

УДК 536.24

**А. О. Костиков**, д-р техн. наукИнститут проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: kostikov@ipmach.kharkov.ua)**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ  
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЗА СЧЕТ УЧЁТА  
АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИСКОМЫХ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ**

*Рассмотрены вопросы повышения точности решения геометрических обратных задач теплопроводности. Показано, что априорная информация об искомых геометрических характеристиках приводит к дополнительным ограничениям на определяемые в процессе решения геометрические параметры, что позволяет существенно сократить область их допустимых значений и повысить точность решения. На примере модельной задачи по идентификации формы объекта продемонстрирована эффективность данного подхода.*

*Розглянуто питання поліпшення точності розв'язку геометричних обернених задач теплопровідності. Показано, що апріорна інформація про шукані геометричні характеристики приводить до додаткових обмежень на геометричні параметри, які знаходяться під час розв'язання. Це дозволяє суттєво скоротити область їх допустимих значень і поліпшити точність розв'язку. На прикладі модельної задачі з ідентифікації форми об'єкта продемонстрована ефективність цього підходу.*

**Введение**

Обратные задачи теплопроводности (ОЗТ) [1, 2], в том числе и геометрические [3, 4], в большинстве случаев приходится рассматривать и решать в экстремальной постановке, т. е. искать решение в результате минимизации целевого функционала [1, 2, 5, 6]. Поскольку ОЗТ являются, как правило, некорректно поставленными задачами, что обычно выражается в нарушении условия устойчивости решения, то при их рассмотрении приходится применять различные приёмы регуляризации, что приводит к некоторой форме отбора допустимых решений. Если в задаче присутствует некоторая априорная информация об искомых условиях однозначности, то её также можно использовать в процессе отбора допустимых решений.

**Сужение области допустимых решений за счёт использования априорной информации об искомых геометрических характеристиках**

Как нами было показано ранее [7], параметризация искомой геометрической информации, то есть выделение среди искомой геометрической информации одной или нескольких скалярных величин  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , которые могут меняться в соответствии с условиями задачи, позволяет в общем случае сформулировать геометрическую ОЗТ следующим образом: найти минимум некоторого целевого функционала  $J(g)$  на множестве допустимых решений задачи ( $g \in G_p$ ).

В задачах идентификации целевой функционал  $J$  строится как невязка операторного уравнения

$$Ag = f, \quad g \in G, \quad f \in F,$$

где  $g$  – совокупность искомых геометрических параметров;  $f$  – наблюдаемые характеристики объекта;  $G$  и  $F$  – метрические пространства, которым принадлежат элементы  $g$  и  $f$ ;  $A$  – оператор, действующий из  $G$  в  $F$ , формализующий совокупность операций, определенных ис-

ходной математической моделью явления и условиями однозначности и устанавливающий причинно-следственные связи между искомыми и входными (наблюдаемыми) величинами.

В оптимизационных геометрических ОЗТ вид целевого функционала определяется заданным по условию задачи критерием оптимальности.

В обоих видах задач область множество допустимых решений  $G_p$  строится исходя из ограничений трех типов, которые накладываются на искомые параметры  $g$ . К первому типу относятся ограничения, вызванные конструктивными или технологическими особенностями, экономическими соображениями и т. п., которые могут быть математически формализованы в виде неравенств

$$\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n) \leq 0 \quad (l = 1, \dots, m_g),$$

определяющих в пространстве  $G$  область  $G_l$ .

Ограничения второго типа вызваны необходимостью соблюдения определённого температурного режима. Фактически такие ограничения накладываются на температурное поле, но так как последнее зависит от геометрии объекта, которая определяется значениями геометрических параметров, то в пространстве  $G$  можно выделить область  $G_\phi$ , сформированную из всех допустимых в данном смысле значений вектора  $g$ .

Ограничения третьего типа вводятся с целью регуляризации решения [8] и устанавливают для каждого геометрического параметра допустимый диапазон изменения его значения

$$g_{i\min} \leq g_i \leq g_{i\max}, \quad i = 1, \dots, n,$$

что в совокупности задаёт в пространстве  $G$  гиперпараллелепипед  $G_r$ .

Таким образом, область допустимых решений может быть записана как

$$G_p = G_l \cap G_\phi \cap G_r. \quad (1)$$

Если в задаче имеется априорная информация об искомым геометрических характеристиках, то её можно формализовать в виде некоторых дополнительных ограничений на искомые параметры  $g$ , определяющих в пространстве  $G$  множество  $G_a$ . В этом в выражении (1) трансформируется в

$$G_p = G_l \cap G_\phi \cap G_r \cap G_a, \quad (2)$$

что приводит в большинстве случаев к сокращению множества допустимых решений  $G_p$ .

Как известно, геометрические ОЗТ, являются многоэкстремальными с огромным числом локальных минимумов [9], которые полностью перебрать в процессе решения не представляется возможным. Вследствие этого процесс минимизации целевого функционала приходится останавливать на одном из локальных минимумов, принимая его как приближение глобального минимума. Сужение области допустимых решений с (1) до (2) приводит к уменьшению числа локальных минимумов, в результате чего повышается вероятность того, что локальный минимум, на котором будет остановлен процесс решения, будет более точным приближением искомого глобального минимума целевого функционала. Иными словами, учёт априорной информации в виде (2) является не только дополнительным регуляризирующим фактором, но и способен повысить точность решения геометрической ОЗТ.

### **Повышение точности идентификации неизвестной границы объекта за счёт учёта априорной информации**

В качестве примера применения вышеописанного подхода рассмотрим задачу, которая довольно часто встречается среди задач определения формы и положения границы области, а именно, идентификацию фронта фазового превращения, когда часть пространства, занимаемая жидкой фазой, не включается в расчётную область, а процесс теплообмена рассматривается только в твёрдой фазе. В этом случае неизвестная граница  $\Gamma$  является фронтом фазового перехода и на ней задаётся постоянная температура – температура фазового перехода.

Будем считать, что рассматриваемое тело имеет форму параллелепипеда, верхняя часть которого удалена (рис. 1), а поверхность  $EFGH$  неизвестна. Проекция этой поверхности на плоскость  $xOz$  образует прямоугольник  $ABCD$ .

Для простоты будем считать, что твёрдая фаза имеет настолько большую теплопроводность и низкую теплоёмкость, что процесс является квазистационарным и скоростью движения фазового фронта в уравнении теплопроводности можно пренебречь. Тогда процесс теплопроводности описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 T(x, y, z) = 0.$$

с граничными условиями

$$T(x, y, z)|_{\Gamma} = T_{\Gamma},$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = q,$$

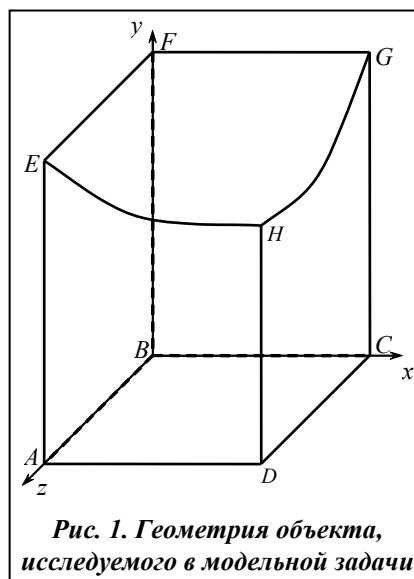


Рис. 1. Геометрия объекта, исследуемого в модельной задаче

где  $\Gamma$  – неизвестная граница;  $T_{\Gamma}$  – заданная на ней температура фазового перехода;  $\Sigma$  – известная часть границы (нижняя и боковые грани рассматриваемого объекта);  $\nu$  – внешняя нормаль к  $\Sigma$ ;  $q$  – заданная плотность теплового потока на известной границе.

Решение данной задачи будем проводить согласно предложенной нами методике решения задач по идентификации формы объекта [10, 11], в которой расчётная область  $\Omega$ , соответствующая рассматриваемому объекту, строится в результате пересечения двух областей: неизменной в процессе решения ОЗТ области  $\Omega_1$  и изменяющейся в соответствии с выбором значений искомым геометрических параметров области  $\Omega_2$ . Геометрическими параметрами  $g_i$  в данном случае являются координаты узловых точек, по которым строится сплайновое представление искомой границы, а для решения задачи теплопроводности используется вариационный метод совместно с методом  $R$ -функций, что позволяет автоматически учитывать изменение геометрии объекта.

Для введения узловых точек на неизвестной границе построим в двумерной области  $ABCD$  равномерную сетку  $\{(x_i, z_i) : x_i = ih_x, z_j = jh_z, i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_z\}$ . Если из точек  $(x_i, z_i)$  на плоскости  $xOz$  провести луч, параллельный оси  $Oy$ , то его пересечение с неизвестной границей даст точку  $M_{ij} = (x_i, y_{ij}, z_j)$ , координата  $y$  которой неизвестна. Все такие точки и будем рассматривать в качестве узловых.

Неизменяемая в процессе решения ОЗТ область  $\Omega_1$  ограничена прямоугольником  $ABCD$  и боковыми гранями параллелепипеда, продолженными по оси  $Oy$  до бесконечности. Согласно [12, 13] функция  $\omega_1$ , описывающая область  $\Omega_1$ , может быть построена в виде

$$\omega_1 = \frac{x(L_x - x)}{L_x} \wedge_{\alpha} \frac{z(L_z - z)}{L_z} \wedge_{\alpha} y,$$

где  $L_x, L_z$  – размеры рассматриваемого параллелепипеда в соответствующих направлениях;  $\wedge_{\alpha}$  – оператор  $R$ -конъюнкции (см. [12, 13]).

Уравнение неизвестной границы запишем так:

$$y = \gamma(x, z) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_z} c_{ij} \gamma_{ij}(x, z), \tag{3}$$

где в качестве базисных функций  $\gamma_{ij}$  можно выбрать полиномиальные кубические сплайны, построенные на сетке  $\{(x_i, z_i)\}$ .

Функция  $\omega_2$ , описывающая изменяемую в процессе решения ОЗТ область  $\Omega_2$ , может быть записана как

$$\omega_2(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_z} c_{ij} \gamma_{ij}(x, z) - y.$$

Таким образом, функция  $\omega$ , описывающая область  $\Omega$ , имеет вид

$$\omega = \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2 = \frac{x(L_x - x)}{L_x} \wedge_{\alpha} \frac{z(L_z - z)}{L_z} \wedge_{\alpha} y \wedge_{\alpha} \left( \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_z} c_{ij} \gamma_{ij}(x, z) - y \right).$$

Согласно [12, 13] решение ПЗТ можно записать в виде

$$T(x, y, z) = \sum_{k=0}^N C_k \left\{ \omega_2 \psi_k - \omega \left[ \frac{\partial(\omega_2 \psi_k)}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_2 \psi_k)}{\partial y} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial(\omega_2 \psi_k)}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right] \right\} + T_{\Gamma} + \omega q$$

или

$$T(x, y, z) = \sum_{k=0}^N C_k X_k + T_{\Gamma} + \omega q, \tag{4}$$

где  $\psi_k(x, y, z)$  – некоторые заданные базисные функции;  $X_k(x, y, z)$  – известные функциональные зависимости, определяемые выражениями в фигурных скобках.

Неизвестные коэффициенты  $C_k$  находятся методом Ритца [14] в результате решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^N C_k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial X_k}{\partial x} \frac{\partial X_s}{\partial x} + \frac{\partial X_k}{\partial y} \frac{\partial X_s}{\partial y} + \frac{\partial X_k}{\partial z} \frac{\partial X_s}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\Sigma} X_s q d\sigma, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

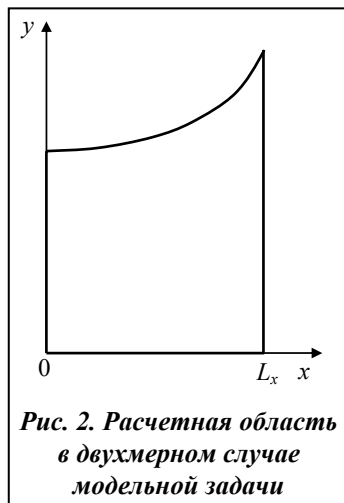
В процессе решения ОЗТ происходит целенаправленный поиск параметров границы  $y_{ij}$ . На каждой итерации по текущим значениям этих геометрических параметров при помощи решения системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_z} c_{ij} \gamma_{ij}(x_i, z_j) = y_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_z$$

находятся коэффициенты  $c_{ij}$  в уравнении неизвестной границы (3). В свою очередь, значения коэффициентов  $c_{ij}$  определяют функции  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega$ , а следовательно, и функции  $X_k$  в представлении температурного поля (4).

Для проведения многовариантных численных исследований данная задача решалась в двухмерном случае – координата  $z$  была исключена из рассмотрения и расчетная область имела вид не усеченного параллелепипеда, а усеченного прямоугольника (рис. 2).

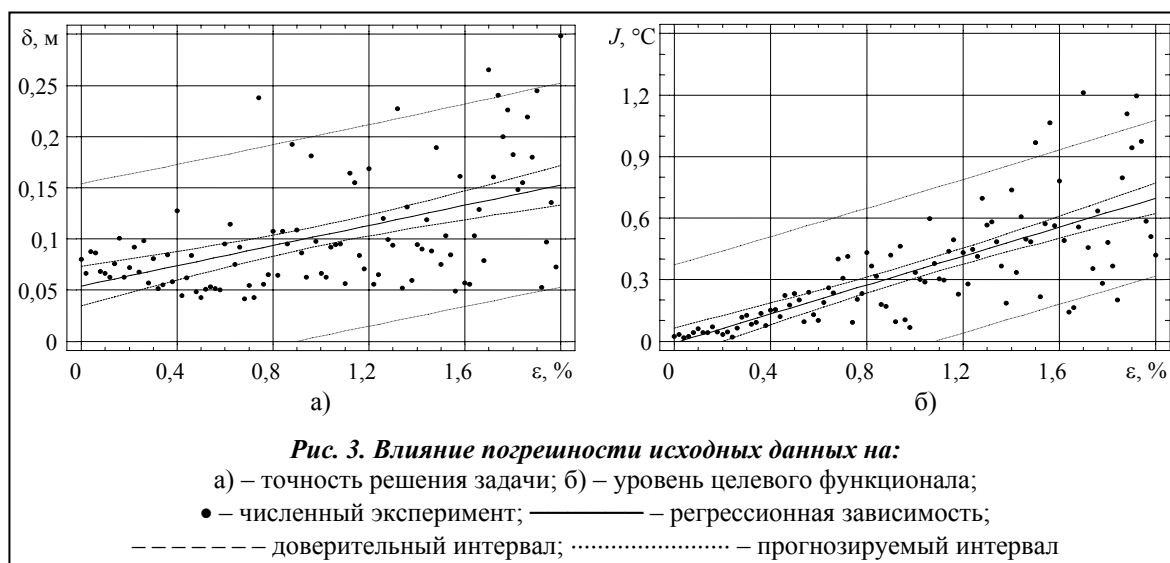
Все расчёты проводились для следующих значений параметров задачи:  $L_x = 1,0$  м;  $\lambda = 10$  Вт/(м·К), на боковых сторонах прямоугольника  $q = 0$  Вт/м<sup>2</sup>, на нижней стороне



**Рис. 2. Расчетная область в двухмерном случае модельной задачи**

$q = 50000$  Вт/м<sup>2</sup>;  $T_{\Gamma} = 0$  °С. Целевой функционал невязки строился по семи точкам измерения температуры, равномерно расположенным в пределах расчетной области на прямой  $y = 0,4$ . Для моделирования измерений в данных точках в процессе численного эксперимента решалась прямая задача с известным расположением границы  $\Gamma$ .

В ходе расчетных исследований было рассмотрено влияние погрешности измерений на точность получаемых решений. Для этого измеренные температуры моделировались следующим образом: к величинам, полученным в результате решения прямой задачи, добавлялись случайные погрешности, распределённые по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением, равным произведению заданной относительной погрешности и уровня полученных в результате расчёта температур. В данной задаче искомая граница  $\Gamma$  представляла собой



кривую  $y = \exp(2x/3)$ . Все расчёты проводились для десяти базисных функций  $\psi_k(x, y)$ , в качестве которых использовались степенные функции.

Для оценки точности решения геометрической ОЗТ в каждой узловой точке  $(x_i, y_i)$  искомой границы  $\Gamma$  рассматривалось расстояние  $\delta_i$  между её найденным и фактическим положением. В качестве меры точности решения была взята максимальная величина этого расстояния по всем узловым точкам  $\delta = \max \delta_i$ . На рис. 3 приведены регрессионные зависимости точности решения  $\delta$  и достигнутого уровня целевого функционала невязки  $J$  от относительной погрешности измерений температуры.

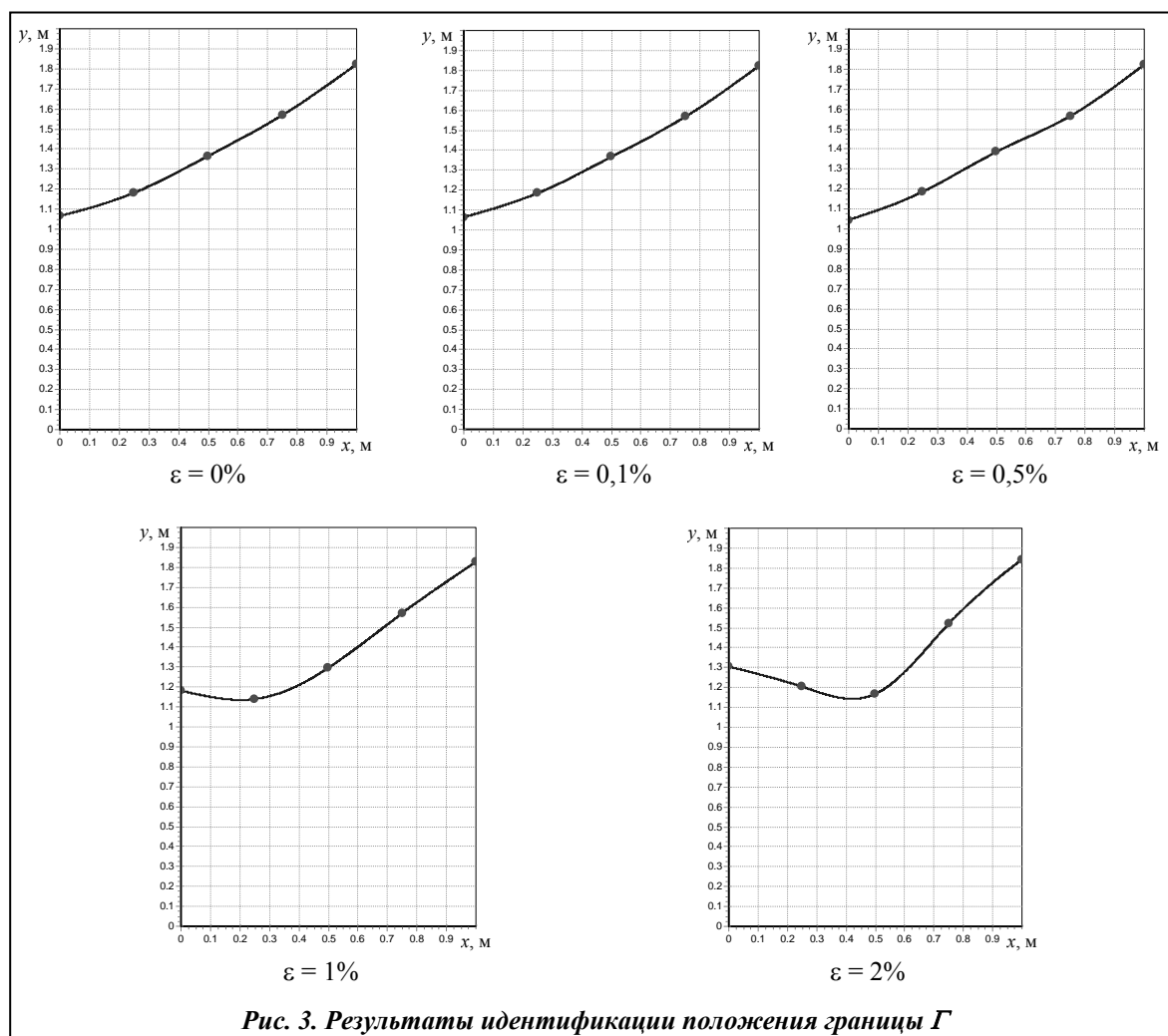
При этом были получены следующие оценки коэффициента корреляции между величинами  $\delta$  и  $\epsilon$ : точечная оценка коэффициента корреляции  $r_{\delta,\epsilon} = 0,52$ ; доверительный интервал  $0,39 < r_{\delta,\epsilon} < 0,63$  на уровне значимости 0,1. Кроме того, проверка при помощи критерия Стьюдента статистической гипотезы о равенстве коэффициента корреляции нулю показала, что данную гипотезу следует отклонить. Иными словами, существует достаточно сильное влияние погрешности измерения температуры на точность идентификации границы области.

Графическое изображение найденного положения границы  $\Gamma$  для некоторых значений относительной погрешности измерения температуры приведено на рис. 4.

Следует отметить также тот факт, что при больших относительных погрешностях измерений (более  $\sim 0,7\%$ ) найденная зависимость  $y = \gamma(x)$  уже перестает быть монотонно возрастающей (см. рис. 4), в отличие от фактического уравнения искомой границы  $y = \exp(2x/3)$ . Поэтому, если заранее известно, что искомая граница описывается монотонной функцией  $y = \gamma(x)$ , целесообразно это использовать в качестве априорной информации в процессе решения ОЗТ и при минимизации целевого функционала  $J$  учитывать дополнительные ограничения, налагаемые на искомые координаты узловых точек

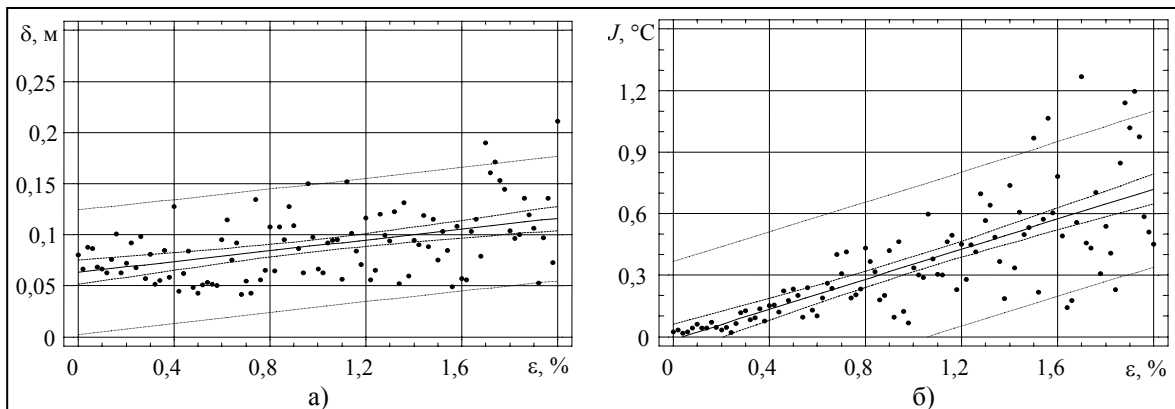
$$y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n. \tag{5}$$

В таблице для некоторых значений погрешности  $\epsilon$  показано влияние на получаемый результат учёта дополнительных ограничений (5). Заметим, что, несмотря на то, что найденное минимальное значение функционала  $J$  в случае учёта условия монотонности получается больше, чем без использования ограничения (5), точностной показатель  $\delta$  улучшается. Регрессионные зависимости точности решения  $\delta$  и достигнутого уровня целевого функционала невязки  $J$  от погрешности  $\epsilon$  представлены на рис. 4. Сравнение идентифицированного положения границы в случае учёта и неучёта ограничений (5) отображено на рис. 5.



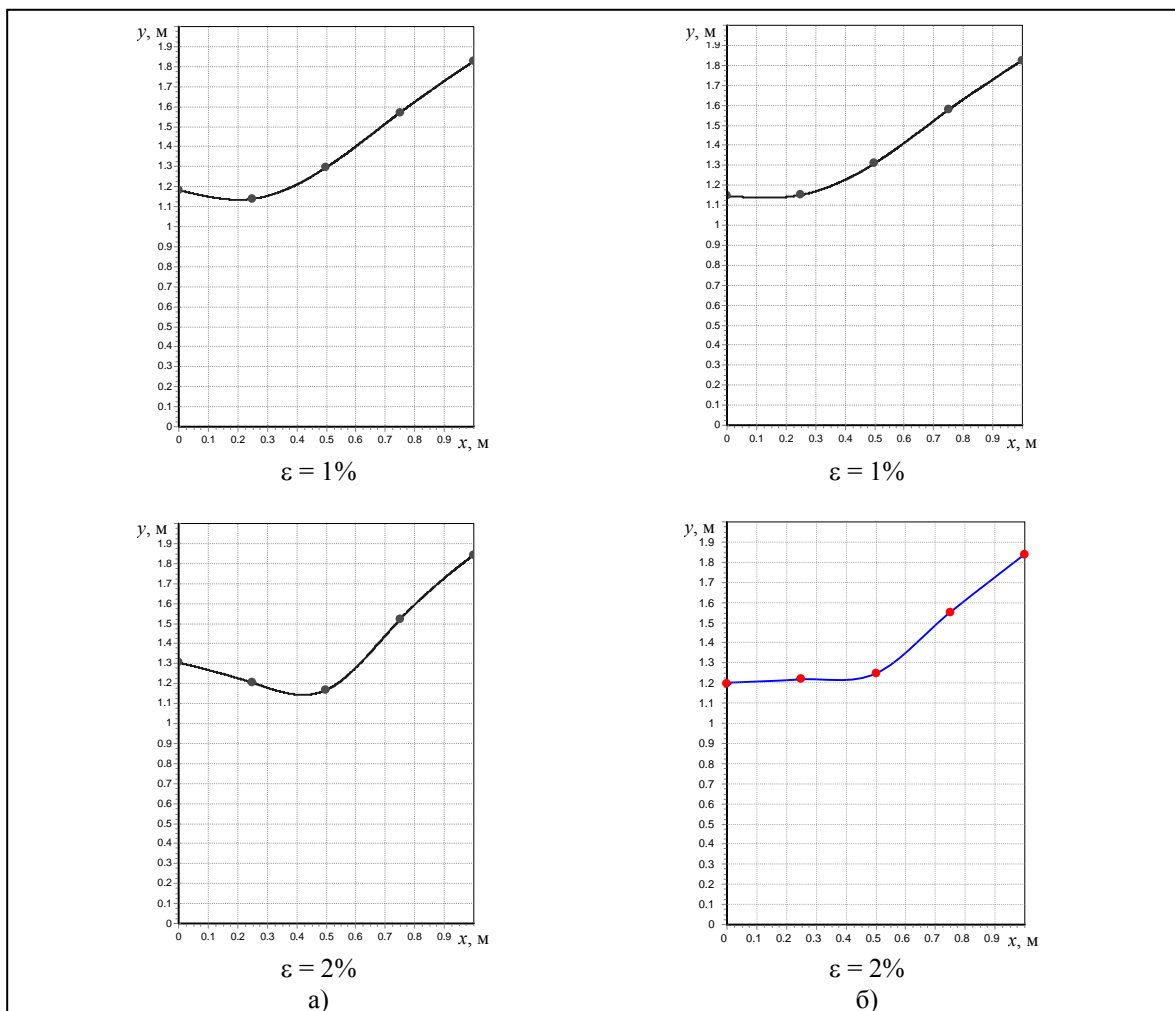
*Влияние учета априорной информации о монотонности искомой функции  $\chi(x)$  на результаты идентификации границы области*

$\varepsilon, \%$	Без учёта ограничений (5)		С учётом ограничений (5)	
	$\delta, \text{ м}$	$J, \text{ }^\circ\text{C}$	$\delta, \text{ м}$	$J, \text{ }^\circ\text{C}$
0,74	0,2378	0,092	0,1346	0,189
0,88	0,1926	0,169	0,1278	0,202
1,00	0,1811	0,106	0,1497	0,123
1,12	0,1645	0,299	0,1516	0,301
1,20	0,1687	0,431	0,1163	0,452
1,32	0,2271	0,581	0,1224	0,640
1,48	0,1893	0,486	0,1152	0,532
1,58	0,1615	0,562	0,1082	0,604
1,66	0,1291	0,165	0,1150	0,176
1,70	0,2653	1,212	0,1896	1,269
1,80	0,1827	0,482	0,1039	0,538
1,90	0,2447	0,943	0,1061	1,019
2,00	0,2983	0,420	0,2109	0,451



**Рис. 4. Влияние погрешности исходных данных в случае учёта априорной информации о монотонности функции  $\gamma(x)$  на:**

а) – точность решения задачи; б) – уровень целевого функционала;  
 ● – численный эксперимент; — — — — — регрессионная зависимость;  
 - - - - - доверительный интервал; ..... прогнозируемый интервал



**Рис. 5. Результаты идентификации положения границы  $\Gamma$ :**

а) – без учёта априорной информации о монотонности функции  $\gamma(x)$   
 б) – с учётом априорной информации о монотонности функции  $\gamma(x)$

**Выводы**

Показано, что учёт априорной информации об искомым геометрических характеристиках приводит к сужению области допустимых решений ОЗТ, что является не только дополнительным регуляризирующим фактором, но и позволяет повысить точность получаемых решений. Получены ограничения на искомые геометрические параметры в случае задачи идентификации неизвестной границы объекта, когда известна информация о монотонности функции, описывающей эту границу. На модельных примерах проиллюстрировано повышение точности решения данной задачи за счёт учёта априорной информации.

**Литература**

1. *Мацевитый Ю. М.* Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002. – Т. 1. Методология. – 2002. 408 с.
2. *Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. *Мацевитый Ю. М.* Геометрические обратные задачи теплопроводности. Постановки и методы решения / Ю. М. Мацевитый // Электрон. моделирование. – 1999. – Т. 21, № 1. – С. 3–10.
4. *Мацевитый Ю. М.* Геометрические обратные задачи теплопроводности – современное состояние проблемы / Ю. М. Мацевитый, А. О. Костиков // Пробл. машиностроения. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 23–36.
5. *Алифанов О. М.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
6. *Коздоба Л. А.* Методы решения обратных задач теплопереноса / Л. А. Коздоба, П. Г. Круковский. – Киев: Наук. думка, 1982. – 360 с.
7. *Костиков А. О.* Единый методологический подход к постановке и решению геометрических обратных задач теплопроводности / А. О. Костиков // Пробл. машиностроения. – 2004. – Т. 7, № 4. – С. 52–60.
8. *Костиков А. О.* Получение устойчивых решений геометрических обратных задач теплопроводности за счет параметризации искомым характеристик / А. О. Костиков // Пробл. машиностроения. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 39–44.
9. *Костиков А. О.* Математические аспекты решения геометрических обратных задач теплопроводности: проблемы и пути их решения / А. О. Костиков, Ю. М. Мацевитый // Пробл. машиностроения. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 27–34.
10. *Костіков А. О.* Методика визначення місцеположення границі двовимірної області за допомогою розв'язання геометричної оберненої задачі теплопровідності / А. О. Костіков // Пробл. машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 24–32.
11. *Мацевитый Ю. М.* Некоторые подходы к постановке и решению обратных задач теплопроводности / Ю. М. Мацевитый, С. Ф. Лушпенко, А. О. Костиков // Тепловые процессы в технике. – 2009. – Т. 1, № 5. – С. 186–194.
12. *Рвачев В. Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
13. *Рвачев В. Л.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 139 с.
14. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука 1970. – 511 с.

Поступила в редакцию  
13.12.12