Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований, проект № Ф54.1/025.

Литература

1. *Слесаренко А. П.* Структурно-разностный подход к математическому моделированию высокоскоростных тепловых процессов с нестационарным теплообменом на поверхности конструктивных элементов / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Пробл. машиностроения. – 2011. – Т. 14, № 3. – С. 66–75.
2. *Кобринович Ю. О.* Построение структурно-разностных моделей высокоскоростных тепловых процессов с осциллирующим теплообменом / Ю. О. Кобринович // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. – № 68 (974). – С. 205–209.
3. *Слесаренко А. П.* Структурно-разностные модели, точно учитывающие осциллирующий во времени нестационарный теплообмен на поверхности конструктивных элементов / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Доп. НАН України. – 2012. – № 1. – С. 82–88.
4. *Слесаренко А. П.* Структурно-разностные модели тепловых процессов в областях сложной формы с высокоинтенсивным нестационарным теплообменом на границе / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Математичне моделювання та математична фізика: Тез. доп. конф., присвяченої 210-річниці від дня народження М. Остроградського, м. Кременчук, 21–24 вер. 2011 р. – Кременчук, 2011. – С. 51–52.
5. *Слесаренко А. П.* Визуальные исследования результатов моделирования высокоскоростных тепловых процессов на согласованных дисплеях / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – № 16 (989) – С. 193–201.
6. *Слесаренко А. П.* S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм / А. П. Слесаренко // Восточ.- Европ. журн. передовых технологий. – 2012. – № 1/4 (55). – С. 4–10.
7. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М: Наука, 1977. – 455 с.

Поступила в редакцию
03.09.13

УДК 519.6

О. О. Литвин[*], канд. фіз.-мат. наук
Н. І. Штепа[*], канд. фіз.-мат. наук
С. І. Кулик[**], канд. фіз.-мат. наук
О. С. Чорна[*]

[*] Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: loo71@bk.ru)
[**] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
(м. Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН МІЖ СИСТЕМОЮ НЕРЕГУЛЯРНО РОЗМІЩЕНИХ ПОХИЛИХ СВЕРДЛОВИН МЕТОДАМИ ГЛОБАЛЬНОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Запропонований метод моделювання тривимірного розподілу корисних копалин методами глобальної інтерлінації на системі похилих свердловин, розміщених як в одній площині, так і довільним чином. Метод дозволяє відновлювати 3D розподіл корисних копалин між похилими свердловинами за допомогою інформації про розподіл в кернах свердловин.

Предложен метод моделирования трехмерного распределения полезных ископаемых методами глобальной интерлинации на системе наклонных скважин, размещенных как в одной плоскости, так и произвольным образом. Метод позволяет восстанавливать 3D распределение полезных ископаемых между скважинами при помощи информации про распределение в кернах скважин.

Вступ

У попередніх роботах авторів [1–4] досліджувались поліноміальні та кусково-поліноміальні інтерлінаційні формули, тобто формули, в яких використовувались допоміжні поліноміальні функції або кусково-лінійні, кусково-квадратичні тощо для моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами, нерегулярно розміщеними у області дослідження. Математичні моделі розподілу корисних копалин, побудовані з використанням кусково-поліноміальних формул, дозволяють у просторі між похилими свердловинами отримувати тим точніші наближення, чим меншими є максимальні віддалі між похилими свердловинами у кожній трикутній призмі на глибині z . Але з точки зору збереження ними глобальної гладкості, яку має наближувана функція, такого типу моделі, через їх локальність, є недостатньо інформативними. Отже, для отримання інформації про глобальні властивості досліджуваного розподілу (про належність функції, яка описує розподіл корисної копалини до того або іншого класу гладкості) потрібно проводити додаткові дослідження.

У багатьох областях для відновлення неперервних поверхонь використовуються експериментальні дані, нерегулярно розміщені у просторі. Однією з загальних інтерполяційних формул, узагальнення яких можна використовувати для інтерлінації функцій трьох змінних у випадку нерегулярно розподілених прямих-свердловин, є двовимірна глобальна інтерполяційна формула Доналда Шепарда.

Зауважимо, що незважаючи на те, що задачі двовимірної інтерполяції досліджуються вже давно, приклади інтерполяційних функцій, які придатні для нерегулярно розміщених даних, поодинокі. У випадку, коли дані точки вже формують регулярну прямокутну сітку (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N$, найбільш важливими інтерполяційними формулами для прямокутної сітки є [5]

– представлення відповідної поверхні у вигляді гіперболічного параболоїда для кожних чотирьох заданих точок за допомогою білінійної інтерполяції за змінними x, y у вказаних точках

$$z = S_{1,1}(x,y) = z_{i,j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} + z_{i+1,j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} +$$
$$+ z_{i,j+1}\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + z_{i+1,j+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},$$
$$(x,y)\in\Pi_{i,j} = \{(x,y): x_i \le x \le x_{i+1};\, y_j \le y \le y_{j+1}\};$$

– представлення відповідної поверхні у вигляді полінома в околі n^2 ($n = 2, 3, 4, \ldots$) точок з використанням ньютонівських розділених різниць;

– представлення відповідної поверхні за допомогою бікубічних сплайн-інтерполяційних формул $U = S_{3,3}(x,y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} C_{i,j}B_i(x)B_j(y)$, де невідомі $C_{i,j}$ знаходяться з умов $S_{3,3}(x_p, y_q) = z_{p,q}$, $1 \le p \le M;\ 1 \le q \le N$, $B_i(x)$ – базисні кубічні сплайни [6]

$$B(x, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}) =$$

$$
=\begin{cases}
0, \quad x \le X_0, \\
\dfrac{y_1(x-X_0)^3}{6(X_1-X_0)}, \quad X_0 < x \le X_1, \\
\dfrac{y_1}{6}(X_1-X_0)^2+\dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)(x-X_1)+ \\
+\dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(\dfrac{(x-X_2)^3-(X_1-X_2)^2}{3}-(X_1-X_2)^2(x-X_1)\right)+ \\
+\dfrac{(x-X_1)^3}{X_2-X_1}\dfrac{y_2}{6}, \quad X_1 < x \le X_2, \\
\dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)\left(\dfrac{X_1-X_0}{3}+(X_2-X_1)\right)+\dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(-\dfrac{(X_1-X_2)^3}{3}+(X_1-X_2)^3\right)+ \\
+\dfrac{y_2}{2}(X_2-X_1)(x-X_2)+\dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)}\left(\dfrac{(x-X_3)^3-(X_2-X_3)^3}{3}-(X_2-X_3)^2(x-X_2)\right)+ \\
+\dfrac{(x-X_2)^3}{X_3-X_2}\dfrac{y_3}{6}, \quad X_2 < x \le X_3, \\
\dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)\left(\dfrac{X_1-X_0}{3}+(X_2-X_1)\right)+\dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(-\dfrac{(X_1-X_2)^3}{3}+(X_1-X_2)^3\right)+ \\
+\dfrac{y_2}{2}(X_2-X_1)(X_3-X_2)+\dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)}\left(-\dfrac{(X_2-X_3)^3}{3}-(X_2-X_3)^3(X_3-X_2)\right)+ \\
+\dfrac{(X_3-X_2)^3}{X_3-X_2}\dfrac{y_3}{6}+\dfrac{y_1}{2}(X_2-X_0)(x-X_3)+\dfrac{y_2}{2}(X_3-X_1)(x-X_3)+\dfrac{y_3}{2}(X_3-X_2)(x-X_3)+ \\
+\dfrac{y_3}{2(X_3-X_4)}\left(\dfrac{(x-X_4)^3-(X_3-X_4)^3}{3}+(X_4-X_3)^2(x-X_3)\right), \quad X_3 < x < X_4, \\
0, \quad x \ge X_4
\end{cases}
$$

де $y_1=\dfrac{(X_3-X_1)(X_4-X_1)}{(X_2-X_0)(X_0+X_1-X_3-X_4)}y_2$, $y_3=\dfrac{(X_3-X_0)(X_3-X_1)}{(X_4-X_2)(X_0+X_1-X_3-X_4)}y_2$.

У випадку довільних нерегулярно розміщених вузлів ці формули недоцільно для математичних моделей розподілу використовувати на практиці. Тому нижче зупинимось на узагальнених глобальних формулах.

1. Узагальнена глобальна формула Шепарда

Узагальнену глобальну формулу Шепарда для системи ліній $(X_k(z), Y_l(x), z)$, $-H \le z \le 0$, $k = 1, 2, \ldots, M$, $l = 1, 2, \ldots, N$, можна подати так:

$$
S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)=\begin{cases}
\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M}\sum_{\ell=0}^{N} f(X_k(z),Y_l(z),z)\left(\sqrt{(x-X_k(z))^2+(y-Y_l(z))^2}\right)^{\lambda}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\left(\sqrt{(x-X_i(z))^2+(y-Y_j(z))^2}\right)^{-\lambda}}, \\
\qquad \text{якщо } (x-X_k(z))^2+(y-Y_l(z))^2 \ne 0 \ \forall k \in \{1,\ldots,M\},\ l \in \{1,\ldots,N\} \\
f(X_i(z),Y_j(z),z), \\
\qquad \text{якщо } (x-X_i(z))^2+(y-Y_j(z))^2 = 0, i \in \{1,\ldots,M\},\ j \in \{1,\ldots,N\}.
\end{cases}
$$

Теорема 1. Оператор $S_{M,N,\lambda}(f; x, y, z)$ має властивості

а) $f(x,y,z) \in C(R^3) \Rightarrow S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z) \in C(R^3)$, б) $S_{M,N,\lambda}(f;X_i(z),Y_j(z),z)=f(X_i(z),Y_j(z),z),\ \ i=1,2,\ldots,M,\ \ j=1,2,\ldots,N.$

Доведення. Введемо позначення $d_{k,l}(x,y,z)=\sqrt{(x-X_k(z))^2+(y-Y_l(z))^2}$. Очевидно, що

$$d_{k,l}(x,y,z)>0\quad \forall(x,y,z)\in R^3,\quad (x,y,z)\neq(X_k(z),Y_l(z),z)$$

і

$$d_{k,l}(X_k(z),Y_l(z),z)=0,\ k=1,2,\ldots,M,\ l=1,2,\ldots,N.$$

Тоді оператор $S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)$ можна записати у вигляді

$$S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{M}\sum\limits_{l=0}^{N}f(X_k(z),Y_l(z),z)\left(d_{k,l}(x,y,z)\right)^{-\lambda}}{\sum\limits_{k=0}^{M}\sum\limits_{l=0}^{N}\left(d_{k,l}(x,y,z)\right)^{-\lambda}}, \text{якщо}\, d_{k,l}(x,y,z)\neq 0,\forall k,l\\ f(X_k(z),Y_l(z),z),\ \text{якщо}\ d_{k,l}(x,y,z)=0,\ \forall k=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N},\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{M}\sum\limits_{l=0}^{N}f(X_k(z),Y_l(z),z)\ell_{k,l,\lambda}(x,y,z)}{\sum\limits_{k=0}^{M}\sum\limits_{l=0}^{N}\ell_{i,j,\lambda}(x,y,z)}, \text{якщо}\ d_{k,l}(x,y)\neq 0,\forall k=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N}\\ f(X_k(z),Y_l(z),z),\ \text{якщо}\left(x-X_k\right)^2+\left(y-Y_l\right)^2=0,\end{cases}\tag{1}$$

де

$$\ell_{k,l,\lambda}(x,y,z)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\ \prod_{j=1,j\neq l}^{N}\left(d_{i,j}(x,y,z)\right)^{\lambda}.$$

Очевидно, що

$$\ell_{k,l,\lambda}(X_k(z),Y_l(z),z)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\ \prod_{j=1,j\neq l}^{N}\left(d_{i,j}(X_k(z),Y_l(z),z)\right)^{\lambda}>0,\quad \text{якщо}\,\forall i,j\, d_{i,j}(x_k(z),y_k(z),z)>0$$

$$\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\ \prod_{j=1,j\neq l}^{N}\left(d_{i,j}(X_p(z),Y_q(z),z)\right)^{\lambda}=0\quad \forall(X_p(z),Y_q(z),z)\neq(X_k(z),Y_l(z),z).$$

Це дає змогу стверджувати, що

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\ell_{i,j,\lambda}(x,y,z)>0\quad \forall(x,y,z)\in R^3,$$

оскільки сума невід’ємних функцій може дорівнювати нулю лише в точці, у якій всі доданки дорівнюють нулю. Згідно з наведеними вище властивостями всі невідомі функції $\ell_{k,l,\lambda}(x,y,z)$ не можуть дорівнювати нулю одночасно. Таким чином, у формулі

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}\sum\limits_{l=0}^{N}f(X_k(z),Y_l(z),z)\ell_{k,l,\lambda}(x,y,z)}{\sum\limits_{i=0}^{M}\sum\limits_{j=0}^{N}\ell_{i,j,\lambda}(x,y,z)}$$

знаменник є додатною функцією, і тому $S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)\in C(R^3)$. Твердження а) теореми 1 доведено. Для доведення твердження б) запишемо таку послідовність рівностей:

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2013, Т. 16, № 4

$$S_{M,N,\lambda}(f;X_p(z),Y_q(z),z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{N}f(X_k(z),Y_l(z),z)\ell_{k,l,\lambda}(X_p(z),Y_q(z),z)}{\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\ell_{i,j,\lambda}(X_p(z),Y_q(z),z)}=$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{N}f(X_k(z),Y_l(z),z)\delta_{k,p}\delta_{l,q}}{\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\delta_{i,p}\delta_{j,q}\ell_{k,l,\lambda}(X_p(z),Y_q(z),z)}=\frac{f(X_p(z),Y_q(z),z)\delta_{p,p}\delta_{q,q}\ell_{k,l,\lambda}(X_p(z),Y_q(z),z)}{\delta_{k,p}\delta_{l,q}}=$$

$$=f(X_p(z),Y_q(z),z),\qquad p=1,2,\ldots,M,q=1,2,\ldots,N.$$

Таким чином, твердження б) теореми 1 теж доведено.

Теорема 1 доведена.

Диференціюванням $S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)$ по x або по y можна впевнитись, що для того, щоб $S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)\in C^1(R^3)$, якщо $f(x,y,z)\in C^1(R^3)$, необхідно, щоб показник степеня λ задовольняв співвідношення $\lambda > 1$. Крім того, якщо $\lambda = 2$, то

$$\mathrm{grad}S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)=0,\forall(x,y,z)\in\{(X_k(z),Y_l(z),z),k=1,2,\ldots,M,l=1,2,\ldots,N\},$$

оскільки в цьому випадку функція

$$\ell_{k,l,2}(x,y,z)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\prod_{j=1,j\neq l}^{N}\left(d_{i,j}(x,y,z)\right)^2=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\prod_{j=1,j\neq l}^{N}\left((x-X_i(z))^2+(y-Y_j(z))^2\right)$$

має градієнт, який дорівнює нулю в усіх точках $(X_p(z),Y_q(z),z),p\neq k,q\neq l$.

З геометричної точки зору це означає, що при $\lambda=2$ для заданого z поверхня $U=S_{M,N,\lambda}(f;x,y,z)$ в околі вузлів $(X_p(z),Y_q(z),z),p=1,2,\ldots,M,q=1,2,\ldots,N$, має горизонтальні дотичні площини [7].

Зупинимось на недоліках формули, зваженої за допомогою обернених відстаней до вузлів, якою є формула Шепарда.

Запишемо формулу Шепарда для випадку довільного розміщення прямих $(X_k(z),Y_l(z),z),k=1,2,\ldots,M$. Введемо позначення

$$d_k(x,y,z)=\sqrt{(x-X_k(z))^2+(y-Y_k(z))^2}\,.$$

Очевидно, що

$$d_k(x,y,z)>0\quad\forall(x,y,z)\in R^3,\quad(x,y,z)\neq(X_k(z),Y_l(z),z)$$

і

$$d_k(X_k(z),Y_l(z),z),\quad k=1,2,\ldots,M\,.$$

Тоді оператор інтерлінації $S_{M,\lambda}(f;x,y,z)$ можна подати так:

$$S_{M,\lambda}(f;x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{k=0}^{M}f(X_k(z),Y_l(z),z)\left(d_k(x,y,z)\right)^{-\lambda}}{\sum_{i=0}^{M}\left(d_i(x,y,z)\right)^{-\lambda}}, & \text{якщо } d_k(x,y,z)\neq 0\ \forall\, k=1,2,\ldots,M\\ f(X_i(z),Y_i(z),z)\quad\forall(x-X_i(z))^2+(y-Y_i(z))^2=0. & \end{cases}$$

Недолік 1. Якщо кількість M заданих точок є великою, то кількість арифметичних операцій Q для обчислення $U=S_{M,\lambda}(f;x,y,z)$ у одній точці пропорційна M : $Q=cM$ (c –

деяка стала). Це означає, що в такому випадку метод може бути неефективним або непрактичним.

Недолік 2. Рівність нулю градієнта у кожній точці D_k при фіксованому z є небажаними обмеженнями на наближувану функцію.

Недолік 3. Обчислювальна похибка (похибка заокруглення) стає істотною в околі точок $D_k(X_k(z), Y_l(z), z)$.

Далі вважаємо, що функція $u = f(x, y, z)$ описує просторовий розподіл щільності якої-небудь корисної копалини (сіль, вугілля, руда, нафта, газ тощо), а також, що нам задано M похилих свердловин Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, M$ та M функцій $\gamma_k(z) = f(X_k(z), Y_l(z), z), k = 1,2,\ldots, M$ змінної z, які отримані за допомогою аналізу вмісту кернів свердловинного буріння у точках з координатами $(X_k(z), Y_l(z), z), k = 1,2,\ldots, M$.

Іншими словами, у даній праці припускається, що кожній похилій свердловині ставиться у відповідність не одне число, а одна функція – характеристика розподілу щільності корисних копалин конкретного типу залежно від глибини z.

При цьому зазначена одна функція може бути розривною функцією змінної z – глибини. Нижче вважаємо їх неперервними.

Введемо до розгляду математичну модель просторового розподілу якої-небудь корисної копалини у вигляді

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; x, y, z) = \frac{\sum_{k=1}^{M} \gamma_k(z) L_{k,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{k=1}^{M} L_{k,\lambda}(x, y, z)},$$

$$L_{k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{j=1, j \neq k}^{M} \left(d_j(x, y, z)\right)^{\lambda}.$$

Теорема 2. Справедливі такі співвідношення.

Якщо $\gamma_k(z) \in C[-H, 0),\ k = 1,2,\ldots, M$, то

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; x, y, z) \in C(R^3);$$

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z), k = 1,2,\ldots, M, \forall z \in [-H, 0).$$

Доведення. Використовуючи позначення

$$h_{p,\lambda}(x, y, z) = \frac{L_{p,\lambda}(x, y, z)}{\sum_{k=1}^{M} L_{k,\lambda}(x, y, z)}$$

і враховуючи властивості допоміжних функцій

$$L_{p,\lambda}(x, y, z) \geq 0, L_{p,\lambda}(x, y, z) \in C(R^3),$$

$$h_{p,\lambda}(x, y, z) \geq 0, p = 1,2,\ldots, M, h_{p,\lambda}(X_k(z), Y_k(z), z) = \delta_{k,p}, k, p = 1,2,\ldots, M,$$

можна дійти висновку, що $\sum_{k=1}^{M} L_{k,\lambda}(x, y, z) > 0 \Rightarrow S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\}; x, y, z) \in C(R^3)$, оскільки чисельники $L_{p,\lambda}(x, y, z)$ у формулі для $h_{p,\lambda}(x, y, z)$ є неперервними функціями $L_{p,\lambda}(x, y, z) \in C(R^3)$.

Для доведення другого твердження теореми 2 запишемо таку послідовність рівностей:

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2013, Т. 16, № 4

$$S_{M,\lambda}(\{\gamma_p\};X_p(z),Y_p(z),z)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{M}\gamma_k(z)L_{k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)}{\sum\limits_{i=1}^{M}L_{i,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{M}\gamma_k(z)\delta_{k,p}L_{k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)}{\sum\limits_{i=1}^{M}\delta_{i,p}L_{i,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)}=\frac{\gamma_p(z)\delta_{p,p}}{\delta_{p,p}}=\gamma_p(z),\ p=1,2,\dots,M.$$

Таким чином, теорема 2 доведена.

2. Математичне моделювання розподілу корисних копалин методом узагальнень глобальної інтерполяційної формули Литвина

Розглянемо для довільної $f\in C(R^3),\ f(X_k(z),Y_k(z),z)=\gamma_k(z),k=1,2,\dots,M$, інтерлінаційні оператори [8]

$$O_{M,\lambda}(f;x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}\gamma_k(z)\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z),\ \lambda\ge 1,\ M=2,3,...,$$

$$\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)=\prod_{i=1,i\ne k}^{M}\frac{d_i(x,y,z)^{\lambda}}{d_{i,k}^{\lambda}}=\frac{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_i(x,y,z)^{\lambda}}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_{i,k}^{\lambda}},$$

$$d_i(x,y,z)=\sqrt{(X_i(z)-x)^2+(Y_i(z)-y)^2};\ d_{i,k}=\sqrt{(X_i(z)-X_k(z))^2+(Y_i(z)-Y_k(z))^2}.$$

які для випадку $\gamma_k(z)=\gamma_k=\mathrm{const},\ k=1,2,\dots,M$, є інтерполяційними операторами на нерегулярній сітці вузлів, запропонованими О. М. Литвином в 1990 р. [9]

Теорема 3. Для кожної $f(x,y,z)\in C(R^3)$ виконуються співвідношення

$$O_{M,\lambda}(f;x,y,z)\in C(R^3)$$

$$O_{M,\lambda}(f;X_p(z),Y_p(z),z)=\gamma_p(z),\ p=1,2,\dots,M.$$

Доведення. Дослідимо властивості допоміжних функцій $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$. Перш за все зазначимо, що знаменники $\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_{i,k}^{\lambda}$ у формулах для $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – сталі величини і $d_{i,k}^{\lambda}>0\forall i,k\in\{1,...,M\},i\ne k,\lambda>0$, а чисельник – невід'ємна функція $\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_i(x,y,z)^{\lambda}\ge 0$. Тому

$$\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)\ge 0\quad \forall k=1,2,\dots,M;\lambda>0.$$

Крім того,

$$\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)=\prod_{i=1,i\ne k}^{M}\frac{d_i(X_p(z),Y_p(z),z)^{\lambda}}{d_{i,k}^{\lambda}}=\frac{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_i(X_p(z),Y_p(z),z)^{\lambda}}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_{i,k}^{\lambda}}=\frac{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_{i,p}^{\lambda}}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_{i,k}^{\lambda}}=\delta_{k,p},$$

$$k,p=1,2,\dots,M,$$

оскільки

$$\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,p}^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}} = \begin{cases} 1, p = k, \\ 0, \text{якщо } p = i, p \in \{1,2,..,M\}, \ p \neq k. \end{cases}$$

Отже, $\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}, k,$ Враховуючи це, можна записати таку послідовність рівностей:

$$O_{M,\lambda}(f; X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^{M} \gamma_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^{M} \gamma_k(z) \delta_{k,p} = \gamma_p(z), \ p = 1,2,\ldots,M.$$

Теорема 3 доведена.

Враховуючи, що знаменники у формулі для $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – сталі числа, можна дійти висновку, що $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – поліном степеня $(M-1)2r$ за змінними x, y, якщо $\lambda = 2r$, $r = 1, 2, \ldots$ [10].

Зауважимо, що базисні функції $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ є також функціями координат точок $D_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = 1,2,\ldots,M : \ell_{M,k,\lambda}(x,y,z) = \ell_{M,k,\lambda}(x,y,z; X(z), Y(z), z)$ і залежать, природно, від розміщення цих координат $D_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = 1,2,\ldots,M$.

Приклади показують, що поведінка $O_{M,\lambda}(f; x,y,z)$, що використовує допоміжні функції вигляду $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z) = \dfrac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_i(x,y,z)^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}}$ може спричинити великі коливання між точками $D_k(X_k(z), Y_k(z), z), k = 1,2,\ldots,M$ і, крім того, $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z) \to \infty$ оскільки чисельник в них – необмежена величина при $x^2 + y^2 \to \infty$. Це твердження є наслідком того, що оператори $O_{M,\lambda}(f; x,y,z)$ є очевидними узагальненнями поліноміальних інтерполяційних операторів Лагранжа від двох змінних на випадок нерегулярно розміщених вузлів. За теоремами Вейєрштрасса, на замкнутому інтервалі $[a, b]$ кожну неперервну функцію можна наблизити із заданою точністю $\varepsilon > 0$ алгебраїчним поліномом деякого степеня $n = n(\varepsilon)$. Проте інтерполяційні оператори Лагранжа, як відомо [1], збігаються не для кожної неперервної функції при довільних вузлах інтерполяції. Наприклад, доведено, що інтерполяційний поліном Лагранжа з рівномірно розміщеними на інтервалі $[-1, 1]$ вузлами інтерполяції для функції $f(x) = |x|$ не збігається до цієї функції. Тому нижче розглянемо ще інші формули для $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$.

Теорема 4. Якщо у формулі для $O_{M,\lambda}(f; x,y,z)$ замінити $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ на $L_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ з раціональними допоміжними функціями

$$L_{M,k,\lambda}(x,y,z) = \frac{\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)}{\sum_{p=1}^{M} \prod_{p=1,p\neq k}^{M} \ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)},$$

і якщо $\lambda/2 \in N$, то $O_{M,\lambda}(f; x,y,z)$ є додатним оператором інтерлінації $O_{M,\lambda}(f; X_p(z), Y_p(z), z) = \gamma_k(z), k = 1,2,\ldots,M$.

Доведення. Перш за все, зауважимо, що при $\lambda/2 \in N$ чисельник у формулі для допоміжних функцій $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ є поліномом степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x, y. Враховуючи, що знаменники у формулі для $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – сталі числа, можна зробити висновок, що

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2013, Т. 16, № 4

$\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – поліном степеня $(M-1)\lambda$ за змінними x, y, тобто $O_{M,\lambda}(f;x,y,z)$ є раціональним дробом, якщо $\lambda/2 \in N$.

Щоб довести, що ці раціональні вирази створюють базис, запишемо таку послідовність рівностей:

$$L_{M,k,\lambda}(X_q(z),Y_q(z),z)=\frac{\ell_{M,k,\lambda}(X_q(z),Y_q(z),z)}{\sum_{p=1}^{M}\ell_{M,p,\lambda}(X_q(z),Y_q(z),z)}=\begin{cases}1, q=k\\ 0, q\neq k, q=1,2,\ldots,M\end{cases}.$$

Отже, при такому виборі $L_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ виконуються співвідношення $L_{M,k,\lambda}(x,y,z)=\delta_{k,p},k,1,2,\ldots,M$. Повторюючи доведення теореми 3, отримуємо

$$O_{M,\lambda}(f;X_q(z),Y_q(z),z)=\gamma_q(z),\ p=1,2,\ldots,M.$$

Теорема 4 доведена.

Зауваження 1. Якщо λ – раціональне число: $\lambda = m/n$, то функції $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ можуть набувати дійсних значень лише за умови $m \in Z$, $n = 2k-1$, $k, = 1, 2, \ldots$ оскільки вираз $(x-X_i(z))(X_k(z)-X_i(z))+(y-Y_i(z))(Y_k(z)-Y_i(z))$ може бути як додатним, так і від'ємним.

Зауваження 2. Таким чином, оператор $L_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ буде додатним оператором для довільного $\lambda \geq 1$, оскільки для будь-якого $\lambda \geq 1$ виконуватимуться умови $0 \leq L_{M,k,\lambda}(x,y,z) \leq 1$.

Теорема 5. Якщо у формулі для $O_{M,\lambda}(f;x,y,z)$ покласти

$$\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\frac{(x-X_i(z))(X_k(z)-X_i(z))+(y-Y_i(z))(Y_k(z)-Y_i(z))}{(X_k(z)-X_i(z))^2+(Y_k(z)-Y_i(z))^2}, \tag{2}$$

то оператор $O_{M,\lambda}(f;x,y,z)$ теж буде оператором інтерлінації, якщо $\lambda > 0$, $\lambda = 2q$, $q \in N$, $O_{M,\lambda}(f;X_k(z),Y_k(z),z)=\gamma_k(z), k=1,2,\ldots,M$.

Доведення виконується аналогічно доведенню теореми 4 на підставі використання таких рівностей:

$$\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)=\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\left|(X_p(z)-X_i(z))(X_k(z)-X_i(z))+(Y_p(z)-Y_i(z))(Y_k(z)-Y_i(z))\right|^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\left((X_k(z)-X_i(z))^2+(Y_k(z)-Y_i(z))^2\right)^{\lambda}}=$$

$$=\begin{cases}1, p=k\\ 0, p\neq k, p=1,2,\ldots,M.\end{cases}$$

Зауваження 3. Відмітимо, що допоміжні функції (2) є базисними поліномами мінімального степеня, але як всі поліноміальні базисні інтерполянти мають великі відхилення між свердловинами, тоді як базисні функції з теореми 5 задовольняють умови $0 \leq L_{M,k,\lambda}(x,y,z) \leq 1$.

Висновок

Таким чином, оператор $O_M f(x, y, z)$ є оператором інтерлінації функцій трьох змінних, який дозволяє відновлювати розподіл корисних копалин між похилими свердловинами $\Gamma_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, M$ з використанням інформації про розподіл у свердловинах $\Gamma_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, M$. Кожній неперервній функції $f(x, y, z) \in C(D)$ цей оператор ставить у відповідність теж неперервну функцію $O_M f(x, y, z) \in C(D)$.

Автори планують створити програмне забезпечення для запропонованих методів та алгоритмів побудови математичних моделей розподілу корисних копалин в корі планети на основі даних з кернів похилих свердловин.

Література

1. *Математичне* моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами методом поліноміальної сплайн-інтерлінації функції / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Н. І. Штепа, О. С. Чорна // Інформатика та системні науки: Матеріали II Всеукраїн. наук.-практ. конф. ІСН-2011 17–19 березня 2011. – Полтава: РВВ ПУЄТ, 2011. – 355 с.
2. *Математична* модель просторового розподілу корисних копалин кори землі за допомогою даних з кернів свердловин та інформації про розподіл на поверхні / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Н. І. Штепа, О. С. Чорна // Інформатика та системні науки: Матеріали III Всеукраїн. наук.-практ. конф. ІСН-2012 1–3 березня 2012. – Полтава: РВВ ПУЄТ, 2012. – 179–181 с.
3. *Математичне* моделювання розподілу корисних копалин між похилими свердловинами методом поліноміальної інтерлінації функції / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Н. І. Штепа, О. С. Чорна // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): Пр. міжнарод. молодіжн. мат. шк. – К.: Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 94.
4. *Математичне* моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій / О. М. Литвин, Н. І. Штепа, С. І. Кулик, О. С. Чорна // Пробл. машинобудування. – 2013. – Т. 16, № 1. – С. 61–63.
5. *Литвин О. Н.* Интерполирование функций: Учеб. пособие / О. Н. Литвин. – Киев: УМК ВО. 1988. – 31 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
7. *Литвин О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій / О. М. Литвин, Н. І. Штепа, О. О. Литвин. – К.: Наук. думка, 2011. – 228 с.
8. *Литвин О. М.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних / О. М. Литвин, Н. І. Штепа // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): Пр. між народ. симпозіуму, Крим, смт. Кацивелі, 24–29 вересня 2009. – Т. 2. Київ. – 2009. – С. 20–24.
9. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
10. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи / О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 331 с.

Надійшла до редакції
12.11.13