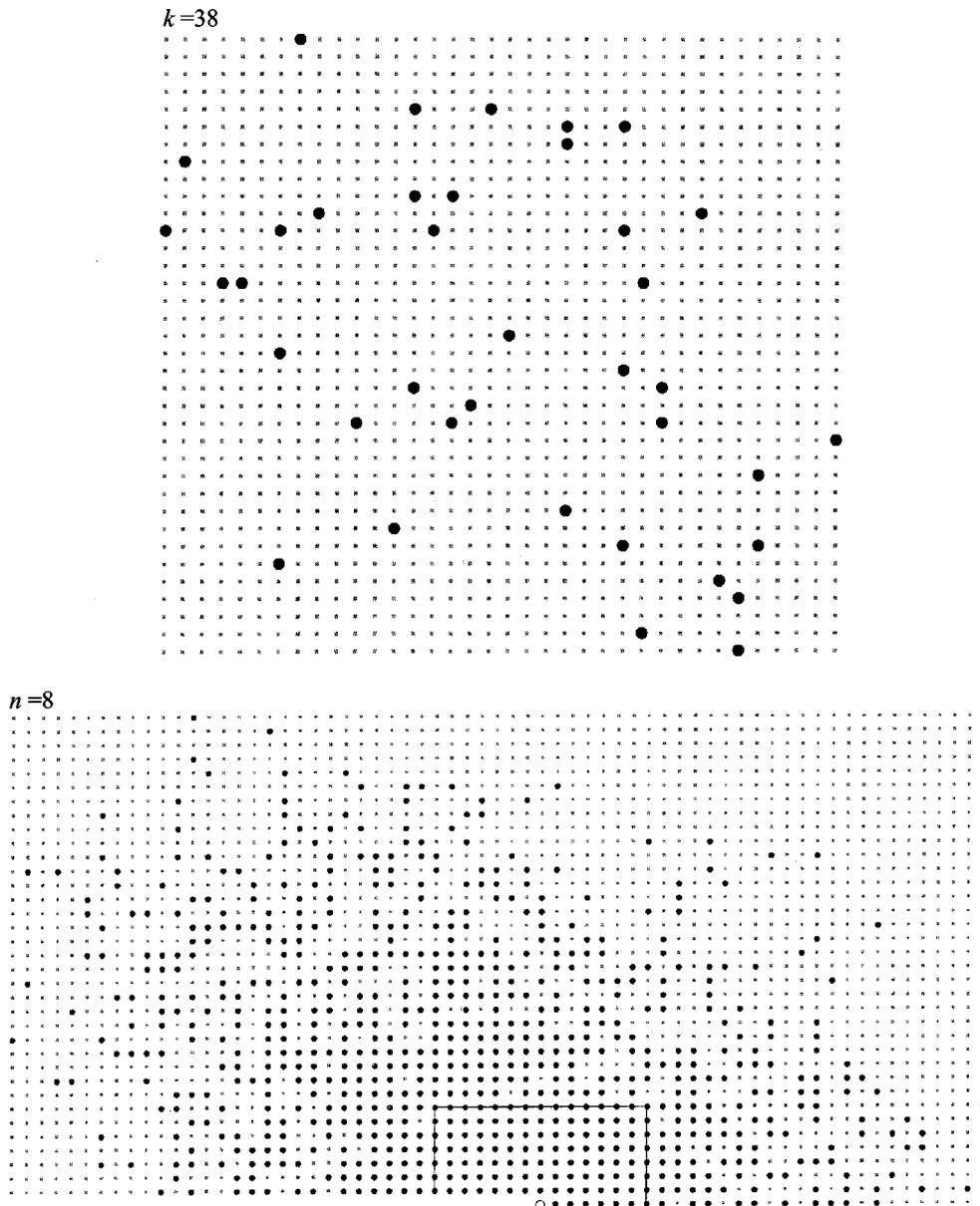


Рис. 5. Найденная 38-элементная БК (вверху) и покрытие ею  $(u, v)$ -плоскости (внизу); область  $A(8)$  покрыта полностью

Заметим, что, как видно из рис. 3–5, БК с  $k = 18, 24$  и  $28$  полностью покрывают прямоугольные области несколько большего размера, чем соответствующие области  $A(n)$ . Видно также, что почти полное покрытие (когда покрываются все точки, кроме одной) обеспечивается этими БК для больших центральных областей в  $(u, v)$ -плоскости. Так, изображенные на рис. 2 18- и 24-элементные БК почти полностью покрывают области: первая –  $A(6)$ , а вторая –  $A(7)$ . Таким образом, незначительно ослабляя требо-

вание к плотности покрытия центральной области в  $(u, v)$ -плоскости, можно достичь компактного покрытия области большего размера при том же числе элементов.

## 5. Заключение

Предложенный метод делает возможным простым путем получать большой ансамбль БК с одинаковым числом элементов и выбирать ту из них, которая обеспечит полное покрытие в  $(u, v)$ -плоскости центральной области больше-

го размера. Хотя использование этого метода не гарантирует покрытие области максимального размера, он тем не менее оказывается достаточно эффективным при большом числе элементов БК и увеличении размера апертуры интерферометра.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thompson A. R., Moran J. M., and Swenson G. W., Jr.* Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy, Second Edition. – New York: Wiley-Interscience Publication, 2000. – 692 pp.
2. *Brown T. M.* Reconstruction of turbulence-degraded image using nonredundant aperture arrays // *J. Opt. Soc. Am.* – 1978. – Vol. 68, No. 7. – P. 883–889.
3. *Keto E.* The shapes of cross-correlation interferometers // *Astrophys. J.* – 1997. – Vol. 475, No. 2. – P. 843–852.
4. *Kogan L.* Optimizing a large array configuration to minimize the sidelobes // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 2000. – Vol. 48, No. 7. – P. 1075–1078.
5. *Baumert L. D.* Cyclic Difference Sets. – New York: Springer-Verlag, 1971. – 166 pp.
6. *Kopilovich L. E.* Non-redundant apertures for optical interferometric systems: maximization of the number of elements // *J. Mod. Opt.* – 1998. – Vol. 45, No. 11. – P. 2417–2424.
7. *Robinson J. P.* Golomb rectangles // *IEEE Trans. Inf. Theory.* – 1985. – Vol. IT-31, No. 6. – P. 781–787.
8. *Kopilovich L. E. and Sodin L. G.* Multielement System Design in Astronomy and Radio Science. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publs, 2001. – 180 pp.
9. *Golay M. J. E.* Point arrays having compact, non-redundant autocorrelations // *J. Opt. Soc. Am.* – 1971. – Vol. 61, No. 2. – P. 61–62.

*Л. Ю. Копилович*

Институт радиофизики та електроніки ім. А. Я. Усикова  
НАН України,  
вул. Ак. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

#### БЕЗНАДЛИШКОВІ КОНФІГУРАЦІЇ АНТЕН НА ДВОМІРНІЙ АПЕРТУРІ ІНТЕРФЕРОМЕТРА, ЩО ДАЮТЬ ПОВНЕ ПОКРИТТЯ ЦЕНТРАЛЬНИХ ОБЛАСТЕЙ У ПЛОЩИНІ ПРОСТОРОВИХ ЧАСТОТ

Запропоновано регулярний метод побудови безнадлишкової багатоелементної конфігурації антен на двомірній решітці. Цей метод ґрунтується на використанні послідовностей спеціального типу – планарних різницевих множин. За їх допомогою будується математична модель радіоінтерферометра, що забезпечує повне покриття центральної області у площині просторових частот. Наводяться безнадлишкові конфігурації, котрі задовольняють цю умову, з кількістю елементів аж до 38.

*L. E. Kopilovich*

A. Usikov Institute of Radio Physics and Electronics,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
12, Akad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

#### NON-REDUNDANT ANTENNA CONFIGURATIONS ON A 2-D INTERFEROMETER APERTURE COMPLETELY COVERING CENTRAL DOMAINS IN THE FREQUENCY SPACE

A regular method for building a non-redundant multi-element 2-D array configuration is suggested. The method is based on using sequences of a special type – planar difference sets. Here, it is applied for constructing a mathematical model of a radio interferometer that ensures the complete coverage of the central domain in the frequency space. The non-redundant configurations satisfying this condition, with the numbers of elements up to 38, are presented.

*Статья поступила в редакцию 18.04.2012*