Доповіді
національної
академії наук
України

3 • 2016

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.8 http://dx.doi.org/dopovidi2016.03.026

О. О. Ємець, М. В. Леонова

Полтавський національний педагогічний університет ім. В. Г. Короленка
E-mail: yemetsli@ukr.net

Поліноміальні алгоритми розв'язування деяких задач побудови розкладів приладу для заявок з очікуванням

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Стаття присвячена розробці класифікації задач $Z = (P, R, W, F)$ знаходження розкладу роботи одного приладу із заданими параметрами. Кожне з завдань має додатну вагу $w_i \in W$, час обробки $p_i \in P$ та час очікування $r_i \in R$, коли воно недоступне для обслуговування, а також заданий критерій F оптимальності розкладу. Показана можливість поліноміального за часом знаходження розкладів цих задач. Доведено, що оптимальним розв'язком задач знаходження розкладу роботи одного приладу є упорядкування $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, де R— мультимножина часів очікування завдань.

Ключові слова: задача розкладу для одного приладу, поліноміальний алгоритм.

Задачі вибору черговості обслуговування, які вивчаються в теорії розкладів, мають загальний характер і виникають при різних видах цілеспрямованої діяльності, наприклад, при календарному плануванні виробництва, будівництва, транспортних перевезень, навчання, інформаційно-обчислювальних процесів [1–4]. У загальній постановці вони являють собою процес розподілу деякого скінченного набору подій у часі за умови ресурсних та інших обмежень. Часто задача складання розкладу є складною. Така ситуація виникає через залученість в розклад великої кількості завдань за умови виконання певної системи обмежень. Тому актуальним є дослідження таких задач та розробка методів складання розкладу, особливо пошук поліноміально розв'язних випадків.

Однією з найбільш важливих задач такого типу є задача розкладу для одного і декількох приладів. Вона розглядається зокрема у працях Е. Г. Коффмана , Е. Г. Танаєва, В. В. Шкурби, М. З. Згуровського, О. А. Павлова та ін. [1–4]. Мета розв'язання задачі полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань та ресурсів і накладених на них обмеженнях знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, який оптимізує бажану міру ефективності. Як основні міри ефективності часто визначаються довжина розкладу і середній час виконання завдань.

Стаття присвячена обгрунтуванню поліноміального способу розв'язування деяких задач знаходження розкладу для одного приладу. Це є актуальним, оскільки такі задачі в загальній постановці належить до класу NP-важких задач і реалізація пошуку їх оптимального розв'язку потребує неполіноміальних витрат часу. Поліноміальні алгоритми для певних часткових випадків розглянуті у роботах Е. Г. Коффмана [2], А. А. Лазарева [8] та ін.

Розглянемо одну задачу побудови розкладу для приладу в постановці [5, 6]. Задано множину $J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ номерів завдань. Кожне завдання має додатну вагу w_i, час обробки p_i і час очікування r_i, коли воно недоступне для обслуговування. Задані критерії оптимальності розкладу F. В роботі приладу допускаються переривання. Позначимо загальну задачу пошуку розкладу для одного приладу $Z = (P, R, W, F)$, як упорядковану четвірку, де $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ — мультимножини часу обробки, часу очікування та ваги завдань відповідно. В [5, 6] необхідно мінімізувати сумарно зважений час завершення обслуговування всіх завдань, якщо час обробки є сталим для всіх завдань $p_i = p$.

Класифікація модифікацій задач розкладу для одного приладу. На основі розглянутої задачі з [5, 6] введемо до розгляду деякі задачі побудови розкладу для одного приладу. Виділимо такі задачі:

1. Задача $Z_1 = (P_1, R, W_1, F_1)$ за умови $p_i = 1$, $w_i = 1$ $\forall i \in J_k$, тобто$P = P_1 = \{1, \ldots, 1\}$, $W = W_1 = \{1, \ldots, 1\}$. Цільова функція$F = F_1$ — мінімізація часу завершення останнього завдання.

2. Задача $Z_2 = (P_1, R, W_1, F_2)$. Цільова функція F_2 — мінімізація часу простою приладу.

3. Задача розкладу для одного викладача $Z_3 = (P_1, R, W_1, F_2)$. Цільова функція F_2 — мінімізація часу простою.

4. Задача $Z_4 = (P, R, W_1, F_1)$. Цільова функція F_1 — мінімізація часу завершення останнього завдання.

5. Задача $Z_5 = (P_1, R, W_1, F_3)$. Цільова функція F_3 — мінімізація сумарного часу завершення всіх завдань.

Поставимо мету — дослідити можливість побудови поліноміального алгоритму для розв'язування цих задач.

Задача $Z_1 = (P_1, R, W_1, F_1)$. Нехай маємо множину завдань з номерами J_k. Завдання з номером i має час очікування r_i, коли воно не доступне для обробки, $r_i \geqslant 0$. Тобто ці величини утворюють мультимножину $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$. Оскільки $p = p_1 = 1$, то час p_i обробки завдання з номером i є однаковим для всіх завдань. Маємо $w = w_1$, вага всіх завдань теж є однаковою одиничною — $w_i = 1$. Цільова функція F_1 означає, що необхідно визначити розклад, на якому буде досягатися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Розглянемо допустимий розв'язок — порядок виконання завдань. Тоді, очевидно, кожен допустимий розв'язок такої задачі є впорядкованою k-вибіркою з номерів величин r_i згідно з їх розташуванням в перестановці X з загальної множини перестановок $E_{kn}(R)$ [7]:

$$x \in (x_1, \ldots, x_k) \in E_{kn}(R),$$

де n — кількість різних елементів в R; а x_i — час очікування завдання, що виконується i-м.

Часом початку виконання завдання, що виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення — $y_1 + 1$.

Часом початку виконання завдання, що виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + 1$, тобто $y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\}$, а часом закінчення — $y_2 + 1$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, що виконується k-м, є $y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\}$, часом завершення — $y_k + 1$.

Маємо цільову функцію, що мінімізує час завершення обслуговування $y_k + 1$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання:

$$F_1 = y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\} \to \min$$

за умови виконання наступних співвідношень:

$$y_1 = x_1; \qquad y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\}; \qquad \forall i \in J_k \setminus \{1\}$$

та за умови

$$x \in (x_1, \ldots, x_k) \in E_{kn}(R).$$

Розглянемо умови задачі

$$y_1 = x_1; \qquad y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\} = \max\{x_2, x_1 + 1\};$$
$$y_3 = \max\{x_3, y_2 + 1\} = \max\{x_3, \max\{x_2, x_1 + 1\} + 1\} = \max\{x_3, x_2 + 1, x_1 + 2\}$$

і так далі.

Загальна формула: $y_j = \max\{x_j, x_{j-1} + 1, x_{j-2} + 2, \ldots, x_1 + (j - 1)\}$ $\forall j \in J_k \setminus \{1\}$. Тобто ми довели таке твердження.

Лема. *Умови на допустимий розв'язок (порядок виконання завдань) в задачі Z_1 вигляду*

$$y_1 = x_1; \qquad y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\} \qquad \forall i \in J_k \setminus \{1\}$$

еквівалентні таким:

$$y_1 = x_1; \qquad y_i = \max\{x_i, x_{i-1} + 1, x_{i-2} + 2, \ldots, x_1 + (i - 1)\}.$$

Покажемо, що задачу Z_1 можна розв'язати поліноміальним алгоритмом.

Алгоритм одержання одного із можливих оптимальних розв'язків задачі визначає таке твердження.

Твердження 1. *Оптимальним розв'язком задачі Z_1 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання останнього завдання є упорядкування $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$,*

$$r_{i_1} \leqslant r_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant r_{i_k}, \tag{1}$$

де $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ — мультимножина часів очікування завдань.

Зауваження 1. Оскільки впорядкування елементів, як відомо [9], може бути здійснено поліноміальним алгоритмом, а розв'язок задачі Z_1 до цього зводиться, то твердження 1 доводить поліноміальну розв'язність задачі.

Задача $Z_2 = (P_1, R, W_1, F_2)$. Цільова функція мінімізує суму періодів часу, коли жодне завдання не виконується

$$F_2 = \sum_{j=1}^{k} (y_{j+1} - (y_j + 1)) \to \min,$$

де y_j — час початку завдання з номером j, $j \in J_k$.

Оскільки задача мінімізації часу простою приладу є рівносильною до мінімізації часу завершення останнього завдання, то оптимальний розв'язок задачі Z_2 також можна знайти згідно з твердженням 1.

Задача $Z_3 = (P, R, W_1, F_1)$. Нехай час p_iобробки завдання з номером i не є однаковим для всіх завдань — $P = (p_1, \ldots, p_k)$, $p_i > 0$, $\forall i \in J_k$. Задача: визначити розклад, на якому буде досягатися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Часом початку виконання завдання, яке виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення — $y_1 + p_{i_1}$, $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_k(R)$, $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$, $r_i \geqslant 0$, $\forall i \in J_k$.

Часом початку виконання завдання, яке виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + p_{i_1}$, тобто $y_2 = \max\{x_2, y_1 + p_{i_1}\}$, а часом закінчення — $y_2 + p_{i_2}$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, яке виконується k-м, є $y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + p_{i_{k-1}}\}$, часом завершення — $y_k + p_{i_k}$.

Маємо цільову функцію, яка мінімізує час завершення обслуговування $y_k + p_{i_k}$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання:

$$F_1 = y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + p_{i_{k-1}}\} \to \min.$$

З іншого боку в задачі Z_3 час завершення останнього завдання (або цільову функцію) можна розглядати у такому вигляді:

$$F_1 = r_1 + \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{j=1}^{k-1} z_j, \qquad (2)$$

де r_1 — час початку виконання першого завдання розв'язку; $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i$ — сума всіх p; $\sum z_j$ — сума усіх простоїв пристрою.

Простої розраховуються за формулами:

$$z_1 = \max\{0; r_2 - p_1 - r_1\};$$

$$z_2 = \max\left\{0; r_3 - \sum_{i=1}^{2} p_i - r_1 - z_1\right\};$$

....

$$z_{k-1} = \max\left\{0; r_k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i - r_1 - \sum_{j=1}^{k-2} z_j\right\}.$$

Твердження 2. *Якщо у розв'язку* $X = (r_1, \ldots, r_{k-1}, r_k)$ *простій* $z_{k-1} > 0$, *то значення цільової функції обчислюється за формулою* $F_1 = r_k + p_k$.

Твердження 3. *Оптимальним розв'язком задачі* Z_3 *знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання останнього завдання є упорядкування* $\sigma = (1, \ldots, k)$ *завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок* $X = (r_1, \ldots, r_k) \in E_{kn}(R)$,

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_k, \qquad (3)$$

де $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ *— мультимножина часу очікування завдань.*

Задача $Z_4 = (P_1, R, W_1, F_3)$. Нехай задача полягає у тому, що потрібно мінімізувати не час початку останнього завдання, а суму часу завершення всіх завдань. Оскільки час завершення на 1 більше часу початку, то це еквівалентно мінімізації суми часу початку. Тобто цільова функція має вигляд

$$F_3 = x_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \max(x_{j+1}; y_j + 1) \to \min, \tag{4}$$

де x_1 — час початку виконання завдання, що виконується першим, $\max\{x_{j+1}; y_j + 1\}$ — час початку виконання j-го завдання.

$X \in E_{kn}(R)$.

Твердження 4 . *Оптимальним розв'язком задачі Z_4 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією сумарного часу завершення всіх завдань є упорядкування $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів перестановок $X = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, $r_{i_1} \leqslant r_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant r_{i_k}$.*

Таким чином, в статті показано, що упорядкування часу очікування дає оптимальний розклад в розглянутих задачах $Z_1 - Z_4$, а отже це — ефективний спосіб розв'язування таких задач поліноміальним алгоритмом.

Цитована література

1. *Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В.* Теория расписаний. – Москва: Наука, 1975. – 360 с.
2. *Коффман Э. Г.* Теория расписаний и вычислительные машины. – Москва: Наука, 1984. – 336 с.
3. *Танаев В. С., Шкурба В. В.* Введение в теорию расписаний. – Москва: Наука, 1975. – 257 с.
4. *Згуровский М. З., Павлов А. А.* Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. – Киев: Наук. думка, 2010. – 573 с.
5. *Шерешик Н. Ю.* Полиэдральные свойства задачи обслуживания различных требований одним прибором "Тезисы докл. XVI Байкальской Междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 96.
6. *Brucker P., Knust S.* Complexity Results for Scheduling Problems. Режим доступу: www // mathematik. uni-osnabrueck. de/research/OR/class.
7. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Інститут систем досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
8. *Лазарев А. А.* Решение NP-трудной задачи теории расписаний минимизации суммарного запаздывания // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 6. – С. 1087–1098.
9. *Кнут Д.* Искусство программирования. Т. 3. Сортировка и поиск. – Москва: ИД "Вильямс", 2000. – 824 с.

References

1. *Konvey R. V., Maksvell V. L., Miller L. V.* Scheduling theory. Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
2. *Koffman E. G.* Computers and job-shop scheduling theory. Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
3. *Tanaev V. S., Shkurba V. V.* Introduction to the theory of schedules, Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
4. *Zgurovskiy M. Z., Pavlov A. A.* Decision making in network systems with limited resources: Monograph. Kiev, Nauk. dumka, 2010 (in Russian).
5. *Shereshik N. Yu.* Polyhedral properties maintenance task of different requirements with one device. (Theses of reports XVI Baikal International School-Seminar "Optimization methods and their applications"). Irkutsk, ISEM SO RAN, 2014 (in Russian).

6. *Brucker P., Knust S.* Complexity Results for Scheduling Problems. Available at: www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.
7. *Stoyan Yu. G., Emets O. O.* Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization. Kiev, Research Institute of Education, 1993 (in Ukrainian).
8. *Lazarev A. A.* J. of Numerical Math. and Math. Phys., 2007: 1087–1098 (in Russian).
9. *Knut D.* Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and searching, Moscow, "Vilyams", 2000 (in Russian).

Надійшло до редакції 30.06.2015

О. А. Емец, М. В. Леонова

Полтавский национальный педагогический университет им. В. Г. Короленко

E-mail: yemetsli@ukr.net

Полиномиальные алгоритмы решения некоторых задач о построении разложений для прибора для заявок с ожиданием

Статья посвящена разработке классификации задач $Z = (P, R, W, F)$ нахождения расписания работы одного прибора с заданными параметрами. Каждое из заданий имеет положительный вес $w_i \in W$, время обработки $p_i \in P$ и время $r_i \in R$ ожидания, когда оно недоступно для обслуживания, а также заданный критерий F оптимальности расписания. Показана возможность полиномиального по времени нахождения расписаний этих задач. Доказано, что оптимальным решением задач нахождения расписания работы одного прибора является упорядочение $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ заданий по упорядочению по неубыванию элементов перестановок $X = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$, R— мультимножество времен ожидания заданий.

Ключевые слова: задача расписания для одного прибора, полиномиальный алгоритм.

O. O. Iemets, M. V. Leonova

V. G. Korolenko Poltava National Pedagogical University

E-mail: yemetsli@ukr.net

Polynomial algorithms of solution for some problems of construction of the timetables of a device for demands with waiting

The article is devoted to the development of a classification of tasks $Z = (P, R, W, F)$ of finding the timetable of one device with the given parameters. Each of the tasks has a positive weight $w_i \in W$, processing time $p_i \in P$, and waiting time $r_i \in R$, if it is not available for the service, and a given criterion F of optimal schedule. The possibility of a scheduling polynomial in the time for these tasks is shown. It is proved that the optimal solution of the tasks of scheduling a device is the nondecreasing ordering $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ of the elements of permutations $X = (r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}) \in$ $\in E_{kn}(R)$, R is a multiset of waiting times of tasks.

Keywords: task of scheduling for a single device, polynomial algorithm.