

2. Cox, B. N. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B. N. Cox, D. V. Marshall // Acta Met. Mater. – 1994. – Vol. 42, № 2. – P. 341–363.
3. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70, № 14. – P. 1741–1987.
4. Mirsalimov, V. M. Fracture of plates of variable thickness / V. M. Mirsalimov // Materials Sci. – 1996. – Vol. 71, № 32. – P. 296–305.
5. Гаджиев, В. Д. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку: Элм, 1999. – С. 50–63.
6. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
8. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев. Наук. думка, 1976. – 443 с.
9. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
10. Ladopoulos, E. G. Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering / E. G. Ladopoulos. – Berlin: Springer Verlag, 2000. – 553 p.
11. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
12. Биргер, И. А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 2. – С. 113–119.
13. Гольдштейн, Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычисл. механика сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22–39.

Поступила в редакцию 29.03.15

**В. М. Мирсалимов,**

д-р физ.-мат. наук

**П. Э. Ахундова,**

канд. физ.-мат. наук

Институт математики и  
механики НАН Азербайджана  
Азербайджан, г. Баку,

e-mail:

vagif.mirsalimov@imm.az,  
sopromat\_v@mail.ru

**Ключові слова:** *фрикційна пара, втулка, плунжер, температура, шорстка поверхня тертя, мінімізація коефіцієнтів інтенсивності напружень.*

УДК 539.375

## МИНИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ ВТУЛКИ ФРИКЦИОННОЙ ПАРЫ

*Розглядається задача механіки руйнування для втулки фрикційної пари в процесі роботи. Вважається, що втулка поблизу поверхні тертя ослаблена однією прямолінійною тріщиною. На основі моделі шорсткої поверхні тертя та мінімаксного критерію проведено теоретичний аналіз із визначення функції переміщень точок зовнішнього контуру втулки фрикційної пари, що забезпечує мінімізацію параметрів руйнування втулки фрикційної пари. Знайдена функція переміщень точок зовнішнього контуру втулки забезпечує підвищення несучої здатності втулки фрикційної пари. Як приклад розглянуто розрахунок для фрикційної пари стосовно свердловинних штангових насосів.*

### Введение

Фрикционные пары являются ответственными узлами, определяющими надежность и долговечность эксплуатации различных машин и оборудования. Ресурс работы фрикционной пары в значительной степени определяется долговечностью втулки. На современном этапе развития техники весьма востребовано оптимальное проектирование элементов фрикционной пары. Задачи теории оптимального проектирования состоят в определении таких характеристик проектируемого изделия, чтобы при действии заданных нагрузок оно в определенном смысле было наилучшим из всех изделий рассматриваемого типа.

**Постановка задачи**

Практика работы фрикционных пар показывает, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера разрушение втулки фрикционной пары происходит на пятнах фактического касания в тонких приповерхностных слоях путем образования микротрещин, с которыми втулка «живет» значительную часть ресурса работы. В связи с этим необходимо осуществлять предельный анализ деталей фрикционной пары, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до катастрофических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы.

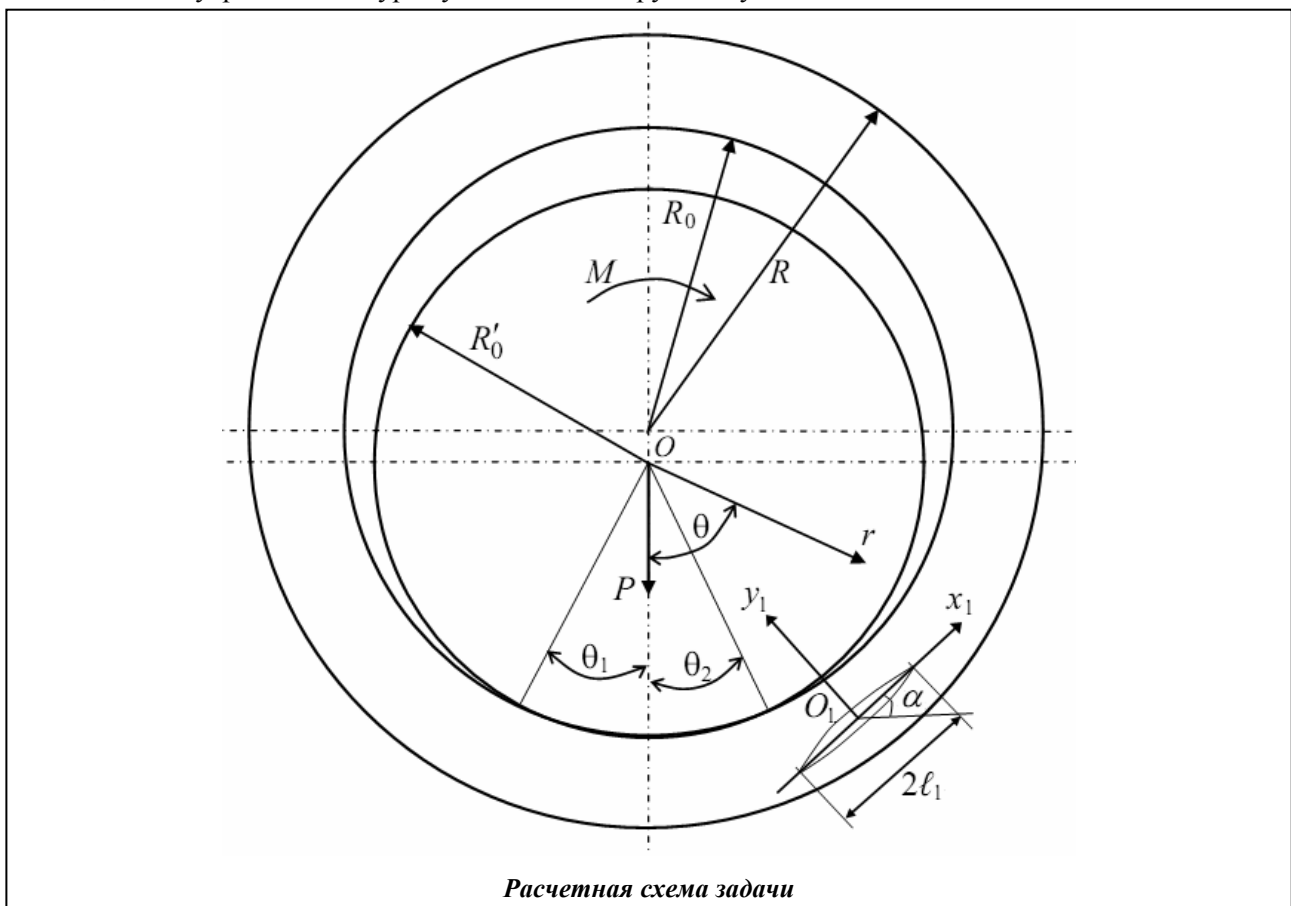
Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки фрикционной пары.

В процессе работы фрикционной пары «втулка-плунжер» происходит силовое взаимодействие между контактирующими поверхностями втулки и плунжера; возникают силы трения, приводящие к изнашиванию материалов сопряжения. Для определения контактного давления необходимо рассмотреть [1–3] износоконтактную задачу о вдавлении плунжера в поверхность втулки.

Пусть к внутренней поверхности втулки с механическими характеристиками  $G$  и  $\mu$  на некотором участке прижимается плунжер с механическими характеристиками  $G_1$  и  $\mu_1$ . Считается, что втулка на внешнем контуре имеет некоторые перемещения. Функция этих перемещений заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи из дополнительного условия.

Принято, что выполняются условия плоской деформации. Пусть в упругой втулке вблизи поверхности трения имеется прямолинейная трещина длиной  $2\ell_1$ . Режимы работы контактной пары, в которой могут возникнуть остаточные деформации, считаются недопустимыми.

В центре трещины разместим начало локальной системы координат  $x_1O_1y_1$ , ось  $x_1$  которой совпадает с линией трещины и образует угол  $\alpha$  с осью  $x$  (рисунок). Считается, что берега трещины свободны от внешних нагрузок. Отнесем втулку к полярной системе координат  $r\theta$ , выбрав начало координат в центре концентрических окружностей  $L_0, L$  с радиусами  $R_0, R$  соответственно. Будем считать, что внутренний контур втулки близок к круговому.



Как известно, реальная внутренняя поверхность втулки никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет неровности, являющиеся неизбежным следствием процесса технологической обработки. Рассмотрим некоторую произвольную реализацию шероховатой внутренней поверхности втулки.

Представим границу внутреннего контура втулки  $L'_0$  в виде

$$r = \rho(\theta), \quad \rho(\theta) = R_0 + \varepsilon H(\theta), \quad H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^0 \cos k\theta + b_k^0 \sin k\theta),$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, равный  $R_{\max}/R_0$ ;  $R_{\max}$  – наибольшая высота неровности профиля втулки.

Внешний контур плунжера также близок к круговому и может быть представлен в виде

$$\rho_1(\theta) = R'_0 + \varepsilon H_1(\theta), \quad H_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^1 \cos k\theta + b_k^1 \sin k\theta).$$

Условие, связывающее перемещения втулки и плунжера, запишется [1] так:

$$v_1 + v_2 = \delta(\theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2). \quad (1)$$

Здесь  $\delta(\theta)$  – осадка точек поверхности втулки и плунжера, определяемая формой внутренней поверхности втулки и плунжера, а также величиной прижимающей силы  $P$ ;  $(\theta_2 - \theta_1)$  – величина угла (площадка) контакта.

В зоне контакта, кроме нормального давления, действует касательное напряжение  $\tau_{r\theta}$ , связанное с контактным давлением  $p(\theta, t)$  по закону Амонтона–Кулона

$$\tau_{r\theta}(\theta, t) = fp(\theta, t),$$

где  $f$  – коэффициент трения пары «втулка-плунжер».

Касательные усилия (усилия трения)  $\tau_{r\theta}(\theta, t)$  способствуют тепловыделению в зоне контакта. Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения, а количество тепла, выделяемое в точке зоны контакта с координатой  $\theta$ , будет

$$Q(\theta, t) = Vf p(\theta, t),$$

где  $V$  – средняя за период скорость перемещения плунжера относительно втулки.

Общее количества  $Q(\theta, t)$  будет расходоваться следующим образом: поток тепла во втулку  $Q_b(\theta, t)$  и аналогичный поток  $Q_1(\theta, t)$  тепла на повышение температуры плунжера, т. е.

$$Q = Q_b + Q_1.$$

Так как частота движения плунжера достаточно велика, рассматриваем задачу определения температуры как стационарную.

Для радиального перемещения втулки будем иметь

$$v_1 = v_{1y} + v_{1ш} + v_{1и}.$$

Здесь  $v_{1y}$  – радиальные термоупругие перемещения точек контактной поверхности втулки;  $v_{1ш}$  – перемещения, вызванные смятием микровыступов поверхности втулки;  $v_{1и}$  – перемещения, вызванные износом поверхности втулки.

Аналогично, для перемещений точек поверхности плунжера будем иметь

$$v_2 = v_{2y} + v_{2ш} + v_{2и}.$$

Скорость изменения перемещений поверхности трения при абразивном износе будет [2, 3]

$$\frac{dv_{ki}}{dt} = K_{bk} p(\theta, t) \quad (k=1,2), \quad (2)$$

где  $K_{b1}$  и  $K_{b2}$  – коэффициенты изнашивания материала втулки и плунжера соответственно.

Для определения перемещений  $v_{1y}$ ,  $v_{1ш}$  необходимо решить следующую задачу термоупругости для втулки:

$$\Delta T = 0, \quad \text{при } r = \rho(\theta) \quad A_{T1} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} - A_{T2} \alpha_1 (T - T_c) = -Q^*, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& \text{при } r = R \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_2(T - T_c) = 0, \\
& \text{при } r = \rho(\theta) \quad \sigma_n^b = -p(\theta); \tau_{nt}^b = -fp(\theta) \text{ на площадке контакта,} \\
& \sigma_n^b = 0; \tau_{nt}^b = 0 \text{ вне площадки контакта,} \\
& \text{при } r = R \quad v_r^b - iv_\theta^b = g(\theta), \\
& \sigma_n^b = 0; \tau_{nt}^b = 0 \text{ на берегах трещины.} \tag{4}
\end{aligned}$$

Здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности втулки;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\alpha_1$  – коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки;  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи с наружной цилиндрической поверхности втулки с внешней средой;  $T_c$  – температура окружающей среды;  $n, t$  – нормаль и касательная к контуру трещины;  $A_{T1}$  – теплопоглощающая поверхность;  $A_{T2}$  – охлаждающая поверхность;  $Q_*$  – часть количества тепла, выделившегося при трении, приходящаяся на нагрев втулки,  $Q_* = Q_b$  на площадке контакта,  $Q_* = 0$  вне площадки контакта;  $v_r, v_\theta$  – соответственно радиальная и касательная составляющие вектора перемещений точек контура  $L$ ;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  – компоненты тензора напряжений;  $g(\theta)$  – искомая функция перемещений;  $i^2 = -1$ .

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений контактной поверхности плунжера

$$\begin{aligned}
& \Delta T_2 = 0, \\
& \text{при } r = \rho_1(\theta) \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = -Q_1(\theta) \text{ на контактной площадке,} \\
& \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} + \alpha(T_2 - T_c) = 0 \text{ вне контактной площадки,} \\
& \text{при } r = \rho_1(\theta) \quad \sigma_n = -p(\theta); \tau_n = -fp(\theta) \text{ на площадке контакта,} \\
& \sigma_n = 0; \tau_n = 0 \text{ вне площадки контакта.}
\end{aligned}$$

Здесь для интенсивности поверхностного источника тепла в зоне трения имеем  $Q_1(\theta) = \alpha_{m.n.2} fVp(\theta)$ ;  $\alpha_{m.n.2}$  – коэффициент разделения теплового потока для плунжера.

Величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , являющиеся концами участка соприкосновения плунжера с втулкой, неизвестны. Для их определения используем условие [4], выражающее, что давление  $p(\theta)$  непрерывно переходит в нуль, когда точка  $\theta$  выходит за участок соприкасания

$$p(\theta_1) = 0; \quad p(\theta_2) = 0.$$

Для нахождения функции перемещений точек внешнего контура  $L$  нужно постановку задачи дополнить условием (критерием), позволяющим определить искомую функцию  $g(\theta)$ . Согласно теории [5] квазихрупкого разрушения Ирвина–Орована, параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственной за разрушение материала втулки фрикционной пары можно считать величину коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины.

Исследуя основные параметры разрушения и влияния на них микрогеометрии поверхности трения и функции перемещений  $g(\theta)$ , свойств материалов и других факторов, можно обоснованно управлять разрушением конструкторско-технологическими методами, в частности, функцией перемещений точек контура  $L$ , а также геометрией поверхности трения.

В качестве критерия для определения функции перемещений точек внешнего контура  $L$  (функция  $g(\theta)$ ) принимаем минимизацию величины максимального коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины во втулке. Минимизация максимального значения коэффициента интенсивности напряжений будет способствовать повышению работоспособности втулки фрикционной пары.

Таким образом, требуется так определить функцию перемещений  $g(\theta)$ , чтобы созданное ею в процессе работы узла трения напряженное поле препятствовало росту трещины.

Без нарушения общности поставленной задачи, принято, что искомая функция перемещений  $g(\theta)$  может быть представлена в виде ряда Фурье. Следовательно, коэффициентами  $a_k, b_k$  разложения искомой функции перемещений точек внешнего контура  $L$  втулки надо так распорядиться, чтобы обеспечивалась минимизация максимального коэффициента интенсивности напряжений. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию  $g(\theta)$ .

### Решение задачи

Для решения поставленной задачи оптимального проектирования необходимо совместное решение износосеконтактной задачи с задачей механики разрушения.

Температурные функции, напряжения и перемещения во втулке и плунжере ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем, для упрощения, членами, содержащими  $\epsilon$  степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости.

Значения компонент тензора напряжений при  $r = \rho(\theta)$  получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $r = R_0$ .

Используя метод возмущений с учетом сказанного, запишем краевые условия (3)–(4) задачи термоупругости для втулки в виде

для нулевого приближения  $\Delta t_b^{(0)} = 0$  во втулке,

$$\text{при } r = R_0 \quad A_{T1}\lambda \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} - A_{T2}\alpha_1 t_b^{(0)} = -Q_*^{(0)}, \quad (5)$$

$$\text{при } r = R \quad \lambda \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} + \alpha_2 t_b^{(0)} = 0,$$

$$\text{при } r = R_0 \quad \sigma_r^{b(0)} = -p^{(0)}(\theta); \quad \tau_{r\theta}^{b(0)} = -fp^{(0)}(\theta) \text{ на площадке контакта,}$$

$$\sigma_r^{b(0)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{b(0)} = 0 \text{ вне площадки контакта,} \quad (6)$$

$$\text{при } r = R \quad v_r^{b(0)} - iv_\theta^{b(0)} = g^{(0)}(\theta),$$

$$\sigma_n^{b(0)} = 0; \quad \tau_{nt}^{b(0)} = 0 \text{ на берегах трещины,} \quad (7)$$

для первого приближения  $\Delta t_b^{(1)} = 0$  во втулке,

$$\text{при } r = R_0 \quad A_{T1}\lambda \frac{\partial t_b^{(1)}}{\partial r} - A_{T2}\alpha_1 t_b^{(1)} = \left[ A_{T2}\alpha_1 \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} - A_{T1}\lambda \frac{\partial^2 t_b^{(0)}}{\partial r^2} \right] H(\theta) - Q_*^{(1)}(\theta),$$

$$\text{при } r = R \quad \lambda \frac{\partial t_b^{(1)}}{\partial r} + \alpha_2 t_b^{(1)} = 0, \quad (8)$$

$$\text{при } r=R_0 \quad \sigma_r^{b(1)} = N - p^{(1)}(\theta); \quad \tau_{r\theta}^{b(1)} = T - fp^{(1)}(\theta) \text{ на площадке контакта,}$$

$$\sigma_r^{b(1)} = N; \quad \tau_{r\theta}^{b(1)} = T \text{ вне площадки контакта,} \quad (9)$$

$$\text{при } r = R \quad v_r^{b(1)} - iv_\theta^{b(1)} = g^{(1)}(\theta),$$

$$\sigma_n^{b(1)} = 0; \quad \tau_{nt}^{b(1)} = 0 \text{ на берегах трещины,} \quad (10)$$

Здесь  $N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta}$  при  $r = R_0$ ,  $T = (\sigma_\theta^{b(0)} - \sigma_r^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{b(0)}}{\partial r}$ .

Аналогично находим краевые условия задачи термоупругости для плунжера в каждом приближении.

Решение краевой задачи теории теплопроводности ищется методом разделения переменных. Распределение избыточных температур для втулки  $t_b = T - T_c$  находим в следующем виде:

$$t_b^{(0)} = C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{10}^{(k)} r^k + C_{20}^{(k)} r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{10}^{(k)} r^k + A_{20}^{(k)} r^{-k}) \sin k\theta,$$

$$t_b^{(1)} = C_{11} + C_{21} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{11}^{(k)} r^k + C_{21}^{(k)} r^{-k}) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{11}^{(k)} r^k + A_{21}^{(k)} r^{-k}) \sin k\theta.$$

Постоянные  $C_{10}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{10}^{(k)}$ ,  $C_{20}^{(k)}$ ,  $A_{10}^{(k)}$ ,  $A_{20}^{(k)}$  определяются из граничных условий (5) задачи в нулевом приближении. Соответственно, коэффициенты  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{11}^{(k)}$ ,  $C_{21}^{(k)}$ ,  $A_{11}^{(k)}$ ,  $A_{21}^{(k)}$  находятся из краевых условий (8) задачи в первом приближении.

Для решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [6]. В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений в нулевом и первом приближениях определяется решением следующим дифференциальных уравнений:

$$\Delta F^{(0)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha_* t_b^{(0)}; \quad (11)$$

$$\Delta F^{(1)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha_* t_b^{(1)}. \quad (12)$$

Ищем решение уравнения (11) в виде

$$F^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(0)} \cos n\theta + f_n^{*(0)} \sin n\theta].$$

Для функций  $f_n^{(0)}(r)$ ,  $f_n^{*(0)}(r)$  получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, решение которых находим методом вариации постоянных.

После определения термоупругого потенциала  $F^{(0)}(r, \theta)$  для втулки в нулевом приближении с помощью известных [6] формул вычисляем напряжения  $\bar{\sigma}_r^{b(0)}$ ,  $\bar{\sigma}_\theta^{b(0)}$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}$  и перемещения  $\bar{v}_r^{b(0)}$ ,  $\bar{v}_\theta^{b(0)}$  во втулке.

Найденные напряжения и перемещения для втулки не будут удовлетворять краевым условиям (6)–(7). Таким образом, необходимо найти второе напряженно-деформированное состояние  $\bar{\sigma}_r^{b(0)}$ ,  $\bar{\sigma}_\theta^{b(0)}$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}$ ,  $\bar{v}_r^{b(0)}$ ,  $\bar{v}_\theta^{b(0)}$  для втулки, такое, чтобы выполнялись краевые условия (6)–(7). Для определения второго напряженно-деформированного состояния во втулке имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } r = R_0 \quad \bar{\sigma}_r^{b(0)} = -p^{(0)}(\theta) - \bar{\sigma}_r^{b(0)}, \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} = -fp_\theta^{(0)} - \bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} \quad \text{на площадке контакта,} \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_r^{b(0)} = -\bar{\sigma}_r^{b(0)}, \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)} \quad \text{вне площадки контакта,}$$

$$\text{при } r = R \quad \bar{v}_r^{b(0)} - i\bar{v}_\theta^{b(0)} + (\bar{v}_r^{b(0)} - i\bar{v}_\theta^{b(0)}) = g^{(0)}(\theta),$$

$$\text{на берегах трещины } \bar{\sigma}_n^{b(0)} = -\bar{\sigma}_n^{b(0)}, \quad \bar{\tau}_{nt}^{b(0)} = -\bar{\tau}_{nt}^{b(0)}. \quad (14)$$

Краевые условия задачи (13)–(14) с помощью формул Колосова–Мусхелишвили [4] можно записать в виде граничной задачи для отыскания двух комплексных потенциалов  $\Phi_b^{(0)}(z)$ ,  $\Psi_b^{(0)}(z)$  для втулки

$$\Phi_b^{(0)}(\tau_0) + \overline{\Phi_b^{(0)}(\tau_0)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_0 \Phi_b^{(0)}(\tau_0) + \Psi_b^{(0)}(\tau_0)] = X^{(0)}(\theta) - (\bar{\sigma}_r^{b(0)} - i\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}), \quad (15)$$

$$k_b \overline{\Phi_b^{(0)}(\tau)} - \Phi_b^{(0)}(\tau) + [\bar{\tau} \Phi_b^{(0)}(\tau) + \Psi_b^{(0)}(\tau)] e^{2i\theta} = -2G(\bar{v}_r^{b(0)} - i\bar{v}_\theta^{b(0)}) + 2Gg^{(0)}(\tau),$$

$$\Phi_b^{(0)}(t) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} + i\bar{\tau}\Phi_b^{(0)\prime}(t) + \Psi_b^{(0)}(t) = -(\bar{\sigma}_n^b + i\bar{\tau}_{nt}^b). \quad (16)$$

Здесь  $k_b = 3 - 4\mu$ ;  $\tau_0 = R_0 \exp(i\theta)$ ;  $\tau = R \exp(i\theta)$ ;  $t$  – аффикс точек берегов трещины,

$$X^{(0)}(\theta) = \begin{cases} -(1-if)p^{(0)}(\theta) & \text{на площадке контакта} \\ 0 & \text{вне контактной площадки} \end{cases}.$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_b^{(0)}(z)$ ,  $\Psi_b^{(0)}(z)$  ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_b^{(0)}(z) &= \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z) + \Phi_3^{(0)}(z), \\ \Psi_b^{(0)}(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z) + \Psi_3^{(0)}(z), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k, \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1^{(0)}(t) dt}{t - z_1},$$

$$\Psi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{\overline{g_1^{(0)}(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1^{(0)}(t) \right] dt,$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \left( -\frac{1}{z} - \frac{\bar{T}_1}{1 - z\bar{T}_1} \right) e^{i\alpha_1} g_1^{(0)}(t) + \overline{g_1^{(0)}(t)} e^{-i\alpha_1} \frac{1 - T_1 \bar{T}_1}{\bar{T}_1 (1 - z\bar{T}_1)^2} \right] dt,$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(z) &= \frac{1}{2\pi z} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ g_1^{(0)}(t) e^{i\alpha_1} \left[ \frac{1}{z\bar{T}_1} - \frac{2}{z^2} - \frac{\bar{T}_1}{z(1 - z\bar{T}_1)} + \frac{\bar{T}_1}{(1 - z\bar{T}_1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \overline{g_1^{(0)}(t)} e^{-i\alpha_1} \left[ \frac{1 - T_1 \bar{T}_1}{z\bar{T}_1 (1 - z\bar{T}_1)^2} - \frac{1}{1 - z\bar{T}_1} - 2 \frac{1 - T_1 \bar{T}_1}{(1 - z\bar{T}_1)^3} \right] \right\} dt. \end{aligned}$$

Здесь  $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$ ;  $z_1 = e^{-i\alpha_1}(z - z_1^0)$ ;  $g_1(x_1)$  – искомая функция, характеризующая разрыв смещений при переходе через линию трещины

$$g_1(x) = \frac{2G}{i(1+k_b)} \frac{\partial}{\partial x} [u_1^+(x, 0) - u_1^-(x, 0) + i(v_1^+(x, 0) - v_1^-(x, 0))].$$

Используя (17), для отыскания комплексных потенциалов  $\Phi_1^{(0)}(z)$ ,  $\Psi_1^{(0)}(z)$  граничные условия (15) представим в следующем виде:

$$\Phi_1^{(0)}(\tau_0) + \overline{\Phi_1^{(0)}(\tau_0)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_0 \Phi_1^{(0)\prime}(\tau_0) + \Psi_1^{(0)}(\tau_0)] = X^{(0)}(\theta) - (\bar{\sigma}_r^{b(0)} - i\bar{\tau}_{r\theta}^{b(0)}), \quad (18)$$

$$k_b \overline{\Phi_1^{(0)}(\tau)} - \Phi_1^{(0)}(\tau) + e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_1^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau)] = 2Gg'_*(\tau) - (\varphi_1 - i\varphi_2).$$

Здесь  $g'_*(\tau) = g^{(0)\prime}(\tau) - (\frac{-b(0)}{r} - i\bar{v}_\theta^{b(0)})$ ,  $\varphi_1 - i\varphi_2 = k_b \overline{\Phi_*^{(0)}(\tau)} - \Phi_*^{(0)}(\tau) + [\bar{\tau} \Phi_*^{(0)\prime}(\tau) + \Psi_*^{(0)}(\tau)] e^{2i\theta}$ ,

$\Phi_*^{(0)}(\tau) = \Phi_2^{(0)}(\tau) + \Phi_3^{(0)}(\tau)$ ,  $\Psi_*^{(0)}(\tau) = \Psi_2^{(0)}(\tau) + \Psi_3^{(0)}(\tau)$ .

Требую, чтобы комплексные потенциалы (17) удовлетворяли граничным условиям (18), получаем бесконечные системы уравнений относительно коэффициентов  $d_k$ ,  $c_k$ . Решение этих систем не представляет особых трудностей (см. [4] §59).

В правые части формул для определения коэффициентов  $d_k$ ,  $c_k$  входят коэффициенты разложений функции перемещенной  $g^{(0)}(\theta)$  и контактного давления  $p^{(0)}(\theta)$  в нулевом приближении, а также интегралы от искомой функции  $g_1^{(0)}(t)$ . Удовлетворяя функциями (17) краевому условию (16) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1^{(0)}(x_1)$

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} [R_{11}(t, x_1)g_1^{(0)}(t) + S_{11}(t, x_1)\overline{g_1^{(0)}(t)}] dt = \pi f^0(x_1) \quad |x_1| \leq \ell_1, \quad (19)$$

$$f^0(x_1) = -\left[ \Phi_1^{(0)}(x_1) + \overline{\Phi_1^{(0)}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_1^{(0)'}}(x_1) + \overline{\Psi_1^{(0)}(x_1)} \right] - (\overline{\sigma}_{y_1}^{b(0)} - i\overline{\tau}_{x_1 y_1}^{b(0)}).$$

Здесь переменные  $x_1, t, \ell_1, z_1^0$  – безразмерные величины, отнесенные к  $R_0$ ;  $R_{nk}, S_{nk}$  ( $n = k = 1$ ) определяются по формулам (VI.61) книги [7].

К сингулярному интегральному уравнению для внутренней трещины следует добавить дополнительное равенство, выражающее условие однозначности смещений при обходе контура трещины

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1^{(0)}(t) dt = 0. \quad (20)$$

С помощью комплексных потенциалов (17), формул Колосова–Мусхелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (2) материала втулки в нулевом приближении находится радиальное перемещение  $v_1^{(0)}$  контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости для плунжера. Используя решение задачи термоупругости для плунжера и кинетическое уравнение изнашивания материала плунжера в нулевом приближении, находится радиальное перемещение  $v_2^{(0)}$  контактной поверхности плунжера. Найденные величины  $v_1^{(0)}$  и  $v_2^{(0)}$  подставляются в основное контактное уравнение (1) в нулевом приближении. Для алгебраизации основного контактного уравнения в нулевом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$p^{(0)}(\theta, t) = p_0^0(\theta) + tp_1^0(\theta) + \dots, \quad (21)$$

$$p_0^0(\theta) = \alpha_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^0 \cos k\theta + \beta_k^0 \sin \theta),$$

$$p_1^0(\theta) = \alpha_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^1 \cos k\theta + \beta_k^1 \sin \theta),$$

.....

Подставляя соотношение (21) в основное контактное уравнение в нулевом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения  $p_0^0(\theta), p_1^0(\theta)$  и т.д.

Для построения алгебраической системы для нахождения искомых коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k$ , приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях. В результате получаем бесконечную алгебраическую систему относительно  $\alpha_k^0, \beta_k^0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $\alpha_k^1, \beta_k^1$  и т.д. Из-за неизвестных величин  $\theta_1^0$  и  $\theta_2^0$  система уравнений оказывается нелинейной.

Сингулярное интегральное уравнение (19) при условии (20) с помощью процедуры алгебраизации (см. прил. в [8]) сводится к системе  $M$  алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g_1^{(0)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ )

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 [g_1^{(0)}(t_m)R_{11}(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) + \overline{g_1^{(0)}(t)} S_{11}(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r)] = f^0(x_r), \quad (22)$$

$$\sum_{m=1}^M g_1^{(0)}(t_m) = 0.$$

где  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ );  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$  ( $r = 1, 2, \dots, M-1$ ).



Если в (22) перейти к комплексно-сопряженным значениям, получим еще  $M$  алгебраических уравнений. Полученные системы уравнений относительно  $d_k, c_k, \alpha_k, \beta_k, g_1^{(0)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) позволяют при заданной функции  $g^{(0)}(\theta)$  найти контактное давление, напряженно-деформированное состояние втулки контактной пары при наличии трещины во втулке (КИН), распределение температуры и абразивный износ деталей контактной пары.

В поставленной задаче оптимального проектирования коэффициенты  $A_k^{HO}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) разложения функции  $g^{(0)}(\theta)$  подлежат определению. Следовательно, полученная объединенная алгебраическая система не является пока замкнутой.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности концов трещины в нулевом приближении имеем

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \sqrt{\pi \ell_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi \quad \text{у правой вершины,}$$

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \sqrt{\pi \ell_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(0)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi \quad \text{у левой вершины трещины.}$$

Для построения недостающих уравнений требуем минимизации максимального значения коэффициента интенсивности напряжений

$$K_{p \max}^{(0)} \rightarrow \min$$

при ограничениях, связанных с несущей способностью, теплостойкостью контактной пары, отсутствием пластических деформаций, а также

$$K_{p \max}^{(0)} \leq K_{th},$$

где  $K_{th}$  – характеристика порогового значения вязкости разрушения материала втулки, определяемая опытным путем.

В нулевом приближении (поверхность трения гладкая) задача оптимизации сводится к определению коэффициентов (параметров управления) разложения функции перемещений  $g^{(0)}(\theta)$  в ряд Фурье. Величины  $g_1^{(0)}(t_m)$  линейно зависят от коэффициентов  $A_k^{HO}$  ряда Фурье функции перемещений  $g^{(0)}(\theta)$ . Следовательно, и величина коэффициента интенсивности напряжений (целевая функция) также линейно зависит от параметров управления (управляющих переменных). Таким образом, используя минимаксный критерий, рассматриваемая задача оптимизации в нулевом приближении сводится к задаче линейного программирования.

Численный расчет выполнялся методом последовательных приближений [8] и симплексным алгоритмом. В разложении функции перемещений  $g^{(0)}(\theta)$  ограничивались семью членами.

После нахождения нулевого приближения переходим к отысканию решения в первом приближении. На основе полученного решения с помощью функции (17) и формул

$$N = \overline{N_1} + \overline{N_2}, \quad T = \overline{T_1} + \overline{T_2},$$

$$\overline{N_1} = -H(\theta) \frac{\partial \overline{\sigma}_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\overline{\tau}_{r\theta}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta},$$

$$\overline{T_1} = (\overline{\sigma}_\theta^{b(0)} - \overline{\sigma}_r^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \overline{\tau}_{r\theta}^{b(0)}}{\partial r},$$

$$\overline{N_2} - i\overline{N_2} = -2ie^{i\theta} \left[ \overline{\tau}_0 \Phi_b^{(0)}(\tau_0) + \Psi_b^{(0)}(\tau_0) \right] \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \Phi_b^{(0)}(\tau_0) + \overline{\Phi_b^{(0)}(\tau_0)} - e^{2i\theta} \left[ \overline{\tau}_0 \Phi_b^{(0)'}(\tau_0) + \Psi_b^{(0)}(\tau_0) \right] \right\}$$

находим функции  $N$  и  $T$  при  $r = R_0$ .

Термоупругий потенциал перемещений в первом приближении определяется решением дифференциального уравнения (12). Это решение имеет вид, аналогичный нулевому приближению с очевидными изменениями. Соответствующие этому термоупругому потенциалу напряжения и перемещения  $\bar{\sigma}_r^{b(1)}$ ,  $\bar{\sigma}_\theta^{b(1)}$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}^{b(1)}$ ,  $\bar{v}_r^{b(1)}$ ,  $\bar{v}_\theta^{b(1)}$  для втулки определяются по известным формулам [6].

Найденные компоненты напряжений и перемещений не удовлетворяют граничным условиям (9)–(10) задачи в первом приближении. Следовательно, необходимо отыскать второе напряженно-деформированное состояние для втулки. Краевые условия для отыскания второго напряженно-деформированного состояния примут вид

$$\bar{\sigma}_r^{b(1)} = N - p^{(1)}(\theta) - \bar{\sigma}_r^{b(1)}; \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{b(1)} = T - fp^{(1)}(\theta) - \bar{\tau}_{r\theta}^{b(1)} \quad \text{при } r = R_0 \text{ на площадке контакта,} \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_r^{b(1)} = N - \bar{\sigma}_r^{b(1)}; \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{b(1)} = T - \bar{\tau}_{r\theta}^{b(1)} \quad \text{вне площадки контакта,}$$

$$\text{при } r = R \text{ на } \bar{v}_r^{b(1)} - i\bar{v}_\theta^{b(1)} = -(\bar{v}_r^{b(1)} - i\bar{v}_\theta^{b(1)}) + g^{(1)}(\theta),$$

$$\bar{\sigma}_{y_1}^{b(1)} = -\bar{\sigma}_{y_1}^{b(1)}; \quad \bar{\tau}_{x_1y_1}^{b(1)} = -\bar{\tau}_{x_1y_1}^{b(1)} \quad \text{на берегах трещины.} \quad (24)$$

Граничные условия (23)–(24) можно записать в виде краевой задачи для отыскания двух комплексных потенциалов  $\Phi_b^{(1)}(z)$ ,  $\Psi_b^{(1)}(z)$ . Комплексные потенциалы ищем в виде, аналогичном (17), с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения задачи для втулки такой же, как в нулевом приближении.

Как и в нулевом приближении, удовлетворяя краевым условиям на круговых границах, получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $d_k^1$ ,  $c_k^1$ . В правые части формул для  $d_k^1$ ,  $c_k^1$  входят коэффициенты разложений функции перемещений  $g^{(1)}(\theta)$  и контактного давления  $p^{(1)}(\theta)$ , а также интегралы от искомой функции  $g_1^{(1)}(t)$ . Удовлетворяя комплексными потенциалами краевому условию (24) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение типа (19) относительно  $g_1^{(1)}(t)$ . Как и в нулевом приближении, полученное комплексное интегральное уравнение относительно  $g_1^{(1)}(t)$ ,  $\overline{g_1^{(1)}(t)}$  при дополнительном условии типа (20) с помощью процедуры алгебраизации сводится к системе  $M$  алгебраических уравнений для определения неизвестных значений  $g_1^{(1)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ).

С помощью комплексных потенциалов первого приближения формул Колосова–Мусхелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (2) материала втулки в первом приближении находится радиальное перемещение  $v_1^{(1)}$  контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости в первом приближении для плунжера. Используя решение задачи термоупругости для плунжера и кинетическое уравнение изнашивания материала плунжера в первом приближении, находится радиальное перемещение  $v_2^{(1)}$  контактной поверхности плунжера. Затем найденные величины  $v_1^{(1)}$  и  $v_2^{(1)}$  подставляются в основное контактное уравнение в первом приближении. Для алгебраизации основного контактного уравнения в первом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$p^{(1)}(\theta) = p_0^1(\theta) + tp_1^1(\theta) + \dots, \quad (25)$$

$$p_0^1(\theta) = \alpha_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k,0}^1 \cos k\theta + \beta_{k,0}^1 \sin k\theta),$$

$$p_1^1(\theta) = \alpha_{0,1}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k,1}^1 \cos k\theta + \beta_{k,1}^1 \sin k\theta),$$

.....

Подставляя соотношение (25) в основное контактное уравнение в первом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения  $p_0^1(\theta)$ ,  $p_1^1(\theta)$  и т. д. Повторяя процедуру построения алгебраической системы для определения искомых коэффициентов  $\alpha_k^1$ ,  $\beta_k^1$ , получаем бесконечную алгебраическую систему относительно  $\alpha_{k,0}^1$ ,  $\beta_{k,0}^1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\alpha_{k,1}^1$ ,  $\beta_{k,1}^1$  и т. д. Из-за неизвестных величин  $\theta_1^1$  и  $\theta_2^1$  система уравнений оказывается нелинейной.

Полученные системы уравнений относительно  $d_k^{(1)}$ ,  $c_k^{(1)}$ ,  $\alpha_{k,0}^1$ ,  $\beta_{k,0}^1$ ,  $\alpha_{k,1}^1$ ,  $\beta_{k,1}^1$ ,  $g_1^{(1)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) позволяют при заданной функции  $g^{(1)}(\theta)$  и известных функциях  $H(\theta)$ ,  $H_1(\theta)$  найти контактное давление, напряженно-деформированное состояние контактной пары при наличии трещины во втулке (коэффициенты интенсивности напряжений), распределение температуры и износ деталей контактной пары.

В поставленной задаче коэффициенты  $A_k^{n(1)}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) функции перемещений  $g^{(1)}(\theta)$  подлежат определению. Таким образом, полученная объединенная алгебраическая система не является пока замкнутой.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в первом приближении имеем

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \sqrt{\pi \ell_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi \quad \text{у правой вершины,}$$

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \sqrt{\pi \ell_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(1)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi \quad \text{у левой вершины трещины.}$$

Для построения недостающих уравнений используем при отмеченных выше ограничениях минимаксный критерий

$$K_{p \max}^{(1)} \rightarrow \min .$$

Величины  $g_1^{(1)}(t_m)$  линейно зависят от коэффициентов  $A_k^{n(1)}$  ряда Фурье функции перемещений точек  $g^{(1)}(\theta)$  и коэффициентов  $a_k^0$ ,  $b_k^0$ ,  $a_k^1$ ,  $b_k^1$  рядов Фурье функций  $H(\theta)$ ,  $H_1(\theta)$ . Следовательно, и величина коэффициента интенсивности напряжений (целевая функция) также линейно зависит от параметров управления  $A_k^{n(1)}$  (управляющих переменных). Таким образом, задача оптимизации в первом приближении также может быть сведена к задаче линейного программирования.

Численный расчет выполнялся методом последовательных приближений [8] и симплексным алгоритмом. Расчеты проводились применительно к втулке глубинного скважинного штангового насоса исполнения НН2С-57-30-12 для различных скоростей движения плунжера. Результаты расчетов функции перемещений (коэффициенты даны в мм) приведены в таблице для скорости движения плунжера  $V = 0,2$  м/с.

**Значения коэффициентов Фурье оптимальной функции перемещений точек внешнего контура втулки**

$a_0^H$	$a_1^H$	$a_2^H$	$a_3^H$	$a_4^H$	$a_5^H$	$a_6^H$	$a_7^H$
0,1236	0,0821	0,0743	0,0655	0,0527	0,0490	0,0283	0,0192
	$b_1^H$	$b_2^H$	$b_3^H$	$b_4^H$	$b_5^H$	$b_6^H$	$b_7^H$
	0,0769	0,0542	0,0485	0,0399	0,0274	0,0232	0,0128

Если же трещина одним концом выходит на внутреннюю поверхность втулки, то равенство (20) заменяется дополнительным условием, выражающим конечность напряжений у края трещины.

Изменяя значения параметров  $z_1^0$  и  $\alpha_1$ , характеризующих расположение трещины, можно исследовать различные случаи нахождения трещины во втулке.

**Выводы**

Полученные основные разрешающие уравнения позволяют при заданных функции перемещений точек внешнего контура втулки и профиле поверхности трения численными расчетами, путем определения коэффициентов интенсивности напряжений, прогнозировать рост имеющейся трещины во втулке фрикционной пары; установить допустимый уровень дефектности и максимальные значения рабочих нагрузок, обеспечивающие достаточный запас надежности. Решение задачи оптимального проектирования по определению функции перемещений точек наружного контура втулки позволяет на стадии проектирования выбирать оптимальные геометрические параметры элементов фрикционной пары, обеспечивающие повышение несущей способности.

**Литература**

1. *Галин, Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
2. *Goryacheva, I. G.* Contact mechanics in Tribology / I. G. Goryacheva. – Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 344 p.
3. *Горячева, И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
4. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
7. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев: Наук. думка, 1976. – 443 с.
8. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

Поступила в редакцию 20.03.15

**И. В. Лазарев**

Публичное акционерное общество  
«Украинский научно-исследовательский,  
проектно-конструкторский  
и технологический институт  
трансформаторостроения»  
г. Запорожье,  
e-mail: oemi@vit.zp.ua

УДК 621.314.21.045.001.5

## **ПРОВЕРКА ИЗГИБНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРОВОДНИКОВ СИЛОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ ПРИ КОРОТКИХ ЗАМЫКАНИЯХ**

*Для обмоток силовых трансформаторів стрижневого типу розроблено метод перевірки міцності провідників усіх застосовуваних типів перерізу при згинанні осьовими та радіальними електромагнітними силами коротких замикань. Вивчено вплив ряду факторів на міцність провідників і показано шляхи її підвищення. Результати роботи використовуються для розрахунку електродинамічної стійкості обмоток при коротких замиканнях.*

**Ключові слова:** трансформатор, обмотка, коротке замикання, вигин, міцність провідників.

**Введение**

Действие электромагнитных сил на катушки обмоток силовых трансформаторов [1] порождает в их проводниках напряжения при изгибах в осевом и радиальном направлениях, а также напряжения растяжения или сжатия. Некоторыми предприятиями используется расчет прочности проводников по допускаемым напряжениям [2]: суперпозиция перечисленных трех напряжений не должна превышать допускаемое напряжение, за которое принимается предел текучести материала проводников или близкое к нему значение [3]. Однако, как показано в [4], уже при изготовлении обмотки в проводниках возникают напряжения, превышающие предел пропорциональности, а во многих случаях и предел текучести материала проводников. При таких условиях принцип суперпозиции напряжений не применим, и уже в исходном состоянии до приложения электромагнитных сил короткого замыкания проводники не удовлетворяют условию прочности по допускаемым напряжениям.