

К теории излучения релятивистской заряженной частицы в искривленном магнитном поле: ондуляторно-изгибное излучение

Я. М. Соболев

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина
E-mail: sobolev@ri.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 22 августа 2011 г.

Получены спектрально-угловое и спектральное распределения излучения ультрарелятивистской заряженной частицы, движущейся по искривленной спиральной траектории, когда вклад в излучение происходит от изгибного излучения и ондуляторного излучения за счет многих оборотов частицы вокруг дрейфовой траектории. Изгибное излучение линейно поляризовано, ондуляторное излучение имеет круговую поляризацию. Исследовано влияние кривизны магнитной силовой линии на поляризацию ондуляторного излучения. Высказано предположение о реализуемости механизма ондуляторного излучения в магнитосфере пульсара.

Ключевые слова: изгибное излучение, синхротронно-изгибное излучение, ондуляторное излучение, пульсар

1. Введение

В магнитосфере пульсара релятивистские электроны и позитроны при рождении имеют отличный от нуля угол (питч-угол) между их скоростью и дипольным магнитным полем. Высветив за счет синхротронного излучения энергию поперечного движения, они движутся вдоль магнитной силовой линии и теряют энергию в режиме изгибного излучения (curvature radiation). В работе [1] были выведены формулы, которые описывают синхротронное излучение ультрарелятивистского электрона, движущегося под произвольным питч-углом по винтовой траектории, навивающейся на искривленную магнитную силовую линию. Авторы работы [1] назвали этот механизм излучения синхротронно-изгибным (synchrocurvature). Существенной особенностью этого механизма является то, что излучение происходит с малого участка траектории частицы.

Вместе с тем может реализоваться режим движения, когда частица еще неполностью выветила свою поперечную энергию и движется по

траектории, навивающейся на искривленную магнитную силовую линию. В [2-4] был предложен механизм излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся по изогнутой спиральной траектории, когда, наряду с изгибным излучением, вклад в диаграмму направленности происходит от многих витков траектории частицы вокруг силовой линии (режим ондуляторного излучения). В работе [4] механизм излучения был назван ондуляторно-изгибным. Вместе с тем в [4] не учитывался центробежный дрейф заряженной частицы в искривленном магнитном поле¹. В [6] был учтен центробежный дрейф релятивистской заряженной частицы при исследовании спектрально-углового распределения ондуляторно-изгибного излучения.

В настоящей работе проводится дальнейшее обобщение ондуляторно-изгибного механизма излучения при учете дрейфа для частиц

¹Использование более точной траектории частицы и учет дрейфа в работе [5] привело к обнаружению новых свойств синхротронно-изгибного излучения.

разных знаков заряда. Уточняется траектория частицы. Выясняется влияние кривизны магнитных силовых линий, начальной фазы частицы на свойства ондуляторного излучения. Вычисляется спектральное распределение ондуляторно-изгибного излучения, его поляризационные характеристики.

Характерным свойством рассматриваемого механизма излучения является то, что основные потери энергии частицы происходят одновременно на двух различных частотах. При разных относительных вкладах в общие потери энергии свойства излучения на этих частотах сильно различаются. На более низких частотах имеется широкополосное излучение со свойствами, присущими изгибному механизму излучения. На более высоких частотах преобладают свойства, присущие ондуляторному механизму излучения. Учет кривизны магнитной силовой линии приводит к дополнительному вкладу в поляризацию ондуляторного излучения в сравнении со случаем однородного магнитного поля.

Во втором разделе статьи рассматривается траектория заряженной частицы в круговом магнитном поле, анализируются параметры, при которых релятивистский заряд может излучать в режиме ондуляторного излучения. Спектрально-угловое распределение излучения рассматривается в третьем разделе статьи, где сравниваются свойства первой гармоники ондуляторного излучения в искривленном и однородном магнитных полях, рассматриваются поляризационные характеристики излучения. В четвертом разделе вычисляются спектральные распределения ондуляторного излучения для σ - и π -поляризации. Получена универсальная формула для суммарных потерь энергии на первой гармонике ондуляторного излучения. В заключительном разделе обсуждаются основные свойства описанного механизма излучения. Подчеркивается, что ондуляторно-изгибное излучение может быть одним из возможных каналов потери энергии релятивистскими электронами в магнитосфере пульсара. В Приложении приведены вычисленные в работе интегралы от квадратов функции Эйри и квадрата ее производной.

2. Траектория частицы

Магнитную силовую линию аппроксимируем окружностью с радиусом, равным радиусу кривизны силовой линии. В цилиндрической

системе координат (r, φ, z) , связанной с соприкасающейся плоскостью магнитной силовой линии, магнитное поле представим в виде

$$\mathbf{B} = -B_0 \mathbf{e}_\varphi, \quad (1)$$

где B_0 – величина магнитного поля, \mathbf{e}_φ – орт цилиндрической системы координат (магнитная силовая линия лежит в плоскости (x, y) декартовой системы координат, см. рис. 1).

Решение уравнений движения частицы в магнитном поле (1) находим методом Боголюбова–Митропольского [7] в виде разложения по малому отношению ларморовского радиуса r_B к радиусу кривизны магнитной силовой линии R , т. е. $\varepsilon \equiv r_B/R \ll 1$.

С учетом лишь первого порядка по ε получаем [8]

$$r = R + \varepsilon R \cos(\omega t + \theta),$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \Omega t + 2\varepsilon \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t + \theta) - \varepsilon \frac{\Omega}{\omega} \sin \theta, \quad (2)$$

$$z = -\frac{e}{|e|} \frac{\Omega^2 R}{\omega_B} t - \varepsilon \frac{e}{|e|} \frac{\omega_B}{\omega} R \sin(\omega t + \theta).$$

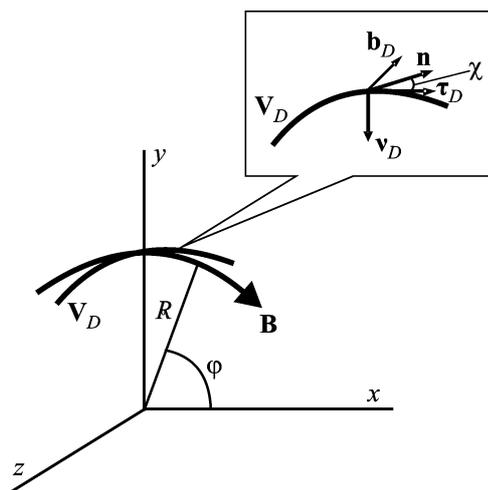


Рис. 1. Круговое магнитное поле и сопутствующий трехгранник к дрейфовой траектории: V_D – вектор дрейфовой скорости частицы; τ_D , v_D и b_D – орты трехгранника

Здесь $\Omega = v_{0\phi}/R$ – угловая скорость движения ведущего центра, $v_{0\phi}$ – начальная азимутальная скорость; $\omega^2 = \omega_B^2 + 3\Omega^2$; $\omega_B = |e|B_0/(\gamma mc)$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, c – скорость света, v и m – скорость и масса частицы; e – заряд частицы. Постоянные интегрирования для координат (r, ϕ, z) , выбраны таким образом, что в начальный момент времени $t = 0$ центр ларморовской окружности имеет координаты $(R, \pi/2, 0)$, а радиус ларморовской окружности образует угол θ с положительным направлением оси Oz .

Для квадрата скорости получаем выражение

$$v^2 = \Omega^2 R^2 + \frac{\Omega^4 R^2}{\omega_B^2} + \omega^2 r_B^2. \quad (3)$$

Вклад в квадрат полной скорости частицы (3) дают квадрат азимутальной скорости, квадрат скорости центробежного дрейфа вдоль оси z и квадрат скорости ларморовского вращения с частотой ω .

Траектория частицы образована движением ведущего центра вдоль дрейфовой траектории (получается отбрасыванием в выражениях (2) осциллирующих слагаемых) и вращением вокруг этого центра с угловой частотой ω (ниже, при рассмотрении спектрально-углового и спектрального распределений излучения, частоту ω заменяем на частоту ω_B). Дрейфовая траектория навивается на цилиндрическую поверхность с осью вдоль оси z и радиусом R в перпендикулярном сечении. Проекция дрейфовой скорости на направление магнитного поля положительна. Положительно (отрицательно) заряженная частица навивается на дрейфовую траекторию по правилу левого (правого) буравчика, проекция скорости ее центробежного дрейфа вдоль оси z отрицательна (положительна). Винтовые дрейфовые траектории для положительного и отрицательного зарядов отличаются знаком кручения.

Рассмотрим движение частицы, при котором азимутальная (вдоль магнитного поля) скорость релятивистская, $\Omega R \rightarrow c$. Дрейфовая траектория наклонена под углом $\psi_D = v_D/v_{0\phi} = \Omega/\omega_B \ll 1$ к оси Ox . Вектор скорости образует с дрейфовой траекторией угол, равный

$\psi_L = \omega_B r_B/\Omega R \ll 1$. Параметр $q = \omega_B^2 r_B/\Omega^2 R$, равный отношению скорости движения по ларморовской окружности $\omega_L = \omega_B r_B$ к дрейфовой скорости $|v_D| = \Omega^2 R/\omega_B$, определяет характер изменения радиуса кривизны траектории частицы [5, 8], а также соотношение между углами ψ_L и ψ_D . Параметр q можно определить и как отношение центростремительных ускорений, возникающих соответственно при движении по ларморовской окружности и окружности, вписанной в магнитную силовую линию.

Излучение ультрарелятивистской частицы, движущейся по окружности радиуса R , происходит с дуги длиной R/γ . Это расстояние частица проходит за время $R/(\gamma c)$, совершив при этом $\omega_B R/(2\pi\gamma c) = \omega_B/(2\pi\gamma\Omega)$ оборотов вокруг дрейфовой траектории. Таким образом, для реализации режима ондуляторного излучения, когда вклад в диаграмму направленности излучения происходит от многих витков траектории, необходимо выполнение условия

$$N \equiv \frac{\omega_B}{\gamma\Omega} \gg 1. \quad (4)$$

При выполнении этого условия из определения лоренц-фактора и выражения (3) для квадрата скорости частицы следует, что $1/\gamma \gg \psi_L$, $1/\gamma \gg \psi_D$ и далее $\gamma \approx \gamma_{||}$, где $\gamma_{||} = 1/\sqrt{1-\Omega^2 R^2/c^2}$ – лоренц-фактор для продольного движения частицы.

3. Спектрально-угловое распределение

Для вычисления распределения энергии \mathcal{E} , излучаемой заряженной частицей в интервале телесных углов между θ и $\theta + d\theta$ в интервале частот между ω и $\omega + d\omega$, воспользуемся выражением [9]

$$d\mathcal{E} = \frac{cR_0^2}{4\pi^2} |\mathbf{E}(\omega)|^2 d\theta d\omega, \quad (5)$$

где $\mathbf{E}(\omega)$ – Фурье-компонента электрического поля в дальней зоне,

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{-i\omega e}{cR_0} \exp\left(\frac{i\omega R_0}{c}\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{n}[\mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}]] \exp\{i\omega(t - \mathbf{nr}/c)\} dt. \quad (6)$$

Здесь R_0 – расстояние до наблюдателя; \mathbf{n} – единичный вектор, соответствующий направлению потока энергии на наблюдателя; $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, \mathbf{v} – скорость заряженной частицы; \mathbf{r} – радиус-вектор траектории частицы (2).

Для вычисления электрического поля (6) поступим следующим образом. В каждой точке траектории (2) вводим естественный трехгранник к дрейфовой траектории, состоящий из ортов касательной $\boldsymbol{\tau}_D$, нормали \mathbf{v}_D и бинормали \mathbf{b}_D (см. рис. 1). Выбираем такую точку дрейфовой траектории в момент времени t_0 , что орт \mathbf{n} лежит в спрямляющей плоскости (плоскость касательной $\boldsymbol{\tau}_D$ и бинормали \mathbf{b}_D). Тогда условие для выбора момента времени t_0 принимает вид

$$\mathbf{n}\mathbf{v}_D(t_0) = 0. \quad (7)$$

Вектор \mathbf{n} лежит в плоскости $(\boldsymbol{\tau}_D, \mathbf{b}_D)$ и записывается в виде

$$\mathbf{n} = \cos\chi\boldsymbol{\tau}_D + \sin\chi\mathbf{b}_D, \quad (8)$$

где χ – угол между ортами $\boldsymbol{\tau}_D$ и \mathbf{n} , т. е. между вектором дрейфовой скорости и направлением на наблюдателя (см. рис. 1). Определением (8) задается положительное направление для угла χ (от $\boldsymbol{\tau}_D$ к \mathbf{b}_D). При таком подходе направление орта \mathbf{n} определяется двумя величинами: моментом времени t_0 и углом χ , которые легко связать с угловыми координатами в сферической системе координат.

Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) . Поскольку орт нормали к дрейфовой траектории направлен против орта радиальной координаты, $\mathbf{v}_D = -\mathbf{e}_r$, то значению $t_0 = 0$ соответствует азимутальный угол $\varphi_n = 0$, индекс n обозначает угловую координату орта \mathbf{n} . Для момента времени $t_0 \neq 0$ угол $\varphi_n = -\Omega t_0$. При этом $\vartheta_n = \frac{\pi}{2} + \frac{e}{|e|} \frac{\Omega}{\omega_B} + \chi$.

Заметим, что такой выбор ориентации естественного трехгранника позволяет существ-

венно упростить вывод формул и обобщить формулы для спектрально-углового распределения, полученные в работе [6] для частного случая $t_0 = 0$, на общий случай $t_0 \neq 0$.

Для описания поляризационных свойств излучения выберем один из ортов поляризации $\mathbf{e}_\pi, \mathbf{e}_\sigma$, лежащих в плоскости, перпендикулярной \mathbf{n} , сонаправленным с нормалью к дрейфовой траектории, $\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{v}_D$. Орт \mathbf{e}_σ направлен вдоль вектора ускорения частицы в данной точке к центру соприкасающейся окружности. Второй орт $\mathbf{e}_\pi = [\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{n}]$ лежит в плоскости $(\boldsymbol{\tau}_D, \mathbf{b}_D)$. Орты $\mathbf{e}_\pi, \mathbf{e}_\sigma, \mathbf{n}$ образуют правую тройку:

$$\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{v}_D, \quad \mathbf{e}_\pi = \sin\chi\boldsymbol{\tau}_D - \cos\chi\mathbf{b}_D. \quad (9)$$

Разлагая фурье-компоненту электрического поля (6) по ортам (9) и подставляя полученные выражения в формулу (5), находим спектрально-угловое распределение излучения для двух поляризаций [6]:

$$d\mathcal{E}_i = \frac{e^2}{4\pi^2 c} |b_i(\omega)|^2 d\omega d\Omega, \quad i = \pi, \sigma. \quad (10)$$

Воспользовавшись выражениями (2), (8), (9) и отбросив постоянное слагаемое в показателе экспоненты, получаем

$$b_i(\omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \beta_i \exp\left\{i\omega \left[(1 - \beta_{\parallel} \cos\chi)\tau + \frac{\beta_{\parallel} \cos\chi \Omega^2 \tau^3}{6} - \frac{e\beta_{\perp} \sin\chi \sin(\omega_B t_0 + \omega_B \tau + \theta)}{|e|\omega_B} - \frac{\beta_{\perp} \cos\chi \cos(\omega_B t_0 + \omega_B \tau + \theta)}{\omega_B} \Omega \tau \right]\right\} d\tau, \quad (11)$$

где для компонент скорости $(\beta_i = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_i), i = \pi, \sigma)$ имеем

$$\beta_{\pi} = \beta_{\parallel} \sin\chi - \frac{e}{|e|} \beta_{\perp} \cos\chi \cos(\omega_B t_0 + \omega_B \tau + \theta), \quad (12)$$

$$\beta_{\sigma} = \beta_{\parallel} \Omega \tau + \beta_{\perp} \sin(\omega_B t_0 + \omega_B \tau + \theta).$$

Здесь $\beta_{\parallel} = \Omega R/c$, $\beta_{\perp} = \omega_B r_B/c$, $\tau = t - t_0$.

Выражения (11), (12), в отличие от аналогичного выражения (14) из работы [6], явно учитывают знак заряда частицы и момент времени t_0 (ориентацию трехгранника относительно дрейфовой траектории). При этом зависимость от t_0 входит в комбинации $\omega_B t_0 + \theta$. Без учета дрейфа и начального положения частицы формулы (12) переходят в соответствующие выражения, полученные в работе [4]. Фаза экспоненты и предэкспоненциальный множитель в формуле (11) разложены по малому параметру $\Omega\tau \ll 1$.

При вычислении интеграла (11) поступаем следующим образом². Разлагаем экспоненты, соответствующие третьему и четвертому слагаемым в показателе экспоненты, в ряды Тейлора. При временах $\tau \sim 1/(\gamma_{\parallel}\Omega)$ и питч-углах $\beta_{\perp}\gamma_{\parallel} < 1$ эти слагаемые значительно меньше первых двух слагаемых и на характерных частотах по абсолютной величине меньше единицы. Затем, после перемножения этих разложений между собой и с множителем (12), оставляем в качестве предэкспоненциального выражения только сумму слагаемых, содержащих нулевую и первую гармоники по частоте ω_B . (Заметим, что этим способом можно получить и формулы ондуляторного излучения в однородном магнитном поле, которые в [10] найдены как асимптотики обобщенной формулы Шотта.)

В результате имеем

$$b_{\pi} = i\pi [C_{\pi} + \exp(-i(\omega_B t_0 + \theta))U_{\pi}], \quad (13)$$

$$b_{\sigma} = \pi [C_{\sigma} + \exp(-i(\omega_B t_0 + \theta))U_{\sigma}]. \quad (14)$$

Как уже упоминалось выше, формула (11) отличается от соответствующих выражений в работе [6] наличием комбинации $\omega_B t_0 + \theta$. Поэтому при вычислении C_i , U_i мы можем воспользоваться результатами работы [6]. В случае произвольных углов $\chi \in (0, \pi)$ получаем выражения (работа [6], формулы (15), (16)),

которые легко обобщаются на случай двух знаков заряда.

В приближении малых углов $\chi \ll 1$, учитывая, что ультрарелятивистская частица излучает в диапазоне углов $\chi \sim 1/\gamma_{\parallel}$ вдоль направления вектора своей скорости, имеем:

в случае π -поляризации

$$C_{\pi} = 2 \frac{\omega}{\omega_B} \frac{\beta_{\parallel} \Psi \text{Ai}(\zeta_0)}{\gamma_{\parallel} f^{1/3}}, \quad (15)$$

$$U_{\pi} = -\frac{\omega \beta_{\perp}}{\omega_B f^{1/3}} \times \left[\frac{e}{|e|} (1 - 2\xi \Psi^2) \text{Ai}(\zeta_1) + 2 \frac{\xi \Psi \text{Ai}'(\zeta_1)}{N f^{1/3}} \right]; \quad (16)$$

в случае σ -поляризации

$$C_{\sigma} = 2 \frac{\omega}{\omega_B} \frac{\beta_{\parallel} \text{Ai}'(\zeta_0)}{\gamma_{\parallel} N f^{2/3}}, \quad (17)$$

$$U_{\sigma} = \frac{\omega}{\omega_B} \frac{\beta_{\perp}}{f^{1/3}} \times \left[(1 - 2\xi(1 + \Psi^2)) \text{Ai}(\zeta_1) + \frac{e}{|e|} \frac{2\xi \Psi \text{Ai}'(\zeta_1)}{N f^{1/3}} \right]. \quad (18)$$

Здесь $f = \xi/N^2$, $\zeta_0 = (\omega/(2\gamma_{\parallel}^3 \Omega))^{2/3} (1 + \Psi^2)$, $\zeta_1 = (N^2/\xi)^{1/3} [\xi(1 + \Psi^2) - 1]$, $\xi = \omega/(2\gamma_{\parallel}^2 \omega_B)$, $\Psi = \gamma_{\parallel} \chi$,

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(xt + t^3/3)] dt \quad (19)$$

функция Эйри, $\text{Ai}'(x) \equiv \frac{d\text{Ai}(x)}{dx}$ – производная функции Эйри [11].

Первое слагаемое в формулах (13), (14) описывает изгибное излучение, второе слагаемое описывает вклад ондуляторного излучения. Множитель $\exp(-i(\omega_B t_0 + \theta))$ связан с фазой

²В работе [4] при вычислении интегралов типа (11) третья экспонента была разложена в ряд по функциям Бесселя.

частицы в момент времени t_0 (как показано выше, $-\omega_B t_0$ – это азимутальный угол направления излучения). Если в первых слагаемых в формулах (16), (18) положить $\xi = 1/(1 + \psi^2)$ (излучение на первой гармонике) и отбросить вторые слагаемые, то выражения (16), (18) переходят в формулы ондуляторного излучения в однородном магнитном поле [10, 12]. Учет кривизны магнитной силовой линии (вторые слагаемые в квадратных скобках в формулах (16), (18)) приводит к отличиям, особенно заметным при увеличении угла ψ . Например, π -компонента электрического поля при излучении под углом $\chi \sim 1/\gamma_{\parallel}$ обращается в нуль в однородном магнитном поле, но при учете кривизны магнитной силовой линии в (16) отлична от нуля.

Подставляя формулы (13), (14) в (10), получаем выражения для спектрально-углового распределения энергии:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{\pi}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4c} \left[C_{\pi}^2 + 2 \cos(\omega_B t_0 + \theta) C_{\pi} U_{\pi} + U_{\pi}^2 \right], \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{\sigma}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4c} \left[C_{\sigma}^2 + 2 \cos(\omega_B t_0 + \theta) C_{\sigma} U_{\sigma} + U_{\sigma}^2 \right], \quad (21)$$

где $C_{\pi, \sigma}$ и $U_{\pi, \sigma}$ заданы формулами (15)-(18).

В выражениях (20), (21) первое слагаемое описывает изгибное излучение. Если функции Эйри $\text{Ai}(\zeta_0)$, $\text{Ai}'(\zeta_0)$ в формулах (15), (17) выразить через функции Макдональда $K_{1/3}$, $K_{2/3}$, то получим классические формулы для синхротронного излучения заряда, движущегося по окружности радиуса R [13]. Третье слагаемое описывает ондуляторное излучение на первой гармонике. Второе слагаемое, содержащее множитель $\cos(\omega_B t_0 + \theta)$, описывает интерференцию вкладов от изгибного и ондуляторного излучений. Это слагаемое зависит от начальной фазы частицы θ и момента времени t_0 . Если рассматривать излучение сгустка частиц с нескоррелированными фазами, то это слагаемое обращается в нуль при усреднении по начальным фазам частиц.

Из выражений (15)-(18) следует, что в зависимости от частоты спектрально-угловое распределение (20), (21) имеет два локальных мак-

симула. Первый максимум на частоте $\omega_C \sim \gamma_{\parallel}^3 \Omega$ соответствует изгибному механизму излучения, второй на частоте $\omega_U^{(1)} \sim 2\gamma_{\parallel}^2 \omega_B / (1 + \psi^2)$ соответствует первой гармонике ондуляторного излучения. Частота $\omega_U^{(1)}$ примерно в N раз больше частоты ω_C . При увеличении числа оборотов N вокруг дрейфовой траектории, вносящих вклад в формирование ондуляторного излучения, относительная величина максимума первой гармоники значительно увеличивается. Однако характерные частоты значительно различаются, и на каждой частоте преобладает свой механизм излучения (см. рис.2 и рис. 3 в работе [6]).

3.1. Поляризационные свойства

Вектор электрического поля для изгибного излучения принимает вид

$$\mathbf{E} \propto i\psi \sqrt{1 + \psi^2} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} N \xi (1 + \psi^2)^{3/2} \right) \mathbf{e}_{\pi} - (1 + \psi^2) K_{2/3} \left(\frac{2}{3} N \xi (1 + \psi^2)^{3/2} \right) \mathbf{e}_{\sigma},$$

характерный для излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся по окружности [13].

Для вклада ондуляторного механизма излучения из (16), (18) получаем

$$\mathbf{E} \propto -i \left[\frac{e}{|e|} (1 - 2\xi \psi^2) \text{Ai}(\zeta_1) + f(\psi, \zeta_1) \right] \mathbf{e}_{\pi} + \left[(1 - 2\xi(1 + \psi^2)) \text{Ai}(\zeta_1) + \frac{e}{|e|} f(\psi, \zeta_1) \right] \mathbf{e}_{\sigma}, \quad (22)$$

$$\text{где } f(\psi, \zeta_1) = \frac{2\xi^{2/3} \psi}{N^{1/3}} \text{Ai}'(\zeta_1).$$

Если в выражении (22) положить $\xi(1 + \psi^2) = 1$ (излучение на частоте первой гармоники) и $f(\psi, \zeta_1) = 0$ (излучение вдоль направления $\boldsymbol{\tau}_D$), то получим выражение, описывающее поляризацию в однородном магнитном поле [10, 12]. Видно, что за счет кривизны магнитного поля появляются поправки, они становятся су-

ществеными при $\psi > 0$. Изгибное излучение эллиптически поляризовано, с выраженной линейной поляризацией. Ондуляторное излучение при $\psi = 0$ имеет круговую поляризацию, причем вектор электрического поля излучения вращается в том же направлении, что и заряженная частица в магнитном поле.

4. Спектр излучения

Вычислим мощность излучения частицы в единичном интервале частот. Для этого выражения (20), (21) нужно проинтегрировать по телесному углу и усреднить по времени излучения. Поскольку вклад в суммарную мощность излучения от ансамбля частиц за счет второго слагаемого в формулах (20), (21) при усреднении стремится к нулю, учтем только вклады изгибного и ондуляторного излучений. Проинтегрируем выражения (20), (21) по телесному углу $d\omega = 2\pi d\psi/\gamma_{\parallel}$ и усредним по периоду между последовательными импульсами $2\pi/\Omega$.

Для вклада изгибного излучения имеем классические выражения [13]:

$$\frac{dP_{\pi}^{(C)}}{d\omega} = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} \frac{W}{\omega_C} y_C \left[\int_{y_C}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta - K_{2/3}(y_C) \right], \quad (23)$$

$$\frac{dP_{\sigma}^{(C)}}{d\omega} = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} \frac{W}{\omega_C} y_C \left[\int_{y_C}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta + K_{2/3}(y_C) \right], \quad (24)$$

где $y_C = \omega/\omega_C$; $\omega_C = (3/2)\gamma_{\parallel}^3\Omega$; $W = (2/3) \times (e_a^2/c)\Omega^2\gamma_{\parallel}^4$ – полная мощность, теряемая электроном при изгибном излучении.

Спектры излучения для первой гармоники ондуляторного излучения получаем, применив формулы (П1)-(П5) из Приложения:

$$\frac{dP_{\pi}^{(U)}}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{W}{\omega_U} \left(\frac{N\beta_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} \right)^2 (2N)^{2/3} \xi \times \left\{ \frac{3\xi^{2/3}}{N^2} \text{Ai}(2^{2/3}x) + \frac{3\xi^{4/3}}{2^{1/3}N^{4/3}} \text{Ai}'(2^{2/3}x) + \right.$$

$$\left. + (1 - 2\xi + 2\xi^2) \times \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{2}{z^{1/3}} + \frac{1}{z^{4/3}} \right) \text{Ai} \left(\frac{(2N)^{2/3}(z-1)}{z^{1/3}} \right) dz \right\}, \quad (25)$$

$$\frac{dP_{\sigma}^{(U)}}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{W}{\omega_U} \left(\frac{N\beta_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} \right)^2 (2N)^{2/3} \xi \times \left\{ \frac{3\xi^{2/3}}{N^2} \text{Ai}(2^{2/3}x) - \frac{3\xi^{4/3}}{2^{1/3}N^{4/3}} \text{Ai}'(2^{2/3}x) + \right.$$

$$\left. + (1 - 2\xi + 2\xi^2) \times \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{2}{z^{1/3}} + \frac{1}{z^{4/3}} \right) \text{Ai} \left(\frac{(2N)^{2/3}(z-1)}{z^{1/3}} \right) dz \right\}, \quad (26)$$

где $x = N^{2/3}(\xi - 1)/\xi^{1/3}$, $\omega_U = 2\gamma_{\parallel}^2\omega_B$.

На рис. 2 и рис. 3 построены графики нормированной мощности потерь энергии для π -поляризации (25) и для σ -поляризации (26) в зависимости от безразмерной частоты

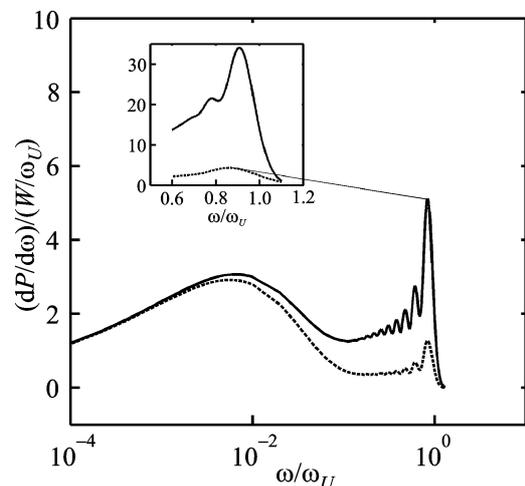


Рис. 2. Спектральное распределение ондуляторно-изгибного излучения для π -поляризации: $N = 20$, $\epsilon_{\perp} = 0.1$, (сплошная кривая), $\epsilon_{\perp} = 0.05$ (штриховая линия). На вставке (верхний левый угол) показан увеличенный фрагмент спектра вблизи максимума ондуляторного излучения: $\epsilon_{\perp} = 0.1$, $N = 20$ (штриховая линия) и $N = 50$ (сплошная кривая)

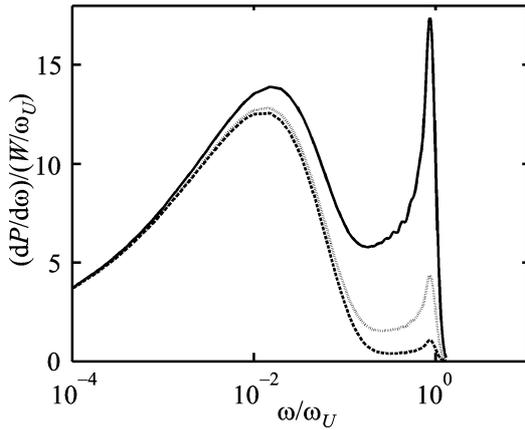


Рис. 3. *Спектральное распределение ондуляторно-изгибного излучения для σ -поляризации: $N = 20$, $\epsilon_{\perp} = 0.2$ (сплошная кривая), $\epsilon_{\perp} = 0.1$ (пунктирная кривая), $\epsilon_{\perp} = 0.05$ (штриховая линия)*

$\xi = \omega / (2\gamma_{\parallel}^2 \omega_B)$. Эти графики представляют универсальные функции распределения излучения, зависящие от параметров N и $\epsilon_{\perp} \equiv \beta_{\perp} / \gamma_{\parallel}$.

Как видно из (25), (26) первое слагаемое в фигурных скобках значительно меньше второго и третьего слагаемых при достаточно больших значениях параметра N . Второе слагаемое, также малое в сравнении с третьим, приводит к отличиям от чисто круговой поляризации.

В спектре имеется две характерных частоты: частота изгибного излучения $\omega_c = 3\omega_U / (4N)$ и частота первой гармоники ондуляторного излучения $\omega_U = 2\gamma_{\parallel}^2 \omega_B$. Относительная мощность потерь зависит от величины параметра $N\epsilon_{\perp}$. При значении этого параметра меньше единицы потери энергии на ондуляторное излучение меньше потерь на изгибное излучение.

Близость характерной частоты ондуляторного излучения к частоте ω_U зависит от величины параметра N . Как видно на вставке на рис. 2, при $N = 20$ (штриховая линия) частота максимума ондуляторного излучения равна $0.84\omega_U$, а при $N = 50$ (сплошная кривая) эта частота равна $0.92\omega_U$. При $N \rightarrow \infty$ характерная частота ондуляторного излучения стремится к ω_U .

Сложив спектры (25), (26) для обеих поляризаций, пренебрегая малым первым слагаемым в фигурных скобках, получаем суммар-

ный спектр ондуляторного излучения на первой гармонике:

$$\frac{dP^{(U)}}{d\omega} = \frac{W}{\omega_U} \left(\frac{N\beta_{\perp}}{\gamma_{\parallel}} \right)^2 (2N)^{2/3} \xi \times$$

$$\times (1 - 2\xi + 2\xi^2) \times$$

$$\times \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{2}{z^{1/3}} + \frac{1}{z^{4/3}} \right) \text{Ai} \left(\frac{(2N)^{2/3}(z-1)}{z^{1/3}} \right) dz. \quad (27)$$

5. Обсуждение

Таким образом, получены формулы, описывающие спектральное распределение излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории в искривленном магнитном поле под малыми углами, такими, что формирование диаграммы направленности происходит от многих витков траектории частицы вокруг ее дрейфовой траектории. Частица теряет энергию за счет изгибного механизма излучения, возникающего из-за кривизны магнитной силовой линии, и ондуляторного излучения, которое возникает из-за вращения частицы вокруг силовой линии магнитного поля. Спектр изгибного излучения описывается классическими формулами синхротронного излучения частицы, движущейся по окружности радиуса, равного радиусу кривизны магнитной силовой линии. Спектр ондуляторного излучения описывается содержащими функции Эйри формулами (25)-(27), которые характеризуют его в широком диапазоне частот. Для потерь энергии на ондуляторное излучение имеем универсальную формулу (27).

Отношение потерь энергии на изгибное и ондуляторное излучения зависит от величины параметра $N\epsilon_{\perp}$. Как видно из формул (23)-(26), при $N\beta_{\perp} / \gamma_{\parallel} > 1$ ондуляторный канал потерь энергии может быть основным. При $N\beta_{\perp} / \gamma_{\parallel} < 1$ основные потери обусловлены изгибным механизмом излучения. Однако независимо от отношения интенсивностей каналы излучения четко различимы. Изгибное излучение широкополосное с преобладанием линейной поляризации, ондуляторное излучение узкополосное с преобладанием круговой поляризации,

знак круговой поляризации зависит от знака заряда. Более того, характерная частота изгибного излучения ω_c в N раз меньше характерной частоты ондуляторного излучения $\omega_v = (4/3)N\omega_c$, что позволяет легко диагностировать канал излучения.

Рассмотрены свойства первой гармоники ондуляторного излучения. Для аналогичного описания ондуляторного излучения на второй гармонике предложенным в работе методом требуется учет траектории частицы с точностью до второго порядка по ϵ . Это исследование будет проведено в дальнейшем. Однако, как показано в [4], отношение мощностей потерь на второй и первой гармониках ондуляторного излучения пропорционально величине $(\beta_{\perp}/\gamma_{\parallel})^2$.

В магнитосфере пульсара обычно рассматриваются потери энергии релятивистских электронов и позитронов на изгибное излучение. Вместе с тем при наличии энергии поперечного движения заряженные частицы будут терять энергию по двум каналам излучения: за счет ондуляторного и за счет изгибного излучения. Условие (4), которое необходимо для осуществления режима ондуляторного излучения, как показано в работе [4], для дипольного магнитного поля пульсаров в области открытых магнитных силовых линий можно записать в виде

$$N \geq \frac{N_0}{\gamma_{\parallel}^2} \left(\frac{r_*}{r} \right)^{5/2}, \quad N_0 = \frac{2eB_*}{3mc} \Omega_*^{-1} \left(\frac{\Omega_* r_*}{c} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Здесь Ω_* , r_* – угловая частота вращения и радиус нейтронной звезды соответственно; B_* – магнитное поле на поверхности звезды; r – расстояние от поверхности звезды до области излучения. Оценивая (28) при значениях магнитного поля и угловой частоты вращения, характерных для обычных и миллисекундных пульсаров, находим, что условие реализуемости ондуляторно-изгибного излучения легко выполняется для электронов (позитронов) с лоренц-факторами $\gamma \sim 10^3$. Таким образом, ондуляторное излучение может быть одним из механизмов излучения ультрарелятивистских заряженных частиц в магнитосфере пульсара.

Признаком этого механизма излучения является круговая поляризация электромагнитного излучения.

Автор благодарен В. И. Карасю за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Приложение

Выведем формулы, необходимые при вычислении спектрального распределения ондуляторного излучения, пропорционального интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} U_{\pi,\sigma}^2 d\psi$. Как можно увидеть из формул (16), (18), интегралы содержащие произведение функции Эйри и ее производной, обращаются в нуль вследствие нечетности подынтегрального выражения. Поэтому получаем следующие выражения для интегралов, содержащих квадраты функций Эйри:

$$\frac{1}{f^{2/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}^2 \left(\frac{\xi(1+\psi^2)-1}{f^{1/3}} \right) d\psi = \frac{1}{2\sqrt{f\xi}} \int_{2^{2/3}x}^{\infty} \text{Ai}(y) dy, \quad (П1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi}{f} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \text{Ai}^2 \left(\frac{\xi(1+\psi^2)-1}{f^{1/3}} \right) d\psi = \\ & = -\frac{1}{4\sqrt{f\xi}} \left[\frac{1}{2^{2/3}} \text{Ai}'(2^{2/3}x) + x \int_{2^{2/3}x}^{\infty} \text{Ai}(y) dy \right], \quad (П2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi^2}{f^{4/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^4 \text{Ai}^2 \left(\frac{\xi(1+\psi^2)-1}{\sqrt[3]{f}} \right) d\psi = \\ & = \frac{3}{16\sqrt{f\xi}} \left[\frac{2^{2/3}}{4} \text{Ai}(2^{2/3}x) + \right. \\ & \left. + x \left(\frac{1}{2^{2/3}} \text{Ai}'(2^{2/3}x) + x \int_{2^{2/3}x}^{\infty} \text{Ai}(y) dy \right) \right], \quad (П4) \end{aligned}$$

и для интеграла, содержащего квадрат производной функции Эйри,

$$\frac{\xi}{f} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \text{Ai}'^2 \left(\frac{\xi(1+\psi^2)-1}{f^{1/3}} \right) d\psi =$$

$$= \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{f\xi}} \left[\frac{5}{4} \cdot 2^{2/3} \text{Ai}(2^{2/3}x) + \right.$$

$$\left. + x \left(\frac{1}{2^{2/3}} \text{Ai}'(2^{2/3}x) + x \int_{2^{2/3}x}^{\infty} \text{Ai}(y) dy \right) \right], \quad (\text{П5})$$

где $x = (\xi - 1) / f^{1/3}$.

При выводе этих формул в левой части выражений (П1)-(П5) заменяем функцию Эйри ее интегральным представлением (19) [14, 4]. В результате получаем тройной интеграл с переменными интегрирования ψ , τ_1 и τ_2 . Далее делаем замену переменных, $u = (\tau_1 - \tau_2)$, $w = (\tau_1 + \tau_2)$, и интегрируем сначала по переменным u и w , затем ψ . После чего получаем правые части выражений (П1)-(П5).

Литература

1. Cheng K. S. and Zhang J. L. General radiation formulae for a relativistic charged particle moving in curved magnetic field lines: The synchrocurvature radiation mechanism // *Astrophys. J.* – 1996. – Vol. 463, No. 1. – P. 271-283.
2. Sobolev Ya. M. New radiation formulae of relativistic electrons in curved magnetic field lines // *Proc. of IAU Symp. 199, The Universe at low radio frequencies, Nov.30-Dec.4, 1999. – Pune (India). – 1999. – Michigan: ASP, 2002. – P. 400-401.*
3. Epp V. and Mitrofanova T. G. Radiation of relativistic particles in a quasi-homogeneous magnetic field // *Proc. of the Ninth Lomonosov conf. on elementary physics, Particle physics at the start of the new millennium, 20-26 Sept. 1999. – Moscow (Russia). – 1999. – Singapore: World Scientific, 2001. – P. 198-202.*
4. Соболев Я. М. К теории излучения релятивистской заряженной частицы в магнитном поле с искривленными силовыми линиями // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2000. – Т. 5, №2. – С. 137-147.
5. Соболев Я. М. Влияние кривизны магнитных силовых линий на спектр и поляризацию синхротронного излучения заряженной частицы // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2001. – Т. 6, №4. – С. 277-290.
6. Соболев Я. М. Ондуляторное и изгибающее излучение релятивистского заряда, движущегося

по изогнутой спиральной траектории // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения».* – 2010. – №4. – С. 165-169.

7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
8. Sobolev Ya. M. Synchrotron radiation of relativistic electrons moving at small pitch-angles in inhomogeneous magnetic field // *Problems of atomic science and technology. Ser. “Plasma electronics and new acceleration methods”.* – 2006. – No. 5. – P. 267-272.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
10. Соколов А. А., Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч. Излучение электронов, движущихся по винтовым траекториям с релятивистской продольной скоростью // *ЖТФ.* – 1973. – Т. 43, Вып. 3. – С. 682-683.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
12. Никитин М. М., Эпп В. Я. Ондуляторное излучение. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 152 с.
13. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. – М.: Наука, 1974. – 392 с.
14. Westfold K. C. The polarization of synchrotron radiation // *Astrophys. J.* – 1959. – Vol. 130, No. 1. – P. 241-258.

До теорії випромінювання релятивістської зарядженої частинки у викривленому магнітному полі: ондуляторно-згинальне випромінювання

Я. М. Соболев

Отримано спектрально-кутовий та спектральний розподіли випромінювання ультрарелятивістської зарядженої частинки, що рухається уздовж скривленої спіральної траекторії, коли внесок у випромінювання настає від згинального випромінювання та ондуляторного випромінювання за рахунок багатьох обертів частинки навколо дрейфової траекторії. Згинальне випромінювання є лінійно поляризованим, ондуляторне випромінювання має кругову поляризацию. Досліджено вплив кривини магнітної силової лінії на поляризацию ондуляторного випромінювання. Висловлено припущення щодо реалізованості механізму ондуляторного випромінювання в магнітосфері пульсара.

On Relativistic Charged Particle Radiation in a Curved Magnetic Field: Undulator- Curvature Radiation

Ya. M. Sobolev

The spectral-angular and spectral radiation distributions of an ultrarelativistic charged particle moving along a spiral curved trajectory have been obtained for the case when the contribution to radiation occurs from many revolutions of the particle round a drift trajectory. Curvature radiation is linearly polarized, undulator radiation has circular polarization. The influence of curvature of magnetic lines on polarization of undulator radiation is investigated. The suggestion has been made that the undulator radiation mechanism can be realized in a pulsar magnetosphere.