

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ХВИЛЬОВОГО СПЕКТРУ ПУЧКОВО-ПЛАЗМОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ

П.В. Турбін

*Науковий фізико-технологічний центр МОН та НАН України (Харків)  
Україна*

Надійшла до редакції 05.12.2006

Розглядається динаміка плазмо-пучкової нестійкості з врахуванням широкого спектру збудження ленгмюрівських коливань. Встановлено, що на початковій стадії збуджуються коливання близькі до резонансного з інкрементами, які витікають з лінійної теорії. Далі, із затримкою близько десяти зворотних інкрементів наростають коливання на частотах кратних резонансній. Після цього відбувається перерозподіл енергії на всьому спектрі й установа практично рівномірного розподілу енергії за частотами (зі слабо вираженим максимумом на резонансній частоті) при часах порядку 30 зворотних інкрементів.

### ВСТУП

Проблема створення джерел когерентного електромагнітного випромінювання з високим коефіцієнтом корисної дії та широким діапазоном перебудови частот, що генеруються, може бути вирішена шляхом застосування пучково-плазмових систем.

Ця ідея висловлена давно [1, 2], але до нинішнього часу не знайдена достатньо реалістична схема її реалізації [3 – 5]. В значній мірі такий стан зумовлений великою кількістю параметрів, властивих середовищу, яким є, навіть в ідеалізованому вигляді (за умов нехтування обмеженістю та нелінійними ефектами), пучково-плазмова система. До них можна віднести, наприклад, показник ступеню немоноенергетичності частинок пучка і плазми, різноманітної природи дисипативні ефекти, властиві системі в цілому, або взаємодіючим підсистемам (пучку і/або плазмі).

Наведені вище характеристики здатні призводити до істотної зміни динаміки пучково-плазмової взаємодії. Так, наприклад, гідродинамічна пучкова нестійкість набуває резистивного характеру, а з нею і відповідні інкремент та смуга нестійких частот, якщо ефективна частота зіткнень у плазмі перевищує максимальний інкремент пучкової гідродинамічної нестійкості [6]. Для електронних пучків з порівняно невеликим тепловим відхиленням, дисипація в плазмі може взагалі призводити до зриву нестійкості [7, 8].

При дослідженні взаємодії електронних пучків з плазмою, як правило, ідеалізують не

лише взаємодіючі підсистеми, але й спектр існуючих в початковий момент електромагнітних хвиль. Прикладом цьому може служити монохроматичний (одномодовий) опис, справедливий за умови достатньо малих амплітуд нерезонансних збурень [9, 10]. В протилежному випадку монохроматичний опис не може бути застосований і тоді виникає необхідність досліджувати задачу про взаємодію електронного пучка з плазмою за умов наявності широкого початкового хвильового спектру. Незважаючи на те, що в такому аспекті задачі розглядалися раніше при дослідженні квазілінійної релаксації електронних пучків в роботах [11, 12] та нелінійної динаміки пучкової нестійкості у багатомодовому випадку [5, 7], залишилися не вирішеними питання впливу початкового спектрального розподілу на розвиток пучкової нестійкості, динаміку передавання хвильової енергії через спектр в умовах розвиненої нестійкості.

В роботі, методами математичного моделювання, досліджується динаміка хвильового спектру пучково-плазмової системи.

### СИСТЕМА РІВНЯНЬ

Розглянемо взаємодію моноенергетичного немодульованого електронного, з низькою густиною, пучка з однорідною необмеженою плазмою за наявності широкого спектру хвильових збурень в початковий момент. Для цього зобразимо напруженість електричного поля потенційних хвильових збурень у вигляді

$$E(z, t) = \sum_{m=1}^M E_m(t) \sin [m \Delta k_0 (z - v_0 t) + \varphi_m(t)], \quad (1)$$

де  $m_0 \Delta k_0 = k_0$  – хвильове число, що відповідає резонансу  $k_0 v_0 = \Omega_e$ ;  $v_0$  – швидкість електронного пучка;  $\Delta k_0$  – умовний масштаб градації

спектру хвильових збурень;  $\Omega_e = \left( \frac{4\pi e^2 n_{0e}}{m} \right)^{1/2}$

– ленгмюрівська частота плазми;  $E_m(t)$ ,  $\varphi_m(t)$  – відповідно амплітуда, яка повільно зміню-

ється і фаза  $m$ -ї моди спектру

Усреднюючи лінеаризовані рівняння руху частинок плазми та рівняння Пуассона за швидкостями осциляцій, аналогічно [5, 7], отримаємо вихідну систему нелінійних рівнянь

$$\frac{d\varepsilon_m}{d\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(m\xi_i + \varphi_m),$$

$$\frac{d\varphi_m}{d\tau} = \Delta_m + \frac{1}{\varepsilon_m N} \sum_{i=1}^N \cos(m\xi_i + \varphi_m), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \xi_i}{d\tau^2} = -\frac{1}{m_0} \sum_{m=1}^M \varepsilon_m \sin(m\xi_i + \varphi_m),$$

де  $\tau = k_0 v_0 \alpha^{1/3} t$ ;  $\varepsilon_m = \frac{E_m k_0 \alpha^{1/3}}{4\pi n_{0b}}$ ;  $\Delta_m = \frac{m^2 - m_0^2}{2mm_0 \alpha^{1/3}}$ ;

$\xi_i$  – координата  $i$ -го електронного шару, набором яких моделюється електронний пучок,

$1 \leq i \leq N$ ;  $\alpha = \frac{n_{0b}}{n_{0e}} \ll 1$  – відношення густини

пучка до густини плазми.

Система рівнянь (2) має два інваріанта

$$I_1 = \sum_{m=1}^M \frac{|w_m|^2}{2} + \frac{m_0}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d\xi_i}{d\tau} = \text{const}, \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{d\xi_i}{d\tau} \right)^2 - \sum_{m=1}^M \frac{2}{m} \frac{d\varphi_m - \Delta_m}{d\tau} |w_m|^2 = \text{const},$$

де  $w_m = \varepsilon_m e^{i\varphi_m}$ .

Перший з них описує збереження імпульсу багатомодової пучково-плазмової системи, другий – збереження енергії.

Зважаючи на значну складність, що виникає при аналітичному дослідженні початкової системи нелінійних рівнянь (2), були застосовані числові методи її аналізу. При цьому в процесі числових розрахунків достовірність результатів контролювалася збереженням інваріантів  $I_1$  та  $I_2$ .

## АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Стисло проаналізуємо результати дослідження системи рівнянь (2).

Числові розрахунки дали можливість встановити, що на початковій стадії взаємодії пучка з плазмою амплітуди хвиль нестійкої області спектру зростають з інкрементами у відповідності з передбаченнями лінійної теорії. Величини інкрементів  $\gamma_n$  і реальні поправки до частоти  $\delta_n$   $n$ -ї моди в лінійному наближенні визначаються з рівнянь

$$\delta_n = \frac{n_0}{n} (\gamma_n^2 + \delta_n^2)^2, \quad \gamma_n^2 = \delta_n (3\delta_n - 2\Delta_n) \quad (4)$$

і дорівнюють

$$\delta_n = y + \frac{\Delta_n}{3}; \quad \gamma_n = \sqrt{\delta_n (3\delta_n - 2\Delta_n)}, \quad (5)$$

де  $y = A + B$ ;  $A = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{16n_0} - \frac{\Delta_n^3}{3 \cdot 36} \right) + \sqrt{Q} \right]^{1/3}$ ;

$$B = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{16n_0} - \frac{\Delta_n^3}{3 \cdot 36} \right) - \sqrt{Q} \right]^{1/3};$$

$$Q = \frac{n}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3 n_0} \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^3 \frac{n}{n_0} - \Delta_n^3 \right].$$

Отримані розв'язки (5) підтверджуються результатами числового моделювання початкової системи рівнянь, і свідчать, що інтервал спектру з хвильовими числами, що задоволь-

няють умову  $m_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha^{1/3} \right) \geq m \Delta k_0 > 0$  при

$\tau \ll 1$  зростають з часом за експоненціальним законом у відповідності з передбаченнями лінійної теорії. Амплітуди збурень з хвильови-

ми числами  $m \Delta k_0 > m_0 \Delta k_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha^{1/3} \right)$  на початковому етапі взаємодії ( $\tau < 5$ ) практично не змінюються.

Подальша взаємодія електронного пучка з хвильовим спектром характеризується розвитком вторинних нестійкостей [14] в пучково-плазмовій системі, зумовлених вже не взаємодією “хвиля-частинка”, а “хвиля-хвиля”. Вище викладене підтверджується наступним графічним матеріалом.

На рис. 1 – 3 наведено залежність амплітуди хвильових мод від часу в різних часових інтервалах. На початковому етапі взаємодії при  $\tau \leq 10$  (рис. 1) чітко спостерігається генерація скінченного числа мод, що характеризуються максимальними пучковими інкрементами ( $m \approx 20 \pm 3$ ).

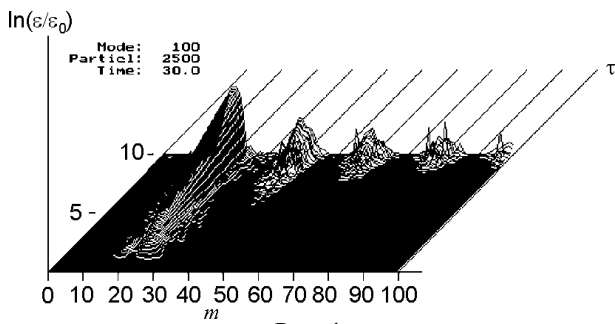


Рис. 1.

На рис. 2 наведена динаміка хвильового спектру в усьому діапазоні хвильових чисел в часовому інтервалі  $15 \geq \tau \geq 10$ .

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} I_1(\xi + x) I_1(x) dx$$

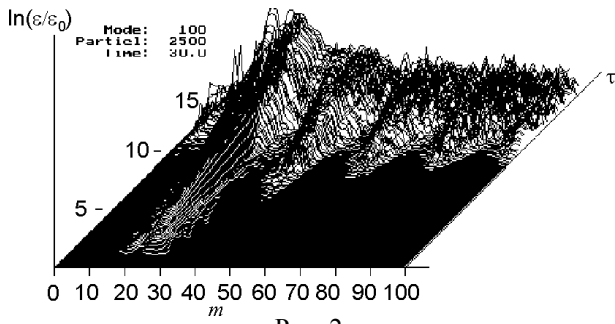


Рис. 2.

Подальша динаміка спектру ( $\tau \geq 15$ ) наведена на рис. 3.

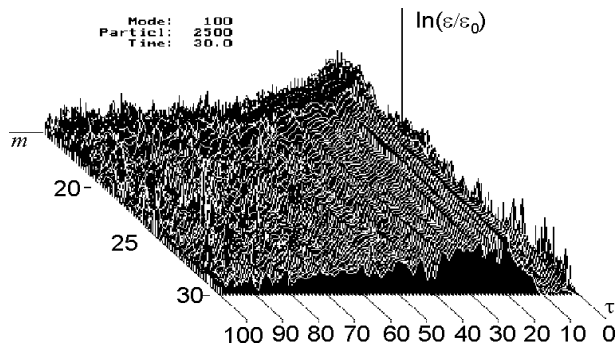


Рис. 3.

При цьому, на відміну від рис. 1, спостерігається збудження пучком всього розглянутого інтервалу хвильових чисел.

Наведені вище графічні результати отримані числовим моделюванням вихідної системи рівнянь (2) при наступних початкових умовах та параметрах середовища:  $m_0 = 20$ ;  $\alpha = 10^{-3}$ ;  $\epsilon_m(\tau = 0) = 10^{-3}$  для  $m = 1, 2, \dots, 100$ ; фази хвиль задавалися генератором випадкових чисел в інтервалі  $\phi_m \in [0, 2\pi]$  початкові координати частинок пучка рівномірно розподілялись в інтервалі  $\xi \in [0, 1]$  і задавалися у вигляді  $\xi_i = i/2500$ , де  $i = 1, 2, 3, \dots, 2500$  – координата  $i$ -го електронного шару, траєкторія якого визначається з рівнянь (2).

Точність обчислень контролювалася збереженням інтегралів системи (3). Слід відзначити, що інтеграли  $I_1$  та  $I_2$  не залежать від знаку  $\epsilon_m$  і не змінюються при додаванні до фази  $\phi_m$  постійної величини. Цей факт був використаний при обробці результатів числового моделювання та побудові графіків.

На рис. 4 наведено графік залежності інтегралу  $I_1$  від часу. З цього графіка витікає, що при  $\tau = 10 \div 12$  інтеграл починає змінюватися (зростати). До цього ж моменту часу в системі спостерігається збільшення кількості збуджених мод (див. рис. 2, 3). Стохастизація спектру підтверджується проведенням кореляційним аналізом величини  $I_1$ .

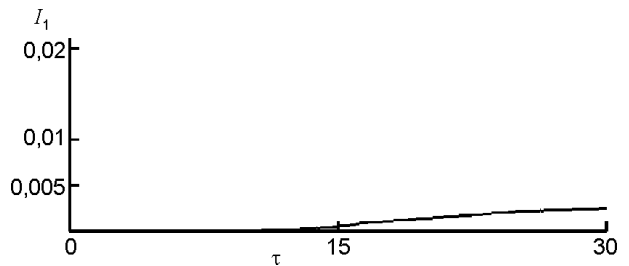


Рис. 4.

На рис. 5 наведена залежність корелятора

від радіусу кореляції

$\xi$ , що якісно відповідає, принаймні на розрахунковому інтервалі, збудженню в системі низькочастотного білого шуму. В вакуумних пучкових приладах аналогічна стохастизація описана в роботі [14].

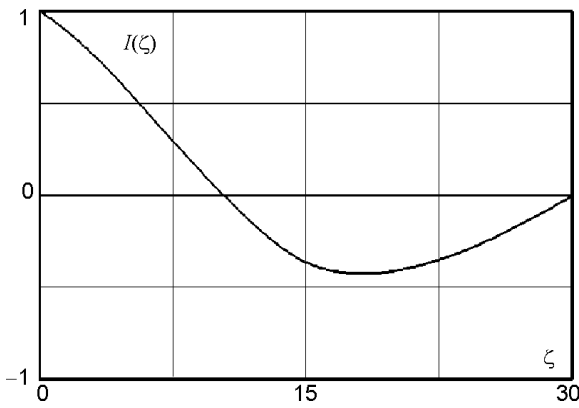


Рис. 5.

## ВИСНОВКИ

В результаті проведеного, шляхом математичного моделювання, дослідження взаємодії електронного пучка з плазмою можна сформулювати наступні висновки.

Початкова стадія взаємодії супроводжується розвитком пучкової нестійкості для найбільш нестійких мод. В іншій області спектру нестійкість буде відсутня. Подальша взаємодія пучка супроводжується генерацією кратних гармонік  $k_l = lk_0$  з інкрементами, величина яких менше резонансної.

В умовах розвитку нестійкості пучково-плазмова система стохастизується і середовище переходить в турбулентний режим. На що вказують результати кореляційного аналізу.

Слід відзначити, що на час  $\tau \approx 30$  порушуються умови придатності способу усереднення вихідного рівняння. В цьому випадку необхідно застосовувати інші способи аналізу часової динаміки спектру.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой//ДАН СССР. – 1949. – Т. 69, № 4. – С. 555-556.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЛНОВОГО СПЕКТРА В ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМАХ П.В. Турбин

Рассматривается динамика плазменно-пучковой неустойчивости с учетом широкого спектра возбуждаемых ленгмюровских колебаний. Показано, что на начальной стадии возбуждаются колебания близкие к резонансным с инкрементами, следующими из линейной теории. Далее, с задержкой порядка десяти обратных инкрементов нарастают колебания на частотах кратных резонансной. После этого происходит перераспределение энергии по всему спектру и установление практически равномерного распределения энергии по частотам (со слабо выраженным максимумом на резонансной частоте) при временах порядка 30 обратных инкрементов.

2. Bohm D., Gross E.P. Theory of plasma oscillations. V. Excitation and damping of oscillations// Phys. Rev. – 1949. – Vol. 75. – P. 1864-1876.  
3. Файнберг Я.Б. Плазменная электроника // УФЖ. – 1978. – Т. 23, № 11. – С. 1885-1901.  
4. Файнберг Я.Б. Некоторые вопросы плазменной электроники//Физика плазмы. – 1985. – Т. 11, Вып. 11. – С. 1398-1410.  
5. Кондратенко А.Н., Куклин В.М. Основы плазменной электроники. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.  
6. Куклин В.М., Ткаченко В.И. К теории пучковых неустойчивостей в средах с изменяющимся уровнем диссипации//УФЖ. – 1979. – Т. 24, № 10. – С. 1572-1574.  
7. Иванов А.А. Физика сильнонеравновесной плазмы. – М.: Атомиздат, 1977. – 347 с.  
8. Singhaus H.E. Beam-temperature effects on the electron static instability for an electron beam penetrating a plasma//Phys. Fluids. – 1964. – Vol. 7. – P. 1534-1540.  
9. И.Н. Онищенко, А.Р. Линецкий, Н.Г. Мациборко, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. К нелинейной теории возбуждения монохроматической плазменной волны электронным пучком //Письма в ЖЭТФ. – 1970. – Т. 12, Вып. 8. – С. 407-410.  
10. O'Neil T.M., Winfrey J.H., Malmberg I.H. Nonlinear interaction of a small cold beam and a plasma//Phys. Fluids.– 1971. – Vol. 14, № 6. – P. 1204-1212.  
11. Введенцов А.А. Квазилинейная теория// Атомная энергия.–1962.–Т. 13, № 1.– С. 5-24.  
12. Введенцов А.А., Велихов Е.П. Квазилинейное приближение в кинетике разреженной плазмы//ЖЭТФ. – 1962. – Т. 43, № 3. – С. 963-967.  
13. Кондратенко А.Н., Куклин В.М., Ткаченко В.И. Нелинейная теория пучковой неустойчивости в столкновительной плазме//Изв. ВУЗов, Радиофизика. – 1978. – Т. 21, Вып. 10. – С. 1535-1537.  
14. Гушин В.В., Моисеев С.С., Пунгин В.Г., Ткаченко В.И. Неоднородные и автомодельные свойства взрывных процессов в стратифицированных сдвиговых течениях//ДАН СССР. – 1985, № 1. – С. 65-68.

## SIMULATION OF DYNAMICS OF A WAVE SPECTRUM IN BEAM-PLASMA SYSTEMS P.V. Turbin

Dynamics of beam-plasma instability taking in to account a wide spectrum of raised Langmuir oscillations is considered. It is shown, that at an initial stage of oscillations close to resonant are generated with increments predicted by linear theory. Further, with delay about ten inverse linear increments the oscillations on multiple frequencies begin to grow. After that the redistribution of energy on the whole spectrum and establishment practically of uniform energy distribution on frequencies (with a poorly expressed maximum on the resonant frequency) is realised at times about 30 inverse linear increments.