

УДК 534.24

## РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА КОНЕЧНЫХ КЛИНОВИДНЫХ ОБЪЕКТАХ

В. Т. ГРИНЧЕНКО\*, В. Т. МАЦЫПУРА\*\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\*Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 09.07.2003

В рамках метода частичных областей решена двумерная задача рассеяния плоской волны на конечных клиньях с различными геометрическими параметрами. На основе оценок погрешностей выполнения граничных условий и условий сопряжения проведен анализ точности полученного решения. Основное внимание уделено получению количественных данных о таких интегральных характеристиках как полное, позиционное и обратное сечения рассеяния при различных волновых размерах клиньев. В случае малых волновых размеров наблюдается плавное изменение характеристик рассеяния в зависимости от угла падения плоской волны. Однако даже в этих случаях влияние рассеяния в окрестности угловых точек является существенным. При рассеянии относительно коротких волн наблюдается высокая степень изрезанности для всех трех характеристик рассеяния в зависимости от направления падения плоской волны.

У рамках методу часткових областей розв'язано двовимірну задачу розсіювання плоскої хвилі на скінченних клинах з різними геометричними параметрами. На основі оцінювання похибок виконання граничних умов і умов спряження проведено аналіз точності отриманого розв'язку. Основну увагу приділено одержанню кількісних даних про такі інтегральні характеристики як повний, позиційний та зворотний перетини розсіювання при різних хвильових розмірах клинів. У випадку малих хвильових розмірів спостерігається плавна зміна характеристик розсіювання в залежності від кута падіння плоскої хвилі. Однак навіть у цих випадках вплив розсіювання в околі кутових точок є істотним. При розсіюванні відносно коротких хвиль спостерігається високий ступінь порізаності для всіх трьох характеристик розсіювання в залежності від напрямку падіння плоскої хвилі.

Within the framework of a method of partial areas the two-dimensional problem on scattering of a plane wave on finite wedges with various geometrical parameters is solved. On the basis of estimations of the errors of satisfaction of the boundary conditions and matching conditions the analysis of accuracy of the obtained solution is carried out. Main attention is given to reception of the quantitative data about such integral characteristics as full, positional and back scattering cross-sections at various wave sizes of the wedges. In case of the small wave sizes smooth change of the scattering characteristics dispersion is observed, depending on the angle of incidence of the plane wave. However, even in these cases the influence of scattering in a vicinity of angular points is essential. At scattering of relatively short waves a high degree of irregularity for all three scattering characteristics of dispersion is observed depending on the direction of incidence of the plane wave.

### ВВЕДЕНИЕ

Результаты решения задачи рассеяния волн бесконечным клином, полученные в классических работах [1–3], оказали значительное влияние на развитие представлений об особенностях рассеяния волн телами сложной формы и методов решения задач дифракции. Как результат, сформировалось четкое представление о том, что для достаточно точного описания рассеянного поля в зоне тени необходимо учесть особенности рассеянного поля вблизи угловых точек. При этом рассеяние на ребре представлялось как вклад некоторого дополнительного источника.

Понимание важной роли рассеяния на ребрах стимулировало разработку методов решения задач дифракции, позволяющих учесть их влияние. Практически одновременно были предложены подходы, получившие название геометрической [4] и физической теорий дифракции [5]. Оба подхода базируются на использовании принципа

локализации [6], суть которого сводится к предположению о том, что в случае относительно коротких волн дифракционное поле возле ребра определяется локальными свойствами падающей волны и локальной геометрией рассеивающей поверхности. Исходя из этого можно считать, что дифракционное поле вблизи ребра аппроксимируется дифракционным полем в окрестности вершины соответствующего по геометрии и свойствам поверхности бесконечного клина.

Эффективность использования известных точных решений задач рассеяния на клине волн от источников различных типов несколько снижается за счет сложности их аналитической структуры. В связи с этим продолжают исследования проблемы дифракции на клине с целью получения более простых выражений для рассеянных ребром волн. Например, обсуждаются сравнительные возможности методов Зоммерфельда – Малюжинца и Винера – Хопфа [7]. Интересный новый подход, получивший название модели линейных направленных

источников (Directive Line Source Model), изложен в работе [8]. В ее рамках даются унифицированные представления рассеянного на ребре поля для плоских, сферических и цилиндрических волн.

Волновое поле вблизи угловых точек поверхности рассеивателя обладает определенной сингулярностью. Ее характер известен изначально (до решения задачи). Этот факт используется как в физической, так и в геометрической теории дифракции. Знание характера особенности вблизи угла применялось при разработке различных подходов к решению граничных задач в теории дифракции. Это позволило значительно повысить эффективность вычислительных процедур при количественной оценке характеристик волновых полей [9, 10].

Существенное влияние угловых точек на характеристики рассеяния различными объектами предоставляет широкие возможности для управления свойствами рассеянного поля. Осуществлять такое управление можно, в частности, путем изменения физических свойств рассеивающей поверхности вблизи кромки. Так, в случае электромагнитных полей на кромку наносится поглощающее покрытие [11]. Это позволяет заметно улучшить характеристики направленности антенны. Аналогичный по своей сути способ используется при создании акустических экранов [12, 13].

Исследование полей, дифрагированных препятствиями с изломами границы, указывает на важность взаимодействия между волновыми полями, рассеянными на различных угловых точках. Это явление в равной мере важно как для акустических [14], так и электромагнитных волн [9]. В связи с этим интересно отметить попытки связать с изучением взаимодействия при рассеянии на угловатых поверхностях разработку технологии “стелс”. Здесь показательной является дискуссия на страницах Интернет-изданий <http://airbase.ru/forum/1/2233/2.htm>, <http://anomalialia.narod.ru/text/569.htm>.

Рассматриваемая в данной работе двумерная задача рассеяния на конечном клине с различными значениями углов на кромках представляет несомненный интерес с точки зрения изучения влияния взаимодействия на интегральные характеристики рассеянного поля. Предложен метод решения задачи, являющийся достаточно простым и надежным для того, чтобы получить необходимый набор количественных данных. Общие идеи этого метода обсуждались ранее в работах [10, 15]. Здесь эти идеи реализованы применительно к нескольким конкретным случаям геометрии клиновидных областей. При этом для получения общих

решений граничных задач эффективно использована возможность привлечения частных решений в различных координатных системах.

Данная работа имеет следующую структуру. В первом разделе описываются конкретные типы рассматриваемых клиновидных объектов. Для каждого из них строится общее решение граничной задачи для уравнения Гельмгольца. Приводится характерный пример бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, возникающих при удовлетворении граничных условий и условий сопряжения. Второй раздел посвящен анализу погрешностей в решении задач, обусловленных редукцией бесконечных систем. В третьем разделе приведены количественные оценки интегральных характеристик рассеяния для различных волновых размеров клиньев и различных направлений падения плоской волны.

## 1. ПОСТАНОВКА И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу рассеяния звука на клиновидном объекте (рис. 1), который полагаем бесконечно протяженным вдоль оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Поверхности, образующие объект, во всех случаях считаются акустически жесткими. Для описания геометрии объекта и построения решения задачи введем полярную систему координат  $(r, \theta)$  с центром  $O$  в угле клина. Рис. 1, а и б соответствуют телесным клиньям с разными формами тыльной поверхности. Согласно рис. 1, а, первый объект представляет собой клин с углом раствора  $2\theta_1$ , причем его стороны замыкаются дугой  $AB$  окружности радиуса  $R$ . У второго объекта (рис. 1, б) стороны клина замыкаются хордой окружности  $AB$ . Рассеиватель, представленный на рис. 1, в, является полым со сторонами  $OA$  и  $OB$ .

Считаем, что клиновидный объект находится в идеальной жидкости с плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$ . Характеристики гармонического звукового поля в окружающем пространстве определяются через функцию потенциала скоростей  $\Phi$ , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\omega$  – частота гармонической волны. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается.

Поскольку объект является акустически жестким, то на его поверхности  $S$  должно выполняться

условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (2)$$

где  $n$  – нормаль к поверхности.

Построение решений граничных задач рассеяния для всех трех клиновидных объектов будет осуществляться с использованием метода частичных областей [10]. В соответствии с идеей этого метода все пространство существования звукового поля естественным образом разбивается:

- на две области для первого объекта (см. рис. 1, а);
- на три области для второго и третьего объектов (см. рис. 1, б, в).

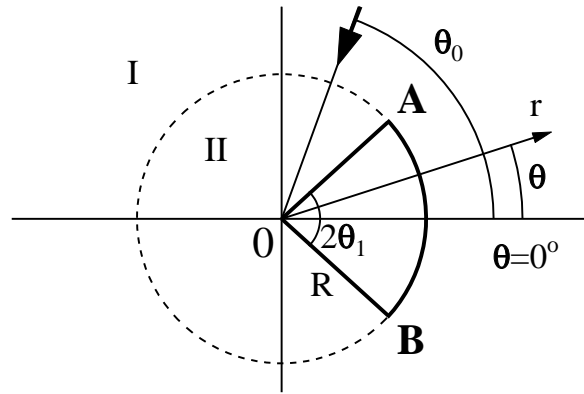
Области I и II одинаковы для всех трех вариантов. Область I является внешностью окружности радиусом  $R$ :  $r \geq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Область II – сектор круга радиуса  $R$ :  $0 \leq r \leq R, \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1$ . Область III для второго варианта объекта (см. рис. 1, б) образована ходой  $AB$  и дугой  $AB$ , а для рис. 1, в представляет собой сектор:  $0 \leq r \leq R, -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1$ . Указанное выделение частичных областей непосредственно связано со способом построения решения граничной задачи. Именно для таких областей удастся построить общие решения граничных задач для уравнения Гельмгольца. При этом решение исходной задачи сводится к выполнению условий сопряжения на границах частичных областей.

Пусть в области I на клиновидную структуру набегают плоская волна единичной амплитуды (рис. 1):

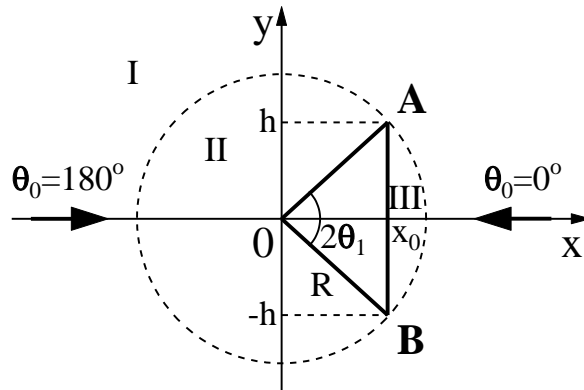
$$e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos(n(\theta - \theta_0)), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ;  $\varepsilon_n = 2$  при  $n > 0$ ;  $J_n(kr)$  – функция Бесселя первого рода. Формула (3) представляет собой известное разложение плоской волны по цилиндрическим функциям [16, 17]. Угол  $\theta_0$  определяет направление распространения плоской волны.

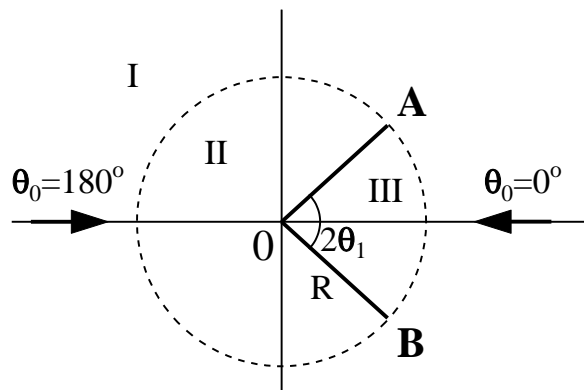
При взаимодействии плоской волны с клиновидным объектом образуется рассеянное поле. Поэтому звуковое поле в области I, с учетом того, что угол падения волны  $\theta_0$  произволен, следует запи-



а



б



в

Рис. 1. Геометрия клиновидного объекта

сать в виде [10, 16]

$$\begin{aligned} \Phi_I = & \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos(n(\theta - \theta_0)) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kR)} \cos(n\theta) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{H_{n+1}^{(1)}(kr)}{H_{n+1}^{(1)'}(kR)} \sin((n+1)\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $H_n^{(1)}(kr)$  – функция Ханкеля первого рода,  $H_n^{(1)'}(kR)$  – ее производная по полному аргументу. Нормировка коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  на  $H_n^{(1)'}(kR)$  является общепринятой.

Поле в области II представим в виде суперпозиции стоячих волн

$$\Phi_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J_{\alpha_n}(kR)} \cos(\alpha_n(\theta - \theta_1)), \quad (5)$$

где  $\alpha_n$  определяется из условия (2) на жестких поверхностях клина:  $\alpha_n = n\pi / (2(\pi - \theta_1))$ .

Для второго и третьего вариантов клиновидной структуры (рис. 1, б, в) в дальнейшем будем рассматривать падение плоской волны только под углами  $\theta_0 = 0^\circ$  и  $\theta_0 = 180^\circ$ . Тогда рассматриваемая система становится симметричной относительно прямой  $\theta = 0^\circ$  и из формулы (4) для поля в области I исчезает ряд с коэффициентами  $B_n$ . При этом поле в области II для рис. 1, б, в приобретает вид

$$\Phi_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J_{\alpha_n}(kR)} \cos(\alpha_n(\pi - \theta)), \quad (6)$$

где  $\alpha_n = n\pi / (\pi - \theta_1)$ .

Поле в области III для рис. 1, в записывается аналогично:

$$\Phi_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{J_{\gamma_n}(kr)}{J_{\gamma_n}(kR)} \cos(\gamma_n\theta). \quad (7)$$

Здесь, согласно условиям (2) на жестких поверхностях клина,  $\gamma_n = n\pi / \theta_1$ .

Для представления поля в области III второго варианта структуры (см. рис. 1, б) следует дополнительно ввести декартову систему координат  $(x, y)$  с центром в точке  $O$ . Это усложнение связано с тем, что здесь граница области III состоит из дуги  $AB$  и прямолинейной хорды  $AB$ . Очевидно, нельзя указать одну систему функций, которая была бы полной и ортогональной одновременно и на дуге  $AB$ , и на хорде  $AB$ . Что касается дуги  $AB$ , то на этой границе полной

и ортогональной является система функций  $\{\cos(\gamma_n\theta), \gamma_n = n\pi / \theta_1, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . На хорде  $AB$  при принятых условиях симметрии полной и ортогональной является система функций  $\{\cos(\beta_n y), \beta_n = n\pi / h, h = R \sin \theta_1, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Поэтому поле в области III структуры, изображенной на рис. 1, б, следует представить в виде суперпозиции цилиндрических и плоских волн:

$$\begin{aligned} \Phi_{III} = & \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{J_{\gamma_n}(kr)}{J_{\gamma_n}(kR)} \cos(\gamma_n\theta) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\beta_n y) e^{ik_n(x-x_0)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$k_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}.$$

Первая сумма в выражении (8) – суперпозиция цилиндрических волн – за счет выбора значений постоянных  $E_n$  обеспечивает выполнение условий сопряжения на границе областей III и I (дуге  $AB$ ). Вторая сумма (суперпозиция плоских волн) обеспечивает выполнение граничного условия на плоской поверхности  $x = x_0 = R \cos \theta_1, -h \leq y \leq h$  за счет выбора значений постоянных  $D_n$ . Выбор знака “плюс” в показателе экспоненты определяет однородные плоские волны, бегущие от границы  $x = x_0$  в направлении оси  $x$ . Неоднородные же плоские волны при  $x > x_0$  имеют в этом случае убывающую амплитуду.

Учитывая полноту и ортогональность функций, входящих в построенные решения, убеждаемся, что все они обладают достаточной степенью произвола (в виде наборов произвольных коэффициентов) для выполнения условий сопряжения на границах частичных областей.

Запишем условие сопряжения звуковых полей для трех вариантов клиновидного объекта (рис. 1).

Для рис. 1, а:

$$\Phi_I = \Phi_{II}, \quad r = R, \quad \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r}, & r = R, \quad \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1, \\ 0 & r = R, \quad -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1. \end{cases} \quad (10)$$

Для рис. 1, б:

$$\Phi_I = \Phi_{II}, \quad r = R, \quad \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1, \quad (11)$$

$$\Phi_I = \Phi_{III}, \quad r = R, \quad -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r}, & r = R, \quad \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1, \\ \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r}, & r = R, \quad -\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1, \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial x} = 0, \quad x = x_0, \quad -h \leq y \leq h. \quad (14)$$

Для рис. 1, в условия сшивания записываются через соотношения (11)–(13), причем поле  $\Phi_{III}$  определяется формулой (7).

Стандартная процедура алгебраизации приведенных функциональных систем [10] порождает бесконечные системы алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_n, B_n, C_n, E_n, D_n$  (в соответствии с вариантом клиновидной структуры). При этом алгебраизация уравнения (9) происходит с использованием свойств полноты и ортогональности системы функций  $\cos(\alpha_n(\theta - \theta_1))$ , уравнения (10) – системы функций  $\cos(n\theta)$  и  $\sin(n\theta)$ , уравнения (11) – системы функций  $\cos(\alpha_n(\theta - \pi))$ , уравнения (12) – системы функций  $\cos(\gamma_n\theta)$ , уравнения (13) – системы функций  $\cos(n\theta)$  и, наконец, уравнений (14) – системы функций  $\cos(\beta_n y)$ .

Следует обратить внимание на то, что при алгебраизации функциональных уравнений, выражающих граничные условия и условия сопряжения для клина, показанного на рис. 1, а, имеется единственно возможный вариант формирования алгебраической системы. Произвольные коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ , содержащиеся в представлении потенциала (4) для внешности окружности  $r = R$  следует определять из условия для радиальной скорости на этой границе. Только в этом случае возможно эффективно использовать полноту и ортогональность тригонометрических функций  $\cos n\theta$  и  $\sin n\theta$ .

Для двух других типов рассеивателей существуют два альтернативных варианта действий при нахождении коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , определяющих рассеянное поле в области I. Эти коэффициенты могут быть вычислены либо из условий для давления, либо из условий для радиальной скорости на полной окружности  $r = R$ . Этот вопрос подробно рассматривался в работе [15], где была показана возможность использования любого из двух вариантов. При этом не наблюдается существенного различия в объеме вычислений, необходимых для достижения одинаковой точности выполнения условий сопряжения. Здесь мы будем

определять  $A_n$  и  $B_n$  из условия сопряжения полей по радиальной скорости на полной окружности  $r = R$  (уравнение (13)).

В качестве примера запишем алгебраическую систему уравнений, образованную из функциональной системы (9), (10):

$$\begin{aligned} & C_m \frac{J_n(kR)}{J'_n(kR)} (2\pi - 2\theta_1) \delta_m - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} \times \\ & \quad \times Q(n, 0, \alpha_m, \alpha_m \theta_1, \theta_1, 2\pi - \theta_1) - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{H_{n+1}^{(1)}(kR)}{H_{n+1}^{(1)'}(kR)} \times \\ & \quad \times P(n + 1, 0, \alpha_m, \alpha_m \theta_1, \theta_1, 2\pi - \theta_1) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(kR) \times \\ & \quad \times Q(\alpha_m, \alpha_m \theta_1, n, n\theta_0, \theta_1, 2\pi - \theta_1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & A_m \pi \delta_m - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \times \\ & \quad \times Q(m, 0, \alpha_n, \theta_1, \theta_1, 2\pi - \theta_1) = \\ & = - \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J'_n(kR) \times \\ & \quad \times Q(m, 0, n, n\theta_0, 0, 2\pi), \\ & B_m \pi - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \times \\ & \quad \times P(m + 1, 0, \alpha_n, \alpha_n \theta_1, \theta_1, 2\pi - \theta_1) = \\ & = - \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J'_n(kR) \times \\ & \quad \times P(m + 1, 0, n, n\theta_0, 0, 2\pi), \end{aligned}$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\delta_0 = 2, \delta_m = 1$  при  $m > 0$ ;

$$Q(a, b, c, d, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \cos(ax + b) \cos(cx + d) dx;$$

$$P(a, b, c, d, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \sin(ax + b) \cos(cx + d) dx.$$

Отметим, что для первого и третьего вариан-

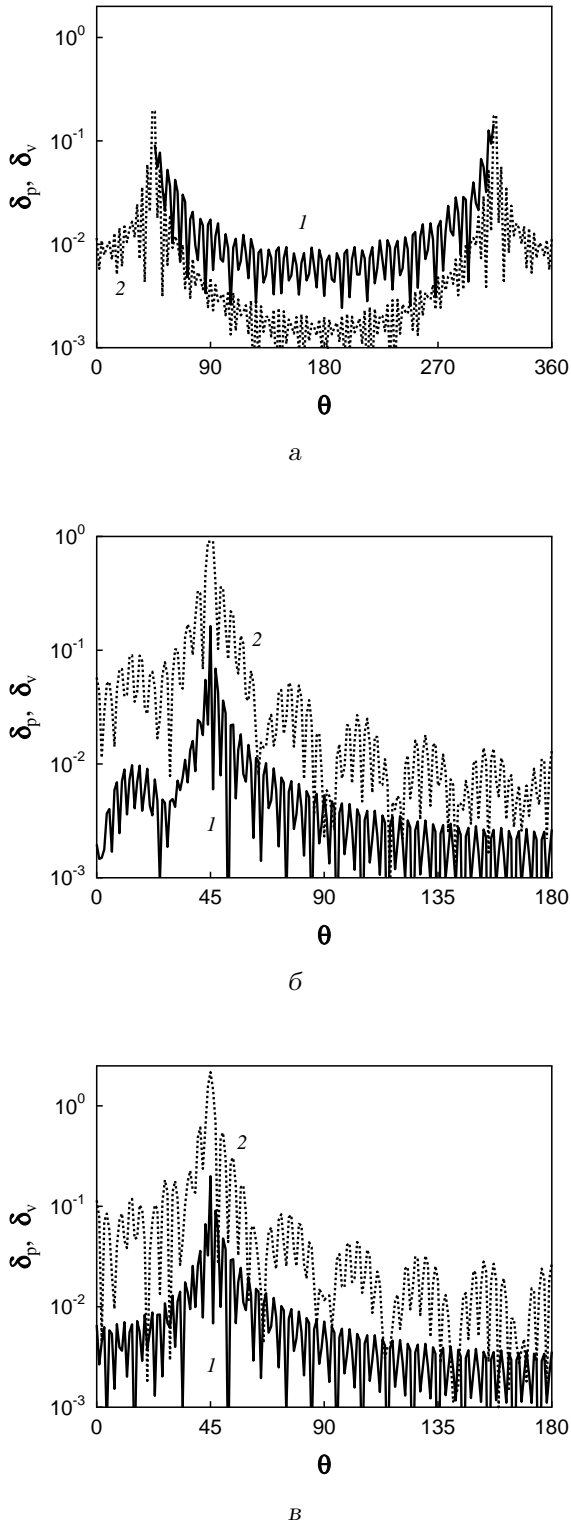


Рис. 2. Невязки по давлению ( $\delta_p$ ) и колебательной скорости ( $\delta_v$ ) вдоль окружности радиуса  $r=R$  при  $kR=15$ ,  $\theta_1=45^\circ$ ,  $N_1=N_2=N_4=40$ ,  $N_3=16$ :  
 а – для системы, изображенной на рис. 1, а, при  $\theta_0=90^\circ$ ;  
 б – для системы, изображенной на рис. 1, б, при  $\theta_0=0^\circ$ ;  
 в – для системы, изображенной на рис. 1, в, при  $\theta_0=180^\circ$

тов геометрии рассеивателей коэффициенты бесконечных систем определяются в явном виде. Для второго варианта геометрии их значения следует найти путем численного интегрирования.

Полученные общие решения задач рассеяния позволяют отметить важную особенность метода частичных областей. Так, за счет предложенной конструкции общего решения удастся избежать использования преобразования Конторовича–Лебедева на конечном интервале. Можно сказать, что в определенном смысле примененный нами подход сводит задачу рассеяния на конечном клине к задаче рассеяния на круговом цилиндре.

## 2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Вопрос о построении алгоритмов решения бесконечных систем уравнений, порожденных выполнением условий сопряжения для метода частичных областей, многократно обсуждался в различных публикациях [10]. При этом логическую стройность таких алгоритмов можно обеспечить за счет последовательного учета известной сингулярности звукового поля в окрестности угловых точек. Этот подход позволяет получить количественные оценки характеристик звуковых полей в областях, сколь угодно близких к угловым точкам. Если же основной интерес представляют полевые характеристики в точках, удаленных от угловых, то, как показывает опыт многочисленных расчетов, достаточную точность обеспечивает традиционный метод простой редукции при удержании в конечной системе нескольких десятков уравнений [10, 15].

Построенные в рамках метода частичных областей аналитические представления звукового поля всегда точно удовлетворяют уравнению Гельмгольца, независимо от количества удерживаемых в рядах слагаемых. Поэтому в основу оценок точности решения задачи в целом следует положить контроль за выполнением условий сопряжения на границах частичных областей. Для оценивания качества выполнения условий сопряжения определим невязку как отношение модуля разности характеристики звукового поля (давления или колебательной скорости) слева и справа от границы раздела к амплитуде поля плоской волны, набегающей на клиновидную структуру.

Пусть число  $N_1$  определяет количество учитываемых мод в рассеянном поле в области I (количество коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ ), а число  $N_2$  – количество учитываемых мод в области II (коэффициенты  $C_n$ ). Числа  $N_3$  и  $N_4$  определяют количество удерживаемых коэффициентов  $E_n$  и  $D_n$  со-

ответственно.

Один из вариантов расчета, для которого будут приведены оценки погрешностей, выполнен при следующих значениях параметров:  $kR=15$ ,  $\theta_1=45^\circ$ ,  $N_1=N_2=N_4=40$ ,  $N_3=16$ . При этом угол падения плоской волны  $\theta_0$  выбирался разным для трех вариантов структуры:  $\theta_0=90^\circ$  для рис. 1, а,  $\theta_0=0^\circ$  для рис. 1, б и  $\theta_0=180^\circ$  для рис. 1, в. На рис. 2 представлены графики невязки по давлению  $\delta_p$  и колебательной скорости  $\delta_v$  окружности радиуса  $r=R$ .

Прежде всего, из графиков следует, что невязка при выполнении условий сопряжения возрастает при подходе к угловым точкам  $\theta=\pm\theta_1$ ,  $r=R$ . При этом, в зависимости от геометрии структуры вблизи указанной угловой точки, влияние локальной сингулярности на структуру звукового поля должно быть различным. Это объясняется различием характера сингулярности для рассматриваемых объектов. Ясно, что наибольшее влияние на звуковое поле вблизи угла будет наблюдаться для клиновидной структуры, представленной на рис. 1, в. В этом случае имеется корневая особенность в поле скоростей вблизи ребра. Известно, что с увеличением угла раскрыва вблизи ребра степень сингулярности уменьшается. В связи с этим наименьшее влияние особенности должно наблюдаться для структуры, представленной на рис. 1, а. Эти соображения коррелируют с представленными количественными оценками. Как видно, невязка по скорости вблизи угловой точки  $\theta=\pm\theta_1=\pm 45^\circ$  максимальна на рис. 2, в, становится меньше на рис. 2, б и, наконец, еще более значительно уменьшается на рис. 2, а. В целом, положив в качестве критерия малости невязки неравенство  $\delta \leq 0.1$ , можно говорить об удовлетворительном выполнении условий сшивания звуковых полей на границах выделенных областей. Следует отметить, что “изрезанность” кривых на рис. 2 является определенным качественным указанием на достоверность вычислений. Это обусловлено тем, что ограничение числа уравнений в бесконечной системе вносит погрешность в выполнение условий сопряжения именно по высоким гармоникам в соответствующих рядах Фурье.

При  $rR=15$  и  $\theta_1=45^\circ$  жесткие границы в виде дуги  $AB$  (см. рис. 1, а) или хорды  $AB$  (см. рис. 1, б) имеют значительные волновые размеры. Тогда на этих границах для удаленных от углов точек амплитуды звукового давления должны стремиться к удвоенной амплитуде давления в набегающей плоской волне. Это предположение хорошо согласуется с расчетными данными. Дополнительные сведения о характере распределения давления

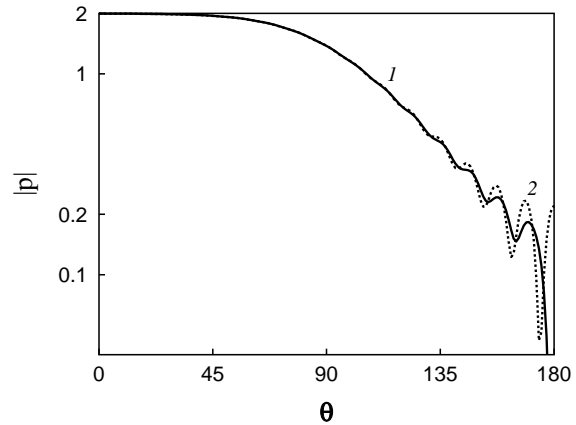


Рис. 3. Распределение амплитуды давления для клиновидной структуры рис. 1, а при  $kR=15$ ,  $\theta_1=177^\circ$ ,  $\theta_0=0^\circ$ ,  $N=40$ ,  $N_2=3$ :  
1 – вдоль окружности радиуса  $r=R$ ,  
2 – на поверхности жесткого цилиндра радиуса  $R$

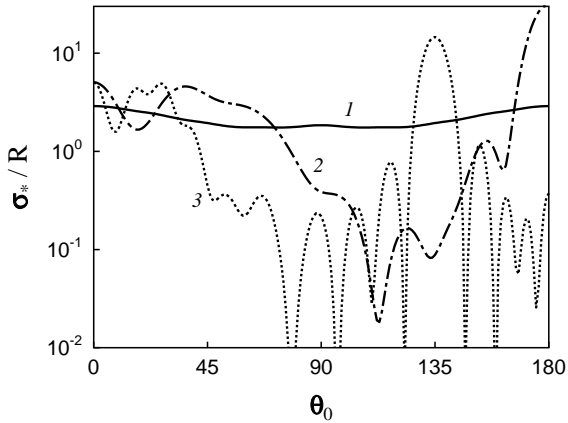
по поверхности рассеивателя были получены при рассмотрении клина с половиной угла раскрыва  $\theta_1=177^\circ$ . По геометрии такой рассеиватель близок к сплошному цилиндру. Сравнение звукового давления на поверхности такого клина и жесткого цилиндра позволяет судить о достоверности построенного решения. На рис. 3 показано распределение амплитуды звукового давления вдоль окружности радиуса  $r=R$  (область I) при  $kR=15$ ,  $\theta_1=177^\circ$ ,  $\theta_0=0$ ,  $N_1=40$ ,  $N_2=3$  (сплошная линия) и вдоль поверхности жесткого кругового цилиндра с волновым радиусом  $kR=15$  (штриховая линия). Как видно из графика, наблюдается хорошее совпадение этих кривых, за исключением дуги в районе угла  $\theta=180^\circ$ .

### 3. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ КЛИНОВИДНОГО ОБЪЕКТА

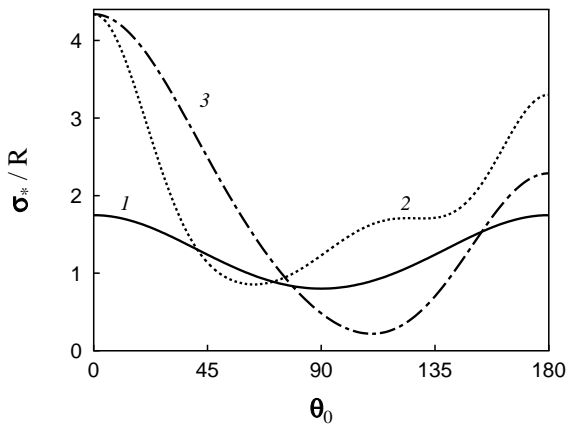
При решении задачи о рассеянии звука препятствием обычно исследуют параметры звукового поля в дальней зоне, где рассеянное поле можно представить в виде расходящейся сферической волны. Для плоской задачи это соответствует расходящейся цилиндрической волне.

Согласно формуле (4), комплексная амплитуда потенциала в рассеянном поле определяется выражением

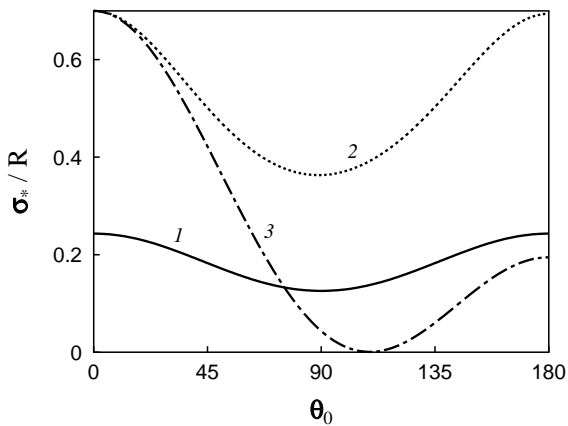
$$\Phi_s = A_0 \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)'}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kR)} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]. \tag{16}$$



a



б



в

Рис. 4. Зависимость сечения рассеяния от угла падения плоской волны  $\theta_0$  для клиновидной структуры рис. 1, а при  $\theta_1 = 45^\circ$ :  
 1 –  $\sigma_s$ , 2 –  $\sigma(\theta=0, \theta_0)$ , 3 –  $\sigma_L$ ;  
 а –  $kR=15$ , б –  $kR=2$ , в –  $kR=0.7$

С учетом асимптотики функции Ханкеля при  $kr \rightarrow \infty$  формула (16) примет вид

$$\Phi_s = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} \left[ \frac{A_0}{H_0^{(1)'}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\pi/2}}{H_n^{(1)'}(kR)} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \right]. \quad (17)$$

Интенсивность рассеянного поля в радиальном направлении определяется известным соотношением

$$I_s = \frac{1}{2} \text{Re} [p_s v_{sr}^*], \quad (18)$$

где  $p_s$  – давление;  $v_{sr}$  – колебательная скорость в радиальном направлении (звездочка означает комплексно сопряженную величину). Поскольку в дальней зоне  $p_s = -i\omega\rho\Phi_s$  и  $v_{sr} = -ik\Phi_s$ , то, согласно формуле (18), для интенсивности  $I_s(\theta, \theta_0)$  рассеянного поля справедливо

$$I_s(\theta, \theta_0) = I_0 \frac{2}{\pi kr} LL^*, \quad (19)$$

где  $I_0 = \omega\rho k/2$  – интенсивность набегающей плоской волны единичной амплитуды;

$$L(\theta, \theta_0) = \frac{A_0}{H_0^{(1)'}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-in\pi/2}}{H_n^{(1)'}(kR)} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)). \quad (20)$$

Напомним, что  $\theta_0$  – угол падения плоской волны, а  $\theta$  – угол, определяющий направление, вдоль которого вычисляется интенсивность рассеянного поля.

Очевидно, мощность  $W_s$  рассеянной волны можно определить, интегрируя выражение (19) по окружности радиуса  $r$ :

$$W_s(\theta_0) = \int_0^{2\pi} I_s(\theta, \theta_0) r d\theta = \frac{2I_0}{\pi k} \int_0^{2\pi} LL^* d\theta. \quad (21)$$

Полученные соотношения позволяют записать полное сечение рассеяния  $\sigma_s$  клиновидного объекта. Оно определяется как отношение мощности рассеянной волны к интенсивности набегающей плоской волны. Тогда

$$\frac{\sigma_s(\theta_0)}{R} = \frac{1}{R} \frac{W_s(\theta_0)}{I_0} = \frac{2}{kR} \left[ 2 \left| \frac{A_0}{H_0^{(1)'}(kR)} \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2 + |B_n|^2}{\left| H_n^{(1)'}(kR) \right|^2} \right]. \quad (22)$$



Ясно, что полное сочетание рассеивания является функцией угла падения плоской волны  $\theta_0$ .

Большой интерес представляет определение интенсивности в волне, рассеянной в заданном направлении (например, в направлении, обратном к направлению падающей волны). Для такого анализа вводится понятие позиционного сечения рассеяния  $\sigma(\theta, \theta_0)$ . Эта величина определяется как отношение мощности фиктивного ненаправленного излучателя, создающего цилиндрическую волну с интенсивностью, равной интенсивности рассеянной волны в заданном направлении  $\theta$ , к интенсивности в набегающей плоской волне. Согласно определению  $\sigma(\theta, \theta_0)$ , с учетом формулы (19) получим

$$\frac{\sigma(\theta, \theta_0)}{R} = \frac{1}{R} \frac{2\pi r I_s(\theta, \theta_0)}{I_0} = \frac{4}{kR} LL^*. \quad (23)$$

Если в соотношении (23) положить  $\theta = \theta_0$ , то получается так называемое сечение обратного рассеяния. Будем обозначать его как  $\sigma_L = \sigma(\theta = \theta_0, \theta_0)$ .

Перейдем к анализу численных результатов. На рис. 4 показаны зависимости трех указанных характеристик рассеяния от угла падения плоской волны  $\theta_0$  на первый клиновидный объект (см. рис. 1, а) с  $\theta_1 = 45^\circ$ . При этом рис. 4, а соответствует волновому размеру  $kR = 15$ , рис. 4, б –  $kR = 2$ , а рис. 4, в –  $kR = 0.7$ . Кривая 1 определяет полное сечение рассеяния  $\sigma_s/R$ , кривая 2 – позиционное сечение рассеяния  $\sigma(\theta = 0, \theta_0)/R$  при угле наблюдения  $\theta = 0$ , кривая 3 – обратное сечение рассеяния  $\sigma_L/R$ . Заметим, что при угле  $\theta_1 = 45^\circ$  волновой размер дуги  $AB$  примерно в 1.57 раза превосходит величину  $kR$ , (т.е. вся граница объекта рис. 1, а состоит из участков примерно одного размера).

С уменьшением  $kR$  наблюдается общая тенденция уменьшения величины полного сечения рассеяния (кривые 1). Так, при  $kR = 15$  полное сечение рассеяния  $\sigma_s/R$  находится в пределах от 1.75 до 2.89. Это соответствует рассеянию на препятствии большого волнового размера с примерно одинаковым миделевым сечением при разных углах падения плоской волны. При  $kR = 2$  имеем  $0.8 < \sigma_s/R < 1.75$ , а при  $kR = 0.7$  наблюдается значительное снижение этой величины:  $0.126 < \sigma_s/R < 0.243$ . Ход кривых 1 на всех трех рисунках является плавным, поскольку поверхности, образующие объект, близки по своим волновым размерам.

Позиционное сечение рассеяния (кривые 2) характеризует интенсивность рассеянной волны в направлении угла  $\theta = 0^\circ$  как функцию угла падения плоской волны  $\theta_0$ . Здесь наблюдается значительный рост тенеобразующего лепест-

ка при увеличении волнового размера  $kR$ . Так, при  $kR = 0.7$  имеем  $\sigma(\theta = 0^\circ, \theta_0 = 180^\circ)/R \approx 0.2$ ; при  $kR = 2 - \sigma(\theta = 0^\circ, \theta_0 = 180^\circ)/R \approx 2.3$ ; при  $kR = 15 - \sigma(\theta = 0^\circ, \theta_0 = 180^\circ)/R \approx 31.7$ . В целом, ход кривых позиционного сечения рассеяния также является достаточно плавным.

Значительный интерес представляет сечение обратного рассеяния (кривые 3). Как видно, для объекта большого волнового размера ( $kR = 15$ ) наблюдается значительная изрезанность кривой в диапазоне углов  $\theta_0 = [80^\circ, 180^\circ]$ . При угле падения  $\theta_0 = 135^\circ$  имеем так называемый “блик”, при котором  $\sigma_L/R = 14.6$ . Это соответствует нормальному падению плоской волны на плоский участок  $OA$  границы клиновидного объекта (см. рис. 1, а). При  $kR = 2$  и  $0.7$  зависимости  $\sigma_L/R$  оказываются достаточно плавными, с наличием экстремумов при  $\theta_0 = 0^\circ$  и  $180^\circ$  (при  $kR = 0.7$  эти экстремумы имеют примерно одну величину).

При значительных волновых размерах рассеивателя для определенных углов отмечается также резкое уменьшение обратного сечения рассеяния, т.е. довольно большой по волновым размерам объект становится неотражающим. Имеется ряд значений угла, для которых наблюдается такой эффект. Интересно также отметить, что в этом случае при облучении объекта со стороны острого угла ( $\theta_0 = 180^\circ$ ) его сечение рассеяния становится значительно меньшим, чем геометрическое сечение. Анализируя качественную картину, можно отметить, что существенная изрезанность кривой для обратного сечения рассеяния является выражением взаимного влияния ребер на поверхности рассеивателя. Эта характерная особенность в структуре рассеянного поля хорошо видна при рассмотрении тонкого клина.

На рис. 5 показаны зависимости сечений рассеяния для первого клиновидного объекта (см. рис. 1, а) с углом  $\theta_1 = 3^\circ$  (волновой размер  $kR = 15$ ). Понятно, что по сравнению со случаем, рассмотренным выше, геометрия клиновидной структуры резко изменилась. Теперь волновая длина дуги  $AB$  (рис. 1, а) примерно в 10 раз меньше  $kR$ . Сравнение полученных кривых с данными, приведенными на рис. 4, выявляет существенные различия. Так, для полного сечения рассеяния  $\sigma_s/R$  (кривые 1) в случае тонкого клина наблюдается существенная зависимость от угла падения плоской волны. Его значение максимально при угле падения  $\theta_0 = 90^\circ$  ( $\sigma_s/R \approx 2$ ) и минимально при  $\theta_0 = 0^\circ$  и  $\theta_0 = 180^\circ$  ( $\sigma_s/R \approx 0.05$ ). По сравнению с рис. 4 значительно уменьшилась величина позиционного сечения рассеяния (кривые 2). Так, при  $kR = 15$   $\sigma(\theta_0 = 0, \theta_0)$  не превышает 0.124. Величина обра-

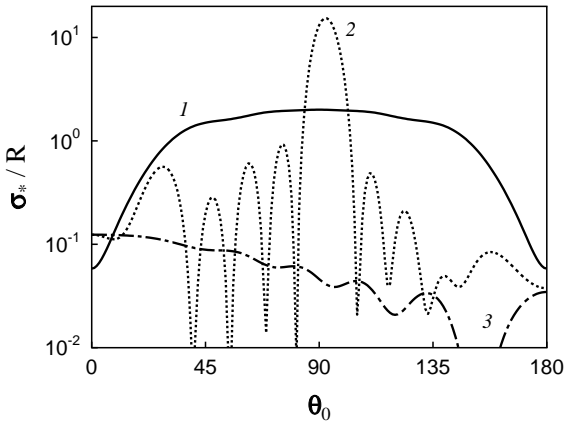


Рис. 5. Зависимости сечения рассеяния от угла падения плоской волны для клиновидной структуры рис. 1, а при  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $kR = 15$ :  
1 –  $\sigma_s$ , 2 –  $\sigma(\theta=0, \theta_0)$ , 3 –  $\sigma_L$

тного рассеяния (кривые 3) имеет ярко выраженный максимум при угле падения  $\theta_0 = 90^\circ$ . С ростом величины  $kR$  сечение обратного рассеяния  $\sigma_L$  в “бликовой” зоне ( $\theta_0 \approx 90^\circ$ ) увеличивается, а сам максимум обозначается более резко.

Различие в характере взаимодействия рассеивания на угловых точках для объектов различной геометрии четко прослеживается при анализе поведения позиционного сечения рассеяния  $\sigma(\theta, \theta_0)/R$ . На рис. 6 показаны его угловые зависимости при  $\theta_0 = 0^\circ$  (см. рис. 6, а) и  $\theta_0 = 180^\circ$  (см. рис. 6, б) для  $kR = 15$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ . Номера кривых соответствуют вариантам клиновидных объектов, для которых проводился расчет. Как видно, при угле падения  $\theta_0 = 0^\circ$  характер зависимостей в диапазоне углов  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  существенно различен (см. рис. 6, а). Так, вблизи угла  $\theta = 0$  (что соответствует обратному рассеянию) величина  $\sigma(\theta=0, \theta_0=0)/R$  для объекта рис. 1, а равна примерно 5, а для объектов рис. 1, б и в – 30 и 27 соответственно. Интересно отметить, что пологий клин и клин с плоским дном имеют практически одинаковые сечения рассеяния для углов  $\theta \leq 10^\circ$ .

При сравнении данных на рис. 6 можно отметить некоторое влияние степени сингулярности (по сути интенсивности вторичных источников на ребрах) на характер изменения позиционного сечения рассеяния. Объект с наиболее слабой сингулярностью (рис. 1, а) характеризуется достаточно плавным изменением этой характеристики при изменении угла наблюдения (кривая 1). Кривые 2 и 3 гораздо более изрезаны. Интересно, что имеется достаточно широкий диапазон углов ( $30^\circ < \theta < 70^\circ$ ), для которых позиционное сечение

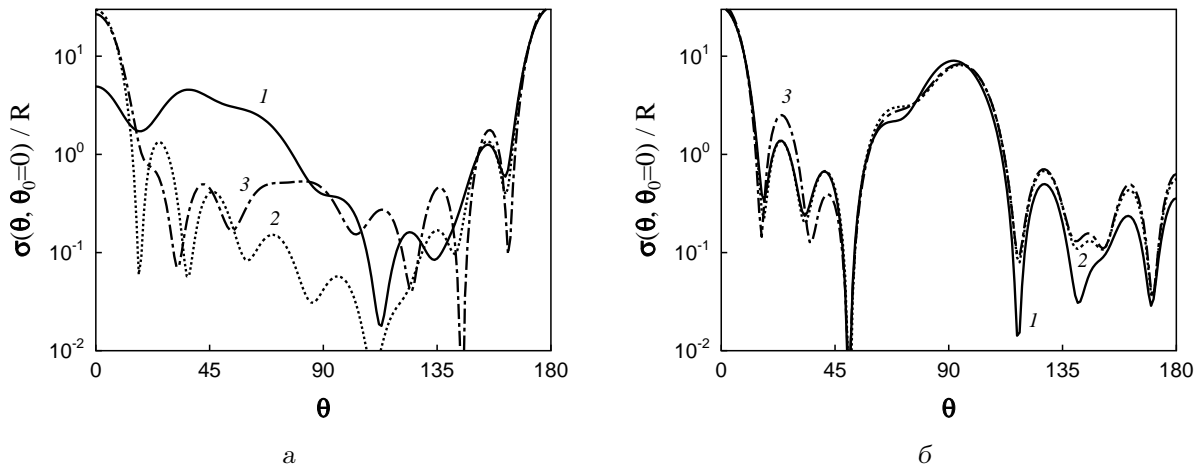
рассеяния объектов с более резко изменяющейся геометрией (рис. 1, б, в) значительно меньше, чем у более гладкого объекта. В зоне тени характер функциональной зависимости и величина сечения рассеяния практически совпадают для всех трех геометрий рассеивателей. Здесь рассеянное поле формируется рассеянием на ребрах. Сечение рассеяния в несколько раз превышает соответствующее геометрическое сечение.

При освещении объектов со стороны острого угла  $\theta_0 = 180^\circ$  они представляются практически неразличимыми для всех углов наблюдения (см. рис. 6, б). В области, близкой к углу зеркального отражения  $\theta = 90^\circ$ , имеется довольно широкий диапазон углов, для которых сечение рассеяния превосходит геометрическое сечение рассеивателя, рассматриваемого под соответствующим углом. В диапазоне углов, близких к  $\theta = 0$ , также наблюдается значительный уровень рассеянной волны. В то же время, при падении волны со стороны вершины клина обратное рассеяние мало. В этом случае сечение рассеяния в несколько раз меньше геометрического сечения.

## ВЫВОДЫ

На основе метода частичных областей получено решение задачи рассеяния волн на клиновидном объекте конечных размеров. В рамках единого подхода удалось построить решения для различных геометрий рассеивателя. Это сделало возможным изучение влияния ребер различного раскрытия на структуру и интегральные характеристики рассеяния. Аналитическое описание волнового поля в рамках применяемого метода позволило избежать использования конечного преобразования Конторовича – Лебедева. Характерной чертой данного подхода является простота процедуры проверки точности решения. Его использование обеспечивает достаточно точные оценки характеристик поля при умеренных объемах вычислительной работы. Даже для относительно больших волновых размеров высокая точность расчетов достигается при решении алгебраических систем с несколькими десятками неизвестных.

Взаимодействие волновых полей, рассеянных на ребрах клина, оказывает существенное влияние на интегральные характеристики рассеяния. Такая характеристика, как эффективное сечение рассеяния, лишь незначительно изменяется за счет наличия угловых точек на поверхности рассеивателя. Однако такие практически важные величины, как сечения позиционного и обратного рассеивания, довольно чувствительны к геометрическим

Рис. 6. Характеристики позиционного сечения рассеяния при  $kR=15$   $\theta_0=180^\circ$ :

1 – рис. 1, а, 2 – рис. 1, б, 3 – рис. 1, в;  
а –  $\theta_0=0^\circ$ , б –  $\theta_0=45^\circ$

особенностям поверхности рассеивателя. Для них характерно наличие углов наблюдения, для которых сечение рассеяния оказывается существенно меньшим, чем геометрические сечения, даже при больших волновых размерах рассеивателей. В этом и выражается специфика рассеяния на объектах с угловыми точками на границах.

1. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraktion // Math. Ann.– 1896.– **47**.– P. 317–374.
2. Biot M. A., Tolstoy I. Formulation of wave propagation in infinite media by normal coordinates with an application to diffraction // J. Acoust. Soc. Amer.– 1957.– **29**, N 3.– P. 381–391.
3. Маложинец Г. Д. Развитие представлений о явлении дифракции // УФН.– 1959.– **69**, N 2.– С. 321–384.
4. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Amer.– 1962.– **52**.– P. 116–130.
5. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции.– М.: Сов. радио, 1962.– 301 с.
6. Ufimtsev P. Ya. Theory of acoustical edge waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– **96**, N 2.– P. 463–474.
7. Daniele V. G. The Wiener–Hopf factorization method for the diffraction by wedges having arbitrary aperture angle // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory.– Kiev, Sept. 10–13, 2002.– P. 87–92.
8. Menounou P., Bush-Vishniac I. J., Blackstock D. T. Directive line source model: A new model for sound diffraction by half planes and wedges // J. Acoust. Soc. Amer.– 2000.– **107**, N 6.– P. 2973–2985.
9. Breinbjerg O. Higher order equivalent edge currents for fringe wave radar scattering by perfectly conducting polygonal plates // IEEE Trans. Antennas Propagat.– 1992.– **40**, N 12.– P. 1543–1554.
10. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 238 с.
11. Nechitaylo S. V., Sazonov A. Z., Sukharevsky O. I. Calculation of electromagnetic field in near field zone of reflector antenna with edge radar absorbing coating // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory.– Kiev, Sept. 10–13, 2002.– P. 437–439.
12. Muser M., Volz R. Improvement of sound barriers using headpieces with finite impedance // J. Acoust. Soc. Amer.– 1999.– **106**, N 6.– P. 3049–3060.
13. Morgan P. A., Hothersall D. C., Chander-Wilde S. N. Influence of shape and absorbing surface – a numerical study of railway barriers // J. Sound Vib.– 1998.– **217**, N 3.– P. 405–417.
14. Tolstoy I. Exact, explicit solution of diffraction by hard sound barriers and seamounts // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– **85**, N 2.– P. 661–669.
15. Гринченко В. Т., Мацьпура В. Т. Излучение звука из открытого конца клиновидного волновода. I. Методы решения и алгоритм расчетов // Акуст. вісн.– 1999.– **2**, N 4.– С. 32–41.
16. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука.– Л.: Судостроение, 1989.– 301 с.
17. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: том 2.– М.: Мир, 1978.– 555 с.