О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук
О. В. Славік

Українська інженерно-педагогічна академія,
м. Харків,
e-mail: academ_mail@ukr.net

Ключові слова: *сегментація зображення, ε-неперервність, dε-неперервність, d^kε-неперервність.*

УДК 519.6

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙ РОЗРИВУ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ АБО ЇХ ПОХІДНИХ ДЕЯКОГО ПОРЯДКУ

Проведено огляд існуючих методів автоматичного виявлення розривів на цифрових зображеннях. Наведено два методи виявлення розривів поверхні, що задана функцією двох змінних. Запропоновано новий метод знаходження ліній розриву функції двох змінних (що описує поверхню), або її похідної деякого порядку.

Вступ

Сейсмічна томографія – один із найрозповсюдженіших методів розвідки корисних копалин у світі. Методи сейсморозвідки базуються на збудженні та реєстрації сейсмічних хвиль різних типів з метою вивчення будови, речовинного складу і напруженого стану земних надр.

Для обробки отриманих даних – сейсмограм – використовуються сучасні методи обробки зображень.

Сегментація зображення – це процес поділу цифрового зображення на області або набори пікселів. Фактично, це поділ на різні об'єкти, які мають однакову текстуру або колір. Результатом сегментації є набір областей, що покривають разом все зображення і набір контурів. Всі пікселі з однієї області подібні за деякими характеристиками, такими, як колір, текстура або інтенсивність. Суміжні області відрізняються одна від одної цими характеристиками. Таким чином, на межах між областями зображення має розрив першого роду.

На даний момент в методах комп'ютерної обробки зображень існує кілька методів виявлення розривів на цифрових зображеннях. Деякі з них дуже чутливі до шумів на зображеннях. Це є причиною виявлення хибних ліній розриву, виявлення неповної кількості ліній розривів або невиявлення їх взагалі. Крім того, існуючі методи виявляють лише розриви самої функції і не враховують розриви першої, другої і т. д. похідних, якщо вони є.

Тому актуальною є розробка універсального методу, який би виявляв розриви не тільки в самій функції, а і у похідних деяких порядків.

Аналіз літературних джерел

Для поліпшення результатів роботи методів виявлення розривів зображення застосовують методи попередньої обробки зображень. До таких методів належить метод лінійного контрастування зображення [1].

В основі цього методу лежить поелементне перетворення зображення вигляду [1]

$$y = a\cdot x + b,$$

параметри якого a та b визначаються за допомогою такої системи [1]:

$$\begin{cases} y_{\min} = a \cdot x_{\min} + b \\ y_{\max} = a \cdot x_{\max} + b, \end{cases}$$

де $[y_{\min}, y_{\max}]$ – максимально допустимий діапазон яскравості; $[x_{\min}, x_{\max}]$ – діапазон яскравості зображення, тобто мінімальне та максимальне значення яскравості на зображенні. Таке перетворення дозволяє використати весь допустимий діапазон яскравості (наприклад, інтервал [0, 255], якщо для кожного пікселя зображення в системі виділяється 1 байт пам'яті).

Після попередньої обробки зображення обробляються методами виявлення розривів, які умовно можна об'єднати у дві групи: градієнтні та ті, що ґрунтуються на використанні оператора Лапласа. Градієнтні методи виявляють розриви пошуком максимумів та мінімумів в перших похідних зображення. Методи, що ґрунтуються на операторі Лапласа, здійснюють пошук нульових значень лапласіана зображення для знаходження розривів.

Всі методи виявлення розривів так чи інакше використовують поняття згортки ядрами відповідного оператора з зображенням. Нехай I – матриця зображення розміром $N\times M$, яке аналізується, G – ядро деякого оператора, яке подане у вигляді квадратної матриці $n\times m$ (зазвичай n = 3,5,7). Тоді згорткою ядра з зображенням будемо вважати

$$H_{i,j} = L_{i,j}\cdot G,$$

де $L_{i,j}$ – підматриця матриці I розміром $n\times m$, відповідно до розміру матриці G. Підматриця $L_{i,j}$ матриці I містить в собі елементи $\left[i-\frac{n-1}{2}, i+\frac{n-1}{2}\right]\times\left[j-\frac{n-1}{2}, j+\frac{n-1}{2}\right]$. Отримана матриця H має розмір $(N-n+1)\times(M-n+1)$. Тобто після кожного застосування такої згортки розмір вихідного зображення зменшується в залежності від розміру ядра G.

В більшості методів виявлення розривів загальна схема полягає в тому, що проводиться згортка ядер G_X та G_Y з зображенням. Потім за допомогою отриманих матриць H_X та H_Y знаходиться матриця M, кожний елемент якої обчислюється за формулою

$$M_{i,j} = \sqrt{H_X^2(i,j) + H_Y^2(i,j)}\ .$$

Далі значення $M_{i,j}$ порівнюється із заздалегідь заданим пороговим значенням T. Якщо значення $M_{i,j}$ перевищує порогове значення T, то точка (i, j) належить лінії розриву, в протилежному випадку ця точка не належить жодній лінії розриву.

Наведемо приклади згорток ядер деяких методів виявлення розриву.

Метод Робертса належить до одного із найпростіших графічних фільтрів. Оператор Робертса (або перехресний оператор Робертса) надає просту апроксимацію величини градієнта і використовує згортку зображення з ядрами вигляду [2]

$$G_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G_Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Метод Собеля є одним з найбільш широко вживаних графічних операторів. При цьому в згортці застосовуються ядра оператора Собеля [2]:

$$G_X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Метод Прюїтта подібний методу Собеля. Ядра оператора Прюїтта, що використовується для згортки зображенням, згідно з [2] мають вигляд:

$$G_X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Метод Шарра схожий на методи Собеля та Прюїтта, за винятком використання інших матриць ядер [3]

$$G_X = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G_Y = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Метод Кірша (або компасний метод Кірша) – це метод виявлення розривів, який знаходить максимальну величину розриву на восьми напрямах [4]. В основі оператора лежить просте ядро, яке обертається з кроком в 45 градусів в усіх восьми напрямах компаса: північ (N), північний захід (NW), захід (W), південний захід (SW), південь (S), південний схід (SE), схід (E), північний схід (NE).

На відміну від попередніх методів, величина розриву згідно з методом Кірша розраховується за допомогою знаходження максимальної величини по всіх напрямах [4]

$$M_{n,m} = \max_{z=1\ldots 8} \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} k_{i,j}^{(z)} I_{n+i,m+j} \,,$$

де z – номер, який позначає напрям; $I_{n,m}$ – елементи матриці зображення, $2 \le n \le N-1$, $2 \le m \le M-1$.

Ядра згортки з зображенням для кожного напрямку компаса наведені нижче [4]

$$k^{(1)} = \begin{array}{c} E \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(2)} = \begin{array}{c} NE \\ \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(3)} = \begin{array}{c} N \\ \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$k^{(4)} = \begin{array}{c} NW \\ \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(5)} = \begin{array}{c} W \\ \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(6)} = \begin{array}{c} SW \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$k^{(7)} = \begin{array}{c} S \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(8)} = \begin{array}{c} SE \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Метод Робінсона аналогічний Методу Кірша, але потребує менше обчислювальних затрат, бо оперує коефіцієнтами 0, 1 та 2. Матриці ядер згортки оператора симетричні відносно напрямку осі, яка сама містить нулі. Ядра згортки оператора Робінсона мають такий вигляд [4]:

$$k^{(1)} = \begin{array}{c} E \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(2)} = \begin{array}{c} NE \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(3)} = \begin{array}{c} N \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$k^{(4)} = \begin{array}{c} NW \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(5)} = \begin{array}{c} W \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(6)} = \begin{array}{c} SW \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$k^{(7)} = \begin{array}{c} S \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad k^{(8)} = \begin{array}{c} SE \\ \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Метод Кені є одним з найпопулярніших алгоритмів виявлення розривів. Алгоритм виявлення розривів Кені викладемо по кроках [2].

1. Згладжування. Розмиття зображення за допомогою функції Гаусса. Оператор Кені використовує фільтр, який може бути добре наближений до першої похідної гауссіани з параметром $\sigma = 1{,}4$ і використовує згортку [5]

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Пошук напрямку градієнта. На отриманому розмитому зображенні шукаються значення градієнта. Зазвичай для цього використовується метод Собеля. Окрім значень $M_{i,j}$, отриманих оператором Собеля, окремо знаходяться згортки з ядрами G_X та G_Y з формули (6) для знаходження кута напрямку градієнта за такою формулою [2]:

$$\Theta_{i,j} = \operatorname{arctan}\left(\frac{G_Y(i,j)}{G_X(i,j)}\right).$$

Кут напрямку вектора градієнта округляється і може набувати таких значень: 0, 45, 90, 135.

3. Придушення не-максимумів (Non-Maxima Suppression). На цьому кроці точки, в яких досягаються локальні максимуми, відзначаються як границі.

4. Подвійна порогова фільтрація. Отримана множина точок ділиться на три підмножини точок: розриву, неоднозначності та точки, які не належать до ліній розриву. Поділ проводиться за допомогою двох заданих значень: $T_{\min}$ – порогове значення, нижче якого вважається, що точка не належить лінії розриву; $T_{\max}$ – порогове значення, вище якого вважається, що точка належить лінії розриву. Точки, які потрапляють до діапазону $[T_{\min}, T_{\max}]$, належать області неоднозначності.

5. Гістерезис. До області точок, які належать лініям розриву, додаються точки із області неоднозначності за умови, якщо поряд з цією точкою розташована точка із області точок розриву.

В роботі [6] був запропонований метод ε-неперервності для виявлення розривів на зображеннях, який виявляє на ньому всі розриви першого роду. Даний метод ґрунтується на визначенні поняття ε-неперервності.

Якщо виконуються всі чотири нерівності в точці (x_q, y_s)

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} f(x,y) - \lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} f(x,y)\right| < \varepsilon, \qquad \left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} f(x,y) - \lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} f(x,y) - \lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)\right| < \varepsilon, \qquad \left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} f(x,y) - \lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)\right| < \varepsilon,$$

то функцію $f(x, y)$ будемо називати ε-неперервною в точці (x_q, y_s).

Поняття ε-неперервності покладено в основу алгоритму виявлення розривів за такою схемою [6]:

1) Розбиваємо область визначення на прямокутники $\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_i, y_{i+1}]$.

2) Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ такого вигляду:

$$S(x,y) = p_{i,j}(x,y) = C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} +$$

$$+ C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}, \qquad (x,y)\in\Pi_{i,j},$$

який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $p_{i,j}(x, y, C)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k,j}$, $k = 1, 2, \ldots, (m-1)(n-1)$, $l = 1, 2, 3, 4$. Потім знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайна з умови

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j}\subset D}\iint_{\Pi_{i,j}}\left[f(x,y) - p_{i,j}(x,y,C)\right]^2 dxdy \to \min_C.$$

Після підстановки знайдених коефіцієнтів в сплайн отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $p_{i,j}(x, y)$ $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

3) На кожному прямокутному елементі розбиття $\Pi_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ обчислюємо значення

$$J_{i,j}^* = \max_{\substack{x_i\le x\le x_{i+1}\\ y_j\le y\le y_{j+1}}} J_{i,j}, \qquad J_{i,j} = \left|f(x,y) - p_{i,j}(x,y)\right|.$$

4) Видаляємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн є ε-неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Прямокутні елементи, що залишилися

$\Pi_{r,q}$, $r = 1, 2, \ldots, n_1$, $q = 1, 2, \ldots, n_2$, ділимо на чотири рівні прямокутники, вводячи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента.

5) Для отриманого набору прямокутних елементів знову будуємо апроксимаційні сплайни та перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]}} \left| f(x,y) - S(x,y) < \delta \right|,$$

де δ – задана точність наближення. Якщо ця умова виконується, то отримуємо набір відрізків прямих, які і складають лінії розриву заданої розривної функції $f(x, y)$. Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до пункту 3.

Робота [7] присвячена вибору оптимальних базисних функцій та вузлів в методі скінченних елементів при математичному моделюванні розподілу тепла. В ході вивчення даної проблематики автори пропонують і досліджують метод розв'язання задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі, в якому істотно використовується поняття $d\varepsilon$-неперервності наближеного розв'язку.

Функція $u(x, y)$ є $d\varepsilon$-неперервною у прямокутнику $[x_{k-1}, x_k]\times[y_{l-1}, y_l]$, якщо вона та її частинні похідні першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ задовольняють умову $|J_{k,l}(u) - J_{k+1,l}(u)| \le \varepsilon$, відповідно заданому розбиттю області D на прямокутні елементи. В протилежному випадку функцію $u(x, y)$ вважаємо $d\varepsilon$-розривною в указаних прямокутниках.

Ці означення покладено в основу алгоритму виділення ліній в області D, у яких $d\varepsilon$-неперервність не виконується [7].

1) Розбиваємо область D на елементи

$$\Pi_{i,j} = \left\{(x,y) : x_{k-1} \le x \le x_k,\, y_{l-1} \le y \le y_l,\, k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n}\right\}.$$

2) Для $l = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$ знаходимо прямокутник (прямокутники) $[x_{p-1}, x_{p+1}]\times[y_0, y_1]$, $p = 1, 2, \ldots, m - 1$ в яких не виконується $d\varepsilon$-неперервність, тобто $|J_{k,l}(u) - J_{k+1,l}(u)| > \varepsilon$. Зафіксуємо їх.

3) Покладемо $l = l + 1$, повторюємо крок 2. Продовжуючи цю процедуру, покладаючи $l = 3, \ldots, n$, отримаємо масив прямокутників, у яких не виконується умова $d\varepsilon$-неперервності.

4) Проводимо аналогічну процедуру, поклавши $k = 1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, і знаходимо прямокутники $[x_0, x_1]\times[y_{q-1}, y_{q+1}]$, в яких $d\varepsilon$-неперервність не виконується. Об'єднання всіх цих прямокутників вважаємо множиною, якій належить лінія (лінії), в точках якої функція $u(x, y)$ не є $d\varepsilon$-неперервною при заданому розбитті області D на прямокутні елементи.

5) Збільшуємо m та n вдвічі та повторюємо кроки 2–4 знову.

Продовжуючи цей процес розбиття області D на прямокутні елементи, можемо отримати послідовність підобластей, якій належать лінії $d\varepsilon$-розривності.

Постановка задачі

Розглянемо математичну модель поверхні $f(x, y)$, яка визначена на деякій прямокутній області $D = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$.

Необхідно проаналізувати дану поверхню на наявність розривів (самої функції та деякої її похідної).

Метод $d^k\varepsilon$-неперервності для знаходження розривів функції та деякої її похідної

Нехай в області D задана функція $f(x, y)$. Розбиваємо область D на прямокутні елементи $\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_i, y_{i+1}]$ прямими $x = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b_1$ та $y = y_l$, $l = 0, 1, \ldots, n$, $a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = b_2$.

Побудуємо розривний інтерполяційний сплайн вигляду

$$S(x,y) = p_{i,j}(x,y) = C^{++}_{i,j}\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C^{-+}_{i+1,j}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} +$$

$$+ C^{+-}_{i,j+1}\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C^{--}_{i+1,j+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j},\ (x,y) \in \Pi_{i,j}.$$

Введемо у розгляд оператор $d^k f(x, y)$

$$d^k f(x,y)=\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=k}}^{k} a_{i,j}\,\frac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Якщо виконуються всі чотири нерівності в точці (x_i, y_j)

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,\quad \left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,\quad \left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} d^k f(x,y)\right|<\varepsilon,$$

то функцію $f(x, y)$ будемо називати $d^k\varepsilon$-неперервною в точці (x_i, y_j).

Будемо називати розривним апроксимаційним білінійним сплайном в кожному прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$ сплайн з коефіцієнтами $C_{i,j}^{++}$, $C_{i+1,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i+1,j+1}^{--}$, що знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$J(C)=\sum_{\Pi_{i,j}\subset D}\iint_{\Pi_{i,j}}\left[d^k f(x,y)-p_{i,j}(x,y,C)\right]^2 dxdy\to\min_C,$$

де k – значення похідної, в якій шукається розрив.

Алгоритм знаходження ліній розриву:

1) Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $p_{i,j}(x, y, C)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k,j}$, $k = 1, 2, \ldots, (m-1)(n-1)$, $l = 1, 2, 3, 4$ і знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайна. Після підстановки знайдених коефіцієнтів в сплайн отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $p_{i,j}(x, y)$ $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

2) На кожному прямокутному елементі розбиття $\Pi_{i,j}$ $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ обчислюємо значення

$$J_{i,j}^{*}=\max_{\substack{x_i\le x\le x_{i+1}\\ y_j\le y\le y_{j+1}}} J_{i,j},\qquad J_{i,j}=\left|d^k f(x,y)-p_{i,j}(x,y)\right|.$$

3) Видаляємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн є $d^k\varepsilon$-непрервним та на яких задовольняється точність наближення. Прямокутні елементи, що залишилися, ділимо на чотири рівні прямокутники, вводячи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента.

4) Для отриманого набору прямокутних елементів знову будуємо апроксимаційні сплайни. Далі перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]}}\left|d^k f(x,y)-S(x,y)<\delta\right|,$$

де δ – задана точність наближення. Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Висновки

В даній роботі розглянуто питання виявлення розривів на зображеннях. Проведено огляд методів виявлення розривів на цифрових зображеннях (від найпростіших до більш складних) та методів попередньої обробки зображень (зокрема, метод лінійного контрастування зображення). В огляді були розглянуто такі методи: оператори Робертса, Собеля, Прюітта, Кірша, Робінсона, Кені та Шарра .

Окремо розглянуто найновітніші методи виявлення розривів, які подані в дисертаційних роботах Ю. І. Першиної та І. В. Нефьодової. Ці методи застосовано на поняттях ε- та $d\varepsilon$-неперервності відповідно.

Також у даній статті було запропоновано новий метод виявлення розривів на основі поняття $d^k\varepsilon$-неперервності. На відміну від запропонованих вище методів, даний метод виявляє розриви як в самій функції, так і в деякій її похідній. Для запропонованого методу наведено детальний алгоритм знаходження ліній розриву $d^k\varepsilon$-розривними сплайнами.

Результати запропонованої роботи можна використати, зокрема, в задачах розвідки корисних копалин, при обробці даних сейсмічної томографії або при обробці зображень, отриманих із штучних супутників планети.

Література

1. *Цифровая* обработка изображений в информационных системах / И. С. Грузман, В. С. Киричук, В. П. Косых и др. – Новосибирск: Из-во Новосиб. техн. ун-та, 2000. – 168 с.
2. *Shrivakshan, G. T.* A Comparison of various Edge Detection Techniques used in Image Processing / G. T. Shrivakshan, C. Chandrasekar // Intern. J. Comp. Sci. Issues. – 2012. – Vol. 9. – P. 269–276.
3. Jähne, B. Principles of filter design / B. Jähne, H. Scharr, S. Körkel // Handbook Comp. Vision and Appl. – 1999. – P. 125–152.
4. *Muthukrishnan, R.* Edge Detection Techniques for Image Segmentation / R. Muthukrishnan, M. Radha. // Intern. J. Comp. Sci. & Inform. Techn. – 2011. – Vol. 3. – P. 259–267.
5. *Maini, R.* Study and Comparison of Various Image Edge Detection Techniques / R. Maini, H. Aggarwal // Itern. J. Image Proc. – 2009. – Vol. 3. – P. 1–12.
6. *Першина, Ю. І.* Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії : Дис. … д-ра фіз.-мат. наук / Першина Юлія Ігорівна – Харків, 2015. – 385 с.
7. *Нефьодова, І. В.* Вибір оптимальних базисних функцій та вузлів в методі скінченних елементів (прямокутні елементи) при математичному моделюванні розподілу тепла : Дис. … канд. фіз.-мат. наук / Нефьодова Інна Віталіївна. – Харків, 2014. – 167 с.

Надійшло до редакції 28.01.16