Радиофизика и радиоастрономия, 2010, т. 15, №4, с. 408-424

УДК 621.371.162

Переход от ближней к дальней зоне в решении задачи обратного рассеяния волн статистически неровной поверхностью

А. С. Брюховецкий

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: ire@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 16 июня 2010 г.

Для случая обратного рассеяния волн статистически неровной поверхностью найдены асимптотики двукратных интегралов от быстроосциллирующих функций, определяющих временную корреляционную функцию рассеянного поля. При угле скольжения много больше характерного угла френелевской зоны в вычислениях используется метод стационарной фазы. Полученное решение допускает предельные переходы к значениям физических параметров, отвечающих “большой” и “малой” площадкам. Для угла скольжения много меньше френелевского определено комбинированное решение – методом стационарной фазы по переменному азимутальному углу и приближением дифракции Фраунгофера по радиальной переменной. Расчеты позволяют установить связь с решениями, основанными на эвристических упрощающих гипотезах.

1. Введение

Как показали исследования [1-4], гипотеза, существенно упрощающая вычисления корреляционной функции рассеянного поля ([5], с.149; [6], с.106), приводит к физически неверному результату для “малой” рассеивающей площадки. Согласно этой упрощающей гипотезе при определенных условиях можно ограничиться линейными членами разложения фазы подынтегрального выражения в ряд по степеням разности координат двух рассеивающих точек поверхности независимо от степени кривизны фазовой поверхности в пределах области интегрирования.

В связи с этим становится актуальным проведение расчетов, свободных от подобного рода предположений. Итогом таких расчетов являются более обоснованные результаты как для “большой” так и для “малой” площадок, которые получаются предельными переходами к граничным значениям соответствующего физического параметра в полученном решении задачи. К тому же представляется возможность с более общих позиций оценить достоверность результатов, основанных на вышеупомянутой гипотезе. Заметим, что особое внимание к изучению частного случая обратного рассеяния продиктовано не только значительным уменьшением числа свободных параметров задачи за счет совмещения точки наблюдения с источником. В этом случае в полярной системе координат существенно упрощается применение метода стационарной фазы для двукратных интегралов от быстроосциллирующих функций (БОИ). Соответствие постановки задачи обратного рассеяния условиям однопозиционной локации статистически неровной поверхности служит причиной постоянного и неослабевающего внимания к ее исследованию.

2. Интегральное представление корреляционной функции $B(\tau)$ и частотного спектра $S(\omega)$ рассеянного поля

Если не вводить в качестве новых переменных разности координат двух рассеивающих точек поверхности S, то временную кор-

ISSN 1027-9636

реляционную функцию $B(\tau)$ рассеянного поля при зависимости от времени в виде $\sim e^{i\omega_0 t}$ можно представить в виде

$$B(\tau) = B_1(\tau) + B_1^*(\tau), \tag{1}$$

где “$*$” – знак комплексного сопряжения, а

$$B_1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\chi}_1 \sum_{j=\pm} \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \left| f_1(\vec{\chi}_1) \right|^2 e^{-j[\omega_0 + j\omega_1(\chi_1)]\tau}, \tag{2}$$

$$f_1(\vec{\chi}_1) = \iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1 f_2(\vec{r}_1; \vec{\chi}_1) e^{i\Phi_1(\vec{r}_1)}, \tag{3}$$

$$f_2(\vec{r}_1; \vec{\chi}_1) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \frac{J_{12}\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1)}{4\pi R_{01}^2}, \tag{4}$$

$$\Phi(\vec{r}_1) = 2kR_{01} + \vec{\chi}_1\vec{r}_1. \tag{5}$$

В этих формулах k – волновое число; $\vec{R}_{01} = (\vec{r}_{01},\, z_1 - z_0)$ – вектор, соединяющий точку рассеяния $(\vec{r}_1,\, z_1 = 0)$ на средней поверхности $z_1 = \left\langle \zeta(\vec{r}_1,\, t) \right\rangle = 0$ с точкой источника $\vec{R}_0 = (\vec{r}_0,\, z_0)$ (она же точка наблюдения); $\sigma^2 = \left\langle \zeta^2 \right\rangle$ – дисперсия случайных неровностей; $\tilde{W}_\pm(\vec{\chi}_1)$ – несимметричный энергетический спектр волновых чисел [7] (пространственный спектр неровностей), а $\omega_1 = \omega_1(\chi_1)$ – частота случайных колебаний поверхности, отвечающая волновому вектору $\vec{\chi}_1$. Множители $\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1)$ и J_{12}, учитывающие влияние отражательных свойств поверхности на трассе $\vec{R}_{01}$ для среднего поля и на трассе $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{01}$ (в рассматриваемом случае) для рассеянного поля соответственно, записываются в виде [1, 2]:

$$\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1) \equiv \tilde{J}_{01}\left(\vec{\chi}_1;\, \vec{R}_{01}\right) = \left[-k\vec{\alpha}_\perp\vec{\chi}_1 + k^2\alpha_z^2\right] \times$$
$$\times (1 + V_{01}) + k^2\alpha_z\eta_0(1 - V_{01}) +$$
$$+ \left[-k\vec{\alpha}_\perp\vec{\chi}_1 + k^2\alpha_z^2 + k^2\alpha_z\eta_0\right](1 - V_{01})W_{01}, \tag{6}$$

$$J_{12} \equiv J_{12}\left(\vec{R}_{12}\right) = (1 + V_{12}) + (1 - V_{12})W_{12}, \tag{7}$$

где V_{01}, V_{12} – эффективные коэффициенты отражения, а W_{01}, W_{12} – множители ослабления для вышеуказанных трасс $\vec{R}_{01}$ и $\vec{R}_{12}$ соответственно; η_0 – импеданс поверхности; $\alpha_z = z_0/R_{01}$; $\vec{\alpha}_\perp = \vec{r}_{01}/R_{01}$, $\vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, а вектор $\vec{r}_0$ выбран равным нулю, $\vec{r}_0 = 0$. Поле случайных неровностей $\zeta(\vec{r}_1,\, t)$ предполагается стационарным и однородным.

Проведем преобразование Фурье корреляционной функции и получим частотный спектр рассеянного поля

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\chi}_1 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \left| f_1(\vec{\chi}_1) \right|^2 \times$$
$$\times \delta\left(\omega - \omega_0 - j\omega_1(\chi_1)\right), \tag{8}$$
$$j = \mathrm{sign}(\omega - \omega_0).$$

Поскольку средняя интенсивность рассеянного поля $B(0) \equiv 2B_1(0)$, величину $2\sum_{j=\pm} \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \left| f_1(\vec{\chi}_1) \right|^2$ естественно назвать парциальной составляющей средней интенсивности поля, рассеянного спектральной фурье-компонентой случайных неровностей с волновым вектором $\vec{\chi}_1$.

Спектр $\tilde{W}_j(\vec{\chi}_1)$ является заданной величиной, а определение $f_1(\vec{\chi}_1)$ согласно (3) сводится к вычислению БОИ, для асимптотической оценки которого можно применить метод стационарной фазы [8].

3. Асимптотическая оценка $f_1(\vec{\chi}_1)$

Как известно [8-10], асимптотика БОИ является суммой вкладов каждой критической точки, а именно: стационарных точек фазовой функции $\Phi(\vec{r}_1)$ внутри рассеивающей области S; особых точек предэкспоненциального множителя $f_2(\vec{r}_1;\, \vec{\chi}_1)$; критических точек на границе области S, угловых точек контура границы и т. п.

Показатель отрицательной степени большого параметра задачи в главном члене асимптотики определяется типом критической точки [8-10]. При этом простое сложение вкладов отдельных критических точек становится заведомо неверным, когда в результате изменения внешних параметров, определяющих положение этих точек, последние в достаточной мере сближаются и даже сливаются. В этом случае необходимо построение более сложных асимптотик, равномерных в окрестности таких точек.

Конкретно для интеграла (3) внешними параметрами являются координаты источника $\vec{R}_0 = (\vec{r}_{01},\, z_0)$ и волновой вектор $\vec{\chi}_1$ пространственного спектра неровностей. Особенности у функции $f_2(\vec{r}_1;\, \vec{\chi}_1)$ отсутствуют. Критическими могут быть стационарные точки фазы $\Phi(\vec{r}_1)$ с произвольным расположением относительно границы области S и возможные угловые точки контура границы.

Для двумерного интеграла, каковым является интеграл (3), вопросы построения требуемых асимптотик рассматривались в [11, 12], где показано, что вклад в асимптотику от угловых точек описывается специальной функцией двух переменных – обобщенным интегралом Френеля. Детальное описание асимптотики интеграла (3), включая и вклад от угловых точек, является практически непреодолимым препятствием для последующих аналитических вычислений интеграла (2) после подстановки в него асимптотики (3). Поэтому представляется вполне оправданным пренебрежение вкладом конечного числа угловых точек по сравнению с вкладом двумерного бесконечного множества остальных критических точек. Именно это допущение было использовано в работах [3, 4]. Было показано, что в силу малости площади пограничной окрестности по сравнению с общей площадью S в случае "большой" площадки вкладом даже обычных пограничных [13, 14] (не угловых) точек в асимптотику (3) можно пренебречь.

Для "малой" площадки все критические точки (внутренние и пограничные) находятся на расстоянии меньшем, чем зона формирования для каждой из них соответствующего асимптотического значения интеграла. Справедливость пренебрежения угловыми точками и в этой ситуации мы покажем путем сравнения с результатами расчетов в приближении дифракции Фраунгофера.

4. Вычисление $f_1(\vec{\chi}_1)$

Стационарная точка $\vec{r}_{1s}$ фазы (5) определяется условием

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\vec{r}_1}\right)_s = 0 = 2k\vec{\alpha}_{\perp s} + \vec{\chi}_1, \qquad (9)$$

где $\vec{\alpha}_{\perp s} = \left(\vec{r}_1/R_{01}\right)_s$, а $(R_{01})_s = \sqrt{r_{1s}^2 + z_0^2}$. Здесь и далее нижним индексом *"s"* помечены значения величин в стационарной точке $\vec{r}_{1s}$. Если $\varphi_\perp$, θ_{01} – сферические углы вектора $\vec{R}_{01}$, то их стационарные значения согласно (9) определяются из условий:

$$\varphi_{\perp s} = \varphi_1 \pm \pi, \qquad (10)$$

$$\alpha_{\perp s} = \sin\theta_{01s} = \chi_1/2k \equiv \xi_0^2 > 0. \qquad (11)$$

Здесь φ_1 – азимутальный угол вектора $\vec{\chi}_1$ в плоскости $z = 0$. В дальнейшем для краткости будем писать φ_s, θ_s, r_s, R_s вместо $\varphi_{\perp s}$, θ_{01s}, r_{1s}, R_{01s}.

Из условия (11) получаем

$$\alpha_{zs} = \left(z_0/R_{01}\right)_s = \sqrt{1-\xi_0^4} = \cos\theta_s. \qquad (12)$$

Условия (11) и (12) означают, что случайные "решетки" (фурье-компоненты разложения $\zeta(\vec{r}_1, t)$) с $\chi_1 > 2k$ находятся в "каустической" тени (θ_s – комплексные величины!). Для $\chi_1 \le 2k$ случайные "решетки" находятся в "освещенной" зоне, если φ_s, θ_s отвечают положению точки $\vec{r}_s$ в пределах рассеивающей площадки S, и – в зоне "геометрической" тени, если $\vec{r}_s$ располагается за пределами области S.

При этом

$$R_s = z_0/\cos\theta_s,$$
$$r_s = z_0 \operatorname{tg}\theta_s \equiv R_s \sin\theta_s. \qquad (13)$$

Рассмотрим вычисление интеграла (3) для случая, когда S – площадь кругового сектора $\varphi_l \le \varphi_\perp \le \varphi_u$, $r_l \le r_1 \le r_u$. Независимость пределов интегрирования по одной из переменных от другой упрощает процедуру последовательного интегрирования. В полярной системе координат фаза (5) выглядит следующим образом:

$$\Phi(\vec{r}_1) = 2kR_{01} + \chi_1 r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_\perp), \qquad (14)$$

а условия стационарности (9) –

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi_\perp}\right)_s = \chi_1 r_s \sin(\varphi_1 - \varphi_s) = 0. \qquad (15)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r_1}\right)_s = 2k\alpha_{\perp s} + \chi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_s) = 0. \qquad (16)$$

Элементы матрицы Гесса для фазы $\Phi(\vec{r}_1)$ имеют вид:

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_\perp^2}\right)_s = \chi_1 r_s > 0, \qquad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_\perp \partial r_1}\right)_s = \chi_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_s) = 0, \qquad (18)$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_1^2}\right)_s = \frac{2k}{R_s}\alpha_{zs}^2 \ge 0. \qquad (19)$$

Диагональность матрицы Гесса при $\alpha_{zs} \ne 0$ позволяет без излишних дополнительных преобразований разделить асимптотическое интегрирование по переменным φ_1 и r_1.

Перепишем (3) в виде

$$f_1(\vec{\chi}_1) = \int_{r_l}^{r_u} \mathrm{d}r_1 r_1 I_\varphi, \qquad (20)$$

где

$$I_\varphi = \int_{\varphi_l}^{\varphi_u} \mathrm{d}\varphi_\perp\, f_2(r_1, \varphi_\perp; \vec{\chi}_1) e^{i\Phi(r_1, \varphi_\perp)}. \qquad (21)$$

Главный член асимптотики интеграла (21) (см. Приложение) имеет вид:

$$I_\varphi \approx e^{i\Phi_s} f_2(r_1, \varphi_s; \vec{\chi}_1) h_{s\varphi} \Delta Q_\varphi, \qquad (22)$$

где

$$\Phi_s = \Phi(r_1, \varphi_s) = 2kR_{01} - \chi_1 r_1, \qquad (23)$$

$$h_{s\varphi} = e^{i\pi/4}\sqrt{2/\chi_1 r_1}, \qquad (24)$$

а величина ΔQ_φ определена в Приложении.

Подставив (22) в (20), получим

$$f_1(\vec{\chi}_1) \equiv I_r \approx \int_{r_l}^{r_u} \mathrm{d}r_1\, f_3(r_1, \varphi_s; \vec{\chi}_1) e^{i\Phi(r_1, \varphi_s)}, \qquad (25)$$

где

$$f_3(r_1, \varphi_s; \vec{\chi}_1) = r_1 f_2(r_1, \varphi_s; \vec{\chi}_1) h_{s\varphi} \Delta Q_\varphi. \qquad (26)$$

Дальнейший ход вычислений зависит от значений угла места θ_{01}, существенных для рассеянного поля.

5. Нескользящее рассеяние $(\pi/2-\theta_{01} \gg (kR_{01})^{-1/2} \ll 1)$

В этом случае удобно перейти от переменной r_1 к углу места θ_{01} согласно (13), при этом

$$\mathrm{d}r_1 = \left(z_0/\cos^2\theta_{01}\right)\mathrm{d}\theta_{01} \equiv \left(R_{01}/\cos\theta_{01}\right)\mathrm{d}\theta_{01}, \tag{27}$$

а выражение (25) приобретает вид:

$$I_r = \int_{\theta_l}^{\theta_u} \mathrm{d}\theta_{01} f_4(\theta_{01}) e^{i\Phi(\theta_{01})}. \tag{28}$$

Здесь использованы обозначения: $\theta_{l,u} = \operatorname{arctg}(r_{l,u}/z_0)$ и

$$f_4(\theta_{01}) = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta_{01}} f_3(r_1,\varphi_s;\vec{\chi}_1) \tag{29}$$

с подстановкой $r_1 = r_1(\theta_{01})$ согласно (13). Аналогичная подстановка в (23) приводит к выражению

$$\Phi(\theta_{01}) = \left(2kz_0/\cos\theta_{01}\right)\left(1-\xi_0^2\sin\theta_{01}\right). \tag{30}$$

Условие стационарности для (30),

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\theta_{01}}\right)_s \equiv \Phi_s' = \left(2kz_0/\cos^2\theta_s\right)\left(\sin\theta_s - \xi_0^2\right) = 0, \tag{31}$$

приводит к полученному ранее другим путем условию (11). Вторая производная в стационарной точке

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\theta_{01}^2}\right)_s \equiv \Phi_s'' = 2kz_0/\cos\theta_s \equiv 2kR_s > 0. \tag{32}$$

Главный член асимптотики интеграла (28) равен (см. Приложение)

$$I_r \approx e^{i\Phi_s}\left(r_1\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\theta_{01}}\right)_s f_2\left(r_s,\varphi_s;\vec{\chi}_1\right) h_{s\varphi}\Delta Q_\varphi h_{s\theta}\Delta Q_\theta. \tag{33}$$

Здесь

$$\Phi_s = 2kR_s\alpha_{zs}^2, \tag{34}$$

$$h_{s\theta} = e^{i\pi/4}\Big/\sqrt{kR_s}, \tag{35}$$

величина $h_{s\varphi}$ определена формулой (24) при $r_1 = r_s$.

Таким образом, приняв во внимание (13) и (27), для $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ получим асимптотическое выражение

$$\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2 = R_s^4\mathrm{tg}^2\theta_s\left|f_2(r_s,\varphi_s;\vec{\chi}_1)\right|^2\times$$
$$\times\left|h_{s\varphi}\Delta Q_\varphi\right|^2\left|h_{s\theta}\Delta Q_\theta\right|^2. \tag{36}$$

В предельных случаях “большой” и “малой” рассеивающих площадок можно воспользоваться соответствующими выражениями для ΔQ_φ и ΔQ_θ (см. Приложение).

“Большая” площадка
$\left(\Delta\varphi \gg 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1},\ \Delta\theta \gg 2(kR_c)^{-1/2}\right)$

Здесь и далее индексом “c” помечены величины, относящиеся к центру площадки (более детальные объяснения после вормул (41) и (48)).

В освещенной зоне, $0<\varphi_s<\Delta\varphi, (\theta_l<\theta_s<\theta_u)$, имеем значения: $\left|\Delta Q_\varphi\right|^2 \approx \pi$, $\left|\Delta Q_\theta\right|^2 \approx \pi$. Учитывая (13), (27), (34) и (35), получим

$$\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2 \approx \left(\pi R_s/k\cos\theta_s\right)^2\left|f_2(\vec{r}_s;\vec{\chi}_1)\right|^2. \tag{37}$$

“Малая” площадка
$\left(\Delta\varphi \ll 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1},\ \Delta\theta \ll 2(kR_c)^{-1/2}\right)$

В этом случае для ΔQ_φ следует взять выражение (П17), а для ΔQ_θ – выражение (П25). В итоге получим

$$\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2 = \left(R_s^2\,\mathrm{tg}\,\theta_s\right)^2\frac{(\Delta r\Delta\varphi)^2}{R_cR_s}\cos^2\frac{\varphi_s-\varphi_c}{2}\times$$

$$\times\cos^2\frac{\theta_s+\theta_c}{2}\left|f_2(\vec{r}_s;\vec{\chi}_1)\right|^2\frac{\sin^2 X_\varphi}{X_\varphi^2}\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}, \quad (38)$$

где

$$X_\varphi \approx (\chi_1 r_s\Delta\varphi/2)\left|\sin(\varphi_s-\varphi_c)\right|, \quad (39)$$

$$X_r \approx k\Delta r\left|\sin\theta_s-\sin\theta_c\right|. \quad (40)$$

6. Скользящее рассеяние $\left(\pi/2-\theta_{01}\ll(kR_{01})^{-1/2},\ \dfrac{k(\Delta r)^2}{4R_c}\cos^2\theta_c\ll 1\right)$

В этом случае фазу (23) в пределах рассеивающей площадки можно представить линейным разложением по $r'=r_1-r_c$, характерным для зоны дифракции Фраунгофера:

$$\Phi(r_1,\varphi_s)=\Phi_s+(\chi_{1c}-\chi_1)r'+\mathrm{O}\left(kr'^2\alpha_{zc}^2/(2R_c)\right), \quad (41)$$

где $r_c=(r_u+r_l)/2$, $R_c=\sqrt{r_c^2+z_0^2}$, $\chi_{1c}=2k\alpha_{\perp c}\equiv 2kr_c/R_c$, $\alpha_{zc}=z_0/R_c$, $\Phi_c=2kR_c$.

Имея ввиду высокочастотный характер рассеяния ($kr'\gg 1$) и отбросив члены $\sim\mathrm{O}\left(k(r'\alpha_{zc})^2/(2R_c)\right)$ в фазе (41), для интеграла (25) получим

$$f_1(\vec{\chi}_1)\approx e^{i\Phi_c}\Delta r f_3(r_c,\varphi_s;\vec{\chi}_1)\frac{\sin X_r}{X_r}. \quad (42)$$

Здесь

$$\Delta r=r_u-r_l \quad \text{и} \quad X_r=(\Delta r/2)\left|\chi_{1c}-\chi_1\right|. \quad (43)$$

Подстановка (26) в (42) приводит к результату

$$\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2\approx(r_c\Delta r)^2\left|f_2(r_c,\varphi_s;\vec{\chi}_1)\right|^2\left|h_{s\varphi}\Delta Q_\varphi\right|_c^2\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}. \quad (44)$$

Нижний индекс “c” означает, что здесь $r_1=r_c$.

Возможны два предельных варианта размеров площадки в азимутальном направлении.

“Большая” площадка $\left(\Delta\varphi\gg 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1}\right)$

Вычисления $\left|h_{s\varphi}\Delta Q_\varphi\right|^2$, аналогичные проведенным при получении (37), приводят к результату

$$\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2\approx\pi(2r_c/\chi_1)(\Delta r)^2\left|f_2(r_c,\varphi_s;\vec{\chi}_1)\right|^2\times$$
$$\times\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}, \qquad (0\le\varphi_s\le\Delta\varphi). \quad (45)$$

“Малая” площадка $\left(\Delta\varphi\ll 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1}\right)$

Подставив в (44) выражение (П17) для ΔQ_φ, получим

$$\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2\approx S^2\left|f_2(r_c,\varphi_s;\vec{\chi}_1)\right|^2\times$$
$$\times\cos^2\left(\frac{\varphi_s-\varphi_c}{2}\right)\frac{\sin^2 X_\varphi}{X_\varphi^2}\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}, \quad (46)$$

где X_r задано соотношением (43), а $S=r_c\Delta\varphi\Delta r$.

7. Вычисление $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ в приближении дифракции Фраунгофера $\left(\Delta\varphi\ll 2(hR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1},\ \Delta r\ll 2\left(R_c/k\right)^{1/2}(\cos\theta_c)^{-1}\right)$

Если площадка S находится в зоне дифракции Фраунгофера относительно источника (наблюдателя), кривизна фазовой поверхности в ее пределах мала и в разложении фазы по степеням координат точки рассеяния можно пренебречь квадратичными членами [15, 16]:

$$\Phi(r_1,\varphi_\perp)\approx\Phi_c+\Delta_1\Phi+\Delta_2\Phi+\dots. \quad (47)$$

Здесь

$$\Phi_c=2kR_c-\chi_1 r_c\cos(\varphi_s-\varphi_c), \qquad (\varphi_s=\varphi_1-\pi), \ - \quad (48)$$

фаза в центре площадки, которой соответствуют значения $\theta_{01}=\theta_c$, $\varphi_\perp=\varphi_c$, $r_1=r_c$, $R_{01}=R_c, \ldots$;

$$\Delta_1\Phi\equiv\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_\perp}\right)_c\varphi'=-\chi_1 r_c\sin(\varphi_s-\varphi_c)\varphi',$$

$$\Delta_2\Phi\equiv\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}\right)_c r'=\chi_{1c}-\chi_1\cos(\varphi_s-\varphi_c)r', \tag{49}$$

причем $\varphi'=\varphi_\perp-\varphi_c$, $r'=r_1-r_c$, $-\dfrac{\Delta\varphi}{2}\le\varphi'\le\dfrac{\Delta\varphi}{2}$, $-\dfrac{\Delta r}{2}\le r'\le\dfrac{\Delta r}{2}$, $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_l$, $\Delta r=r_u-r_l$, $\chi_{1c}=2k\alpha_{\perp c}$.

Ограничиваясь, как обычно, нулевым членом разложения предэкспоненциального множителя в формуле (20), в результате интегрирования получим

$$|f_1(\vec{\chi}_1)|^2\approx S^2|f_2(r_c,\varphi_c;\vec{\chi}_1)|^2\frac{\sin^2X_\varphi}{X_\varphi^2}\frac{\sin^2X_r}{X_r^2}, \tag{50}$$

где

$$X_\varphi=(\chi_1r_c\Delta\varphi/2)|\sin(\varphi_s-\varphi_c)|, \tag{51}$$

$$X_r=(\Delta r/2)|\chi_{1c}-\chi_1\cos(\varphi_s-\varphi_c)|, \tag{52}$$

$$S=r_c\Delta\varphi\Delta r.$$

Оценка отброшенных квадратичных членов в разложении фазы (47) приводит к требованиям:

$$\Delta r/2\ll\alpha_{zc}^{-1}\sqrt{R_c/k}, \tag{53}$$

$$\Delta\varphi/2\ll\alpha_{\perp c}^{-1}(kR_c)^{-1/2}\quad\text{или}\quad r_c\Delta\varphi\ll\sqrt{R_c/k}, \tag{54}$$

$$(\chi_1r_c\Delta\varphi/2)|\sin(\varphi_s-\varphi_c)|\ll\frac{2r_c}{\Delta r}. \tag{55}$$

Последнее требование накладывает ограничение на рассматриваемые углы рассеяния φ_s: если левая часть (55) порядка $m\pi$, то $m\ll\dfrac{2}{\pi}\dfrac{r_c}{\Delta r}\gg1$.

Для таких углов можно в формуле (52) положить $\cos(\varphi_s-\varphi_c)\cong1$, и в результате существенный вклад в величину (50) обеспечивают значения $|\delta\chi_1|=|\chi_{1c}-\chi_1|\sim\dfrac{2\pi}{\Delta r}\ll\dfrac{2\pi}{\lambda}$. Это дает основание пренебречь в (51) отклонением χ_1 от χ_{1c}. При таких допущениях получим:

$$X_\varphi\approx(\chi_{1c}r_c\Delta\varphi/2)|\sin(\varphi_s-\varphi_c)|, \tag{56}$$

$$X_r\approx(\Delta r/2)|\chi_1-\chi_{1c}|. \tag{57}$$

Для нескользящего рассеяния $(\theta_c<\pi/2,\ \chi_1<2k)$ в области значений $0\le\chi_1<2k$ возможен переход от переменной χ_1 к углу θ_s согласно формуле $\chi_1=2k\sin\theta_s$, при этом (57) приобретает вид (40).

Некоторые допущения о поведении функции $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ на всей оси значений $0\le\chi_1<\infty$ позволяют перейти к определению средней интенсивности $B(0)$ и частотного спектра $S(\omega)$ согласно формулам (1), (2) и (8).

8. Средняя интенсивность $B(0)$

Средняя интенсивность $B(0)$ и частотный спектр $S(\omega)$ являются интегралами от положительно определенной функции $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2\tilde{W}_j(\vec{\chi}_1)$, а потому их значения зависят от степени взаимного пересечения областей “локализации” каждого из сомножителей в этом произведении. Если исключить вариант очень узкополосного спектра неровностей $\tilde{W}_j(\vec{\chi}_1)$, то результат интегрирования будет определяться областью локализации $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$. Для “большой” площадки это область значений $\vec{\chi}_1$, для которых стационарные точки $\vec{r}_s$ лежат в “освещенной” зоне (внутри S), для “малой” – это значения $\vec{\chi}_1$ вблизи главных лепестков диаграммных множителей $\dfrac{\sin^2X_\varphi}{X_\varphi^2}\dfrac{\sin^2X_r}{X_r^2}$.

При произвольных значениях внешних параметров $(\vec{\chi}_1, R_{01}, \Delta r, \Delta\varphi, ...)$ задача определения $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ для всех $0 \le \chi_1 < \infty$ является практически невыполнимой. Поэтому ограничимся ситуацией, когда область "локализации" $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ удалена от концов интервала интегрирования ($0 \le \chi_1 < 2k$ в методе стационарной фазы). При этом продолжение решения $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ на весь интервал в силу его быстрого убывания не будет существенно влиять на величину интеграла.

Рассмотрим случай не слишком малых углов скольжения $\psi_{01} = \pi/2 - \theta_{01}$: для "большой" площадки $\psi_u = \pi/2 - \theta_u \gg (kR_u)^{-1/2} \ll 1$, а для "малой" площадки $\psi_c > m(\pi/k\Delta r)^{1/2} \ll 1$, где $m \sim 3-4$. Эти условия обеспечивают "локализацию" $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ в области углов рассеяния θ_s, где не нарушаются условия ограничения главным членом асимптотического разложения в методе стационарной фазы. В первом случае минимальный угол скольжения много больше характерного угла рассеяния в зоне тени, во втором – характерного угла лепестковой структуры диаграммного множителя.

Поскольку $B_1(0) > 0$ – вещественная величина, в соответствии с (1) и (2) средняя интенсивность $B(0)$ равна

$$B(0) = 2B_1(0) = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 |f_1(\vec{\chi}_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}_1). \quad (58)$$

Здесь $\tilde{W}(\vec{\chi}_1) = \frac{1}{2}[W_+(\vec{\chi}_1) + W_-(\vec{\chi}_1)]$ – симметричный пространственный спектр случайных неровностей [7].

9. Нескользящее рассеяние

"Большая" площадка
$\left(\Delta\varphi \gg 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1},\ \Delta\theta \gg 2(kR_c)^{-1/2}\right)$

В "освещенной зоне", $(0 < \varphi_s < \Delta\varphi)$, $\theta_l < \theta_s < \theta_u$, функция $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ определена выражением (37), а в зоне тени быстро убывает (см. Приложение). Напомним, что $\varphi_s = \varphi_1 - \pi$, $\theta_s = \theta_1$. Пренебрегая вкладом стационарных точек за пределами освещенной зоны, формулу (58) можно записать в виде

$$B(0) \approx 4\int_{\theta_l}^{\theta_u} d\theta_1 \int_{\pi}^{\pi+\Delta\varphi} d\varphi_1 (2k)^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 \times$$
$$\times |f_1(\vec{\chi}_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}_1). \quad (59)$$

Перейдем от угловых координат θ_1, φ_1 вектора $\vec{\chi}_1$ к угловым координатам θ_s, φ_s вектора $\vec{r}_s$ стационарной точки на поверхности S, введя обозначение $\vec{\chi}_1 = -2k\vec{\alpha}_{\perp s} \equiv -\vec{\chi}_{1s}$, что является следствием соотношений $\sin\varphi_1 = -\sin\varphi_s$, $\cos\varphi_1 = -\cos\varphi_s$. В результате с учетом связи (37) и (4) формула (59) принимает вид

$$B(0) \approx \frac{\sigma^2}{8}\iint_S d^2\vec{r}_s \frac{|J_{12}|_s^2 \left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1s})\right|_s^2}{R_s^4} \tilde{W}(-\vec{\chi}_{1s}). \quad (60)$$

Подчеркнем, что переход от представления $B(0)$ в виде разложения (59) по функциям волновых чисел $\vec{\chi}_1$ к разложению (60) по функциям точек $\vec{r}_s$ рассеивающей поверхности S является приближенным в силу сделанных ранее оговорок. Интеграл (60) всегда можно формально записать в виде произведения площади S на среднее значение подынтегральной функции, поскольку последняя является положительно определенной.

К выражению (60) приводит и упомянутая во введении "упрощающая" гипотеза (см. [6], с. 105). Таким образом, применимость указанной гипотезы ограничена условиями, при которых получена формула (60): размеры рассеивающей площадки велики по сравнению с соответствующими френелевскими масштабами, а $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ достаточно плавная функция $\vec{\chi}_1$, по крайней мере вблизи границы "свет–тень".

"Малая" площадка
$\left(\Delta\varphi \ll 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1},\ \Delta\theta \ll 2(kR_c)^{-1/2}\right)$

При "нескользящем" рассеянии для углов $|\delta\theta_s| \equiv |\theta_s - \theta_c| < \psi_c$, образующих первые $m \sim 3-4$ лепестка диаграммного множителя $\left(\sin^2 X_r\right)/X_r^2$, можно считать

$$\frac{R_s}{R_c}\left(\frac{r_s}{r_c}\right)^2\frac{\cos^2\left((\theta_s+\theta_c)/2\right)}{\cos^2\theta_s}\cos^2\frac{\delta\varphi_s}{2}\approx 1+\mathrm{O}\left(\left|\delta\theta_s\right|\right), \tag{61}$$

что позволяет пренебречь разницей между выражениями (38) для "малой" площадки в методе стационарной фазы и (50) в приближении дифракции Фраунгофера. Имея в виду быстрое убывание $\sim(m\pi)^{-2}$, продолжим функцию $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ из (50) на весь интервал интегрирования $0\le\chi_1\le\infty.$ В итоге получим

$$B(0)\approx 4\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}\chi_1\chi_1\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2\tilde{W}(\vec{\chi}_1), \tag{62}$$

где $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ определена формулой (50).

От переменной $\varphi_1\equiv\varphi_s+\pi$ перейдем к переменной X_φ и получим

$$\mathrm{d}\varphi_1=\left[\left(\frac{\chi_1 r_c\Delta\varphi}{2}\right)^2-X_\varphi^2\right]^{-1/2}\mathrm{d}X_\varphi\approx\frac{2}{\chi_1 r_c\Delta\varphi}\mathrm{d}X_\varphi,$$

поскольку $\dfrac{\chi_1 r_c\Delta\varphi}{2}\approx\pi\dfrac{r_c\Delta\varphi}{\lambda}\gg\pi.$

Аналогичным образом от переменной χ_1 следует перейти к $X_r=(\Delta r/2)(\chi_1-\chi_{1c}),$ при этом $\mathrm{d}\chi_1=\dfrac{2}{\Delta r}\mathrm{d}X_r.$ В результате преобразований получим

$$B(0)\approx 4S\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}X_r\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}X_\varphi\left|f_2(\vec{r}_c;\vec{\chi}_1)\right|^2\tilde{W}(\vec{\chi}_1)\times$$

$$\times\frac{\sin^2 X_\varphi}{X_\varphi^2}\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}, \tag{63}$$

где $\vec{\chi}_1$ – неявная функция переменных X_r, X_φ согласно сделанным заменам. Интегрирование ведется в бесконечных пределах в силу быстрого убывания диаграммных множителей ([16], с. 430), $\sim(m\pi)^{-2}$ при X_φ, $X_r\sim m\pi.$ Функция $\left|f_2(\vec{r}_c;\vec{\chi}_1)\right|^2$ остается при этом практически постоянной (см. формулы (4) и (7)). Если для таких X_φ, X_r спектр $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ также меняется слабо, то их можно вынести за знак интеграла при $X_\varphi=0$ и $X_r=0,$ т. е. при $\vec{\chi}_1=-\vec{\chi}_{1c}\equiv-2k\vec{\alpha}_{\perp c}.$ Оставшийся двойной интеграл сводится при этом к квадрату однократного, значение которого равно π (см. [16], с. 431).

В этом случае получаем

$$B(0)=\frac{\sigma^2}{8}\frac{\left|J_{12}\right|_c^2\left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1c})\right|_c^2}{R_c^4}\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1c})S. \tag{64}$$

Как и для "большой" площадки, выражение (64) совпадает с выражением, которое дает "упрощающая" гипотеза (см. [6], с. 94). В данном случае условия ее применимости определяются условием перехода от (62) к (64): плавность изменения $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ при наличии достаточного числа $|m|\approx 3-4$ осцилляций на интервалах интегрирования.

Для площадки в переходной зоне результат вычислений зависит от френелевских параметров (см. Приложение) и не может быть сведен к результатам "упрощающей" гипотезы.

10. Скользящее рассеяние $\left(\pi/2-\theta_{01}\ll(kR_{01})^{-1/2},\ \cos\theta_c\ll(2/\Delta r)(R_c/k)^{-1/2}\right)$

"Большая" площадка $\left(\Delta\varphi\gg 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1}\right)$

На практике такая ситуация имеет место при радиолокационном зондировании морской поверхности декаметровыми радиоволнами: угловой размер $\Delta\varphi$ в азимутальном направлении формируется диаграммой направленности локатора, продольный размер Δr в радиальном направлении – длительностью радиоимпульса, при этом угол падения $\theta_c\approx\pi/2.$

Воспользовавшись выражением (45) для $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2,$ получим

$$B(0)\approx 8\pi r_c(\Delta r)^2\int\limits_{\pi}^{\pi+\Delta\varphi}\mathrm{d}\varphi_1\times$$

$$\times\int_0^\infty d\chi_1 \left| f_2(r_c,\varphi_s;\vec{\chi}_1)\right|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}_1)\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}. \qquad (65)$$

Если при нескольких осцилляциях “диаграммного” множителя $\frac{\sin^2 X_r}{X_r^2}$ остальная часть произведения в (65) практически не меняется, ее можно вынести за знак интеграла, приравняв к значению в точке $\chi_1 = \chi_{1c}$. Заменив переменную χ_1 на X_r, приходим к результату

$$B(0) = \frac{\sigma^2}{8} MS, \qquad (66)$$

где

$$M = \frac{1}{\Delta\varphi}\int_0^{\Delta\varphi} d\varphi_s \frac{\left|J_{12}\right|_c^2 \left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1s})\right|_c^2}{R_c^4}\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1s})$$

означает усреднение по углу φ_s, причем $\vec{\chi}_{1s} = (\chi_{1c}\cos\varphi_{s1}, \chi_{1c}\sin\varphi_s)$, $\chi_{1c} = 2k\alpha_{\perp c} \equiv 2k\sin\theta_c$, $\varphi_s = \varphi_1 - \pi$.

“Малая” площадка $\left(\Delta\varphi \ll 2(kR_c)^{-1/2}(\sin\theta_c)^{-1},\ \cos\theta_c \ll (2/\Delta r)(R_c/k)^{1/2}\right)$.

Для функции $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ следует взять формулу (46). Предположения, сделанные при выводе (66), позволяют получить для интенсивности выражение

$$B(0) \approx \frac{\sigma^2}{8}\frac{\left|J_{12}\right|_c^2 \left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1c})\right|_c^2}{R_c^4}\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1c})S, \qquad (67)$$

которое продолжает формулу (66) для “нескользящего” рассеяния на углы падения $\theta_c \approx \pi/2$. Напомним, что $\vec{\chi}_{1c} = 2k\vec{\alpha}_{\perp c} \equiv (2k\sin\theta_c\cos\varphi_c,\ 2k\sin\theta_c\sin\varphi_c)$.

Связь (66) и (67) с результатами “упрощающей” гипотезы такая же, как и у (60) и (64).

11. Частотный спектр $S(\omega)$

Для закона дисперсии $\omega(\chi_1) = \sqrt{g\chi_1}$ в формуле (8) δ-функция равна

$$\delta\left[\Delta\omega - j\omega_1(\chi_1)\right] = \frac{2\sqrt{2k\chi_{1s}}}{\omega_{Br}}\delta(\chi_1 - \chi_{1s}), \qquad (68)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $j = \mathrm{sign}(\Delta\omega)$, $\omega_{Br} = \sqrt{2gk}$, а $\chi_{1s} = 2k\xi_0^2 \equiv 2k\left(\Delta\omega/\omega_{Br}\right)^2$ – нуль δ-функции.

В результате подстановки (68) в (8) и интегрирования по χ_1 получим

$$S(\omega) \equiv S(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{2\sqrt{2k\chi_{1s}}}{\omega_{Br}}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \left|f_1(\vec{\chi}_{1s})\right|^2 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_{1s}). \qquad (69)$$

12. Нескользящее рассеяние

“Большая” площадка

Для частот $\Delta\omega$ волн, рассеянных стационарными точками θ_s, далекими от границ “свет–тень” (θ_u и θ_l), в формулу (69) следует подставить выражение (37) при $\vec{\chi}_1 = \vec{\chi}_{1s}$, $\varphi_s = \varphi_1 - \pi$, $\pi < \varphi_1 < \pi + \Delta\varphi$. В результате получим

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{\sigma^2}{16}\frac{r_s^{3/2}R_s^{1/2}}{\omega_{Br}\alpha_{zs}^2}\times$$

$$\times\int_0^{\Delta\varphi} d\varphi_s \frac{\left|J_{12}\right|_s^2 \left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1s})\right|_c^2}{R_s^4}\tilde{W}_j(-\vec{\chi}_{1s}). \qquad (70)$$

Для частот, формируемых переходной областью ($\theta_s \sim \theta_l$ либо $\theta_s \sim \theta_u$) для функций $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ следует взять выражение, получающееся из (36) после подстановки в него величины $\left|\Delta Q_\theta\right|^2$, определенной через интегралы Френеля (см. формулу (П6)).

“Малая” площадка

В этом случае подстановка (50) в (69) приводит к выражению

$$S(\omega_0+\Delta\omega)\approx$$

$$\approx\frac{\sigma^2}{16}\frac{k^2}{\omega_{Br}}S^3\int\limits_{\pi}^{\pi+\Delta\varphi}\mathrm{d}\varphi_1\frac{\left|J_{12}\right|_c^2\left|\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_{1s})\right|_c^2}{R_c^4}\tilde{W}(\vec{\chi}_{1s})\times$$

$$\times\left(\frac{\sin^2X_\varphi}{X_\varphi^2}\frac{\sin^2X_r}{X_r^2}\right)_{\chi_1=\chi_{1s}}. \qquad (71)$$

Если в этом выражении диаграммные множители умножаются на достаточно медленно меняющуюся функцию $\varphi_s=\varphi_1-\pi,$ возможны дальнейшие упрощения, аналогичные (64),

$$S(\omega_0+\Delta\omega)\approx\frac{\sigma^2}{16}\frac{k\Delta r\left|\xi_0\right|^3}{\omega_{Br}}\frac{\left|J_{12}\right|_c^2\left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1s})\right|_c^2}{R_c^4}\times$$

$$\times\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1s})S\frac{\sin^2X_r}{X_r^2}, \qquad (72)$$

где множитель $\dfrac{\sin^2X_r}{X_r^2}=\dfrac{\sin^2k\Delta r\left|\xi_0^2-\xi_{0c}^2\right|}{(k\Delta r)^2\left|\xi_0^2-\xi_{0c}^2\right|^2}$ описывает форму спектра. В выражении для $\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1s})$ можно положить $\vec{\chi}_{1s}=\vec{\chi}_{1c}$ в силу плавной зависимости от $\vec{\chi}_{1s}$. В определенных случаях это можно сделать и в выражении для $\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1s})$.

13. Скользящее рассеяние

“Большая” площадка

Взяв для функции $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ выражение (45), получим

$$S(\omega_0+\Delta\omega)\approx$$

$$\approx\frac{\sigma^2}{16\pi}\frac{k\Delta r\left|\xi_0\right|}{\omega_{Br}}S\frac{1}{\Delta\varphi}\int\limits_0^{\Delta\varphi}\mathrm{d}\varphi_s\frac{\left|J_{12}\right|_c^2\left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1s})\right|_c^2}{R_c^4}\times$$

$$\times\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1s})S\left(\frac{\sin^2X_r}{X_r^2}\right)_{\chi_1=\chi_{1s}}. \qquad (73)$$

Для случая медленно меняющегося множителя при $\left(\dfrac{\sin^2X_r}{X_r^2}\right)_{\chi_1=\chi_{1s}}$ его можно вынести (при $\vec{\chi}_{1s}=\vec{\chi}_{1c}^0$) из под знака интеграла, в результате чего формула (73) преобразуется к виду

$$S(\omega_0+\Delta\omega)\approx\frac{\sigma^2}{16\pi}\frac{k\Delta r\left|\xi_0\right|}{\omega_{Br}}\frac{\left|J_{12}\right|_c^2\left|\tilde{J}_{01}(-\vec{\chi}_{1c}^0)\right|_c^2}{R_c^4}\times$$

$$\times\tilde{W}(-\vec{\chi}_{1c}^0)S\left(\frac{\sin^2X_r}{X_r^2}\right)_{\chi_1=\chi_{1s}}, \qquad (74)$$

где $\vec{\chi}_{1c}^0=(2k\xi_0^2\sin\theta_c\cos\varphi_c,\ 2k\xi_0^2\sin\theta_c\sin\varphi_c).$

“Малая” площадка

Для $\left|f_1(\vec{\chi}_1)\right|^2$ следует взять выражение (46), при $\left|\delta\varphi_s\right|=0$ совпадающее с (50). В результате получим продолжение выражения (73) для “нескользящего” рассеяния на случай $\theta_c\ll\left(kR_c^{1/2}\right).$

Выражение (70) совпадает с результатами, следующими из “упрощающей” гипотезы [4]. Для частот, формируемых стационарными точками θ_s в переходной области ($\theta_s\sim\theta_l$ либо $\theta_s\sim\theta_u$), а также малой в радиальном направлении площадкой применение упрощающей гипотезы ([6], с. 139, формула (2)) приводит к неправильному результату. Заключение авторов работы [6] на с.139 о том, что “…малость рассеивающей площадки играет роль частотного фильтра” (идеального), является следствием несовместимости малости площадки с предположением о возможности замены пределов интегрирования по разности координат двух рассеивающих точек на бесконечные при малом радиусе корреляции случайных неровностей.

Спектр для “малой” в радиальном направлении площадки во многом определяется зависимостью диаграммного множителя от частоты $\Delta\omega$, который при $\Delta\omega = \Delta\omega_c$ имеет максимум равный единице. Последующие максимумы, равные $\left[(m+1/2)\pi\right]^{-2}$ при значениях аргумента $(X_r)_{\chi_1=\chi_{1s}} = (m+1/2)\pi$, где $m = \pm 1, \pm 2, ...,$ чередуются с минимумами, равными нулю при $(X_r)_{\chi_1=\chi_{1s}} = m\pi$. Ширина главного лепестка $(m = \pm 1)$ определяется из условия $2(X_r)_{\chi_1=\chi_{1s}} = 2\pi$, откуда

$$2\left|\Delta\xi_0\right| \equiv 2\left|\xi_{0c} - \left|\xi_0\right|\right| = \frac{2\pi}{2k\Delta r \sin\theta_c} = \frac{\lambda}{2\Delta r \sin\theta_c} \ll 1. \qquad (75)$$

Напомним, что $\xi_{0c} = \Delta\omega_c / \omega_{Br}$, $\omega_{Br} = \sqrt{2gk}$, $\xi_0 = \Delta\omega/\omega_{Br}$, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

14. Обсуждение результатов

Область применимости рассматриваемых решений ограничивается условиями малости отбрасываемых членов асимптотического ряда по сравнению с оставленным главным. В общем виде для однократного интеграла условия установлены лишь для случая изолированных стационарных точек ([13], с. 474-475, 532-533), расположенных вдали от концов контура интегрирования. Главная трудность этих оценок заключается в преобразовании степенных рядов по переменной интегрирования к рядам с “перевальной” переменной. Кроме малости изменения предэкспоненциального множителя, на характерном масштабе изменения фазы ([13], с. 532-533, формулы (2), (6а), (6б)) эти условия требуют, чтобы в малой окрестности стационарной точки изменение фазы обеспечивалось квадратичными членами разложения, т. е. чтобы величина Φ_s'' не была слишком малой ([13], с. 533, формула (6в)). Это осуществимо лишь при отсутствии близко расположенных других стационарных точек и может быть сформулировано в виде двух неравенств:

$$\left|\left(\Phi_s^{(3)}\right)^2 \left(\Phi_s''\right)^{-3}\right| \ll 1, \qquad (76)$$

$$\frac{1}{2}\left|\Phi_s^{(4)} \left(\Phi_s''\right)^{-2}\right| \ll 1. \qquad (77)$$

В интеграле (21) по переменной $\varphi_\perp$ соответствующие производные равны:

$$\Phi_s'' = \chi_1 r_s, \qquad \Phi_s^{(3)} = 0, \qquad \Phi_s^{(4)} = -\chi_1 r_s.$$

При этом (76) выполняется всегда, а (77) приводит к условию $\alpha_{\perp s}^2 \gg (4kR_s)^{-1}$, или $\sin\theta_s \gg (4kR_s)^{-1/2}$, что при наклонном рассеянии $(\theta_s \neq 0)$ в волновой зоне $(kR_s \gg 1)$ достигается без труда.

В интеграле (25) по переменной r_1 имеем:

$$\Phi_s'' = 2k\alpha_{zs}^2 / R_s,$$

$$\Phi_s^{(3)} = -\left(3\alpha_{\perp s}/R_s\right)\left(2k\alpha_{zs}^2/R_s\right),$$

$$\Phi_s^{(4)} = -3\left[\left(1 - 5\alpha_{\perp s}^2\right)/R_s\right]\left(2k\alpha_{zs}^2/R_s\right).$$

При этом (76) и (77) приводят к требованию

$$\mathrm{tg}^2\,\theta_s \ll (2/9)kR_s,$$

$$\text{или} \qquad \psi_s \equiv \pi/2 - \theta_s \gg (9/2kR_s)^{-1/2} \sim \sqrt{\lambda/R_s},$$

что для площадок с $\Delta r \sim R_s$ исключает из рассмотрения малые углы скольжения ψ_s порядка характерного угла $\sqrt{\lambda/R_s}$ френелевской зоны.

Для площадки с продольным размером $\Delta r \ll R_c$ углы скольжения $\psi_c \sim (R_c/\Delta r) \times (kR_c)^{-1/2} \gg (kR_c)^{-1/2}$ являются границей, отделяющей область значений ψ_c, при которых можно использовать приближение дифракции Фраунгофера, от области, где корректным является метод стационарной фазы как для дальней, так и для ближней зоны.

Заметим, что все производные $\Phi_s^{(n)}$ по r_1 при $n > 4$, как и производные при $n = 2, 3, 4$, содержат множителем $\alpha_{zs}^2 \to 0$ при $z_0 \to 0$. Это свидетельствует об одномерной фокусировке [8], являющейся следствием принятой нами постановки задачи (точечный источник и обратное рассеяние).

Анализ полученных решений позволяет объяснить физический механизм рассеяния при произвольном значении кривизны фазового фронта сферической волны в пределах рассеивающей площадки.

Как для “малой” (дальняя зона), так и для “большой” (ближняя зона) площадки статистически независимыми рассеивателями являются “случайные плоские решетки” (фурье-составляющие случайного поля неровностей). В пределах “малой” площадки фазовые поверхности сферических волн “почти плоские”. Среди “случайных плоских решеток” находятся такие, рассеяние на которых синфазно по всей площадке. Они и отбирают область значений $\vec{\chi}_1$ (т. е. φ_1 и θ_1), формирующих главные максимумы диаграммных множителей. Волновой вектор этих решеток $\vec{\chi}_{1c} = -2k\vec{\alpha}_{\perp c}$. При удалении от этой величины, т. е. для других решеток, происходит расфазировка волн, рассеянных отдельными частями площадки, что и является причиной осциллирующего убывания диаграммных множителей. При этом угловые размеры лепестков диаграммных множителей и площадки взаимно обратные (формулы (39), (40), (56) и (57)).

В пределах “большой” площадки синфазность рассеяния сферических волн на “случайной плоской решетке” невозможна по причине “деструктивной интерференции” ([16], с. 421), приводящей к взаимному погашению вкладов от различных частей площадки. Для отдельно взятой решетки с волновым вектором $\vec{\chi}_1$ интерференционные колебания вкладов элементов площадки происходят с нарастающей частотой с удалением от стационарной для данного $\vec{\chi}_1$ точки $\vec{r}_s$. В результате частичного взаимного погашения вкладов остается лишь часть вклада от малой окрестности стационарной точки, если таковая находится в освещенной зоне (точки в тени можно не учитывать в силу их малого вклада). Эффективные размеры рассеивающей области для заданного $\vec{\chi}_1$ равны $\left|h_{s\varphi}\right| \sim \sqrt{2/\chi_1 r_s}$ и $\left|h_{s\theta}\right| \sim (kR_s)^{-1/2}$, а волновой вектор этой “резонансной решетки” $\vec{\chi}_1 = -2k\vec{\alpha}_{\perp s}$. Переходу к другой точке рассеяния соответствует и другая резонансная решетка. Заметим, что эффективные размеры $\left|h_{s\varphi}\right|$, $\left|h_{s\theta}\right|$ много меньше угловых размеров $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ “большой” площадки. Поэтому сложение вкладов в рассеяние от всех резонансных решеток приводит в сумме по всем $\vec{\chi}_1$, т. е. по φ_1, θ_1, к эффективным размерам φ_1, θ_1 приближенно равным размерам $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ рассеивающей площадки.

Итогом работы является получение в определенной области физических параметров решения задачи обратного рассеяния без необоснованных упрощающих предположений о корреляционной функции рассеянного поля. Из схемы рассмотрения выпадает переходная область углов рассеяния, примыкающая к углу скольжения порядка угла $\sqrt{\lambda/R_c}$ френелевской зоны. В этой области, по-видимому, необходима более общая постановка задачи о двухпозиционном рассеянии и равномерные (хотя бы локально) асимптотические приближения. Решение важной практической задачи рассеяния при углах скольжения $\psi_c \ll \sqrt{kR_c}$ получено в виде комбинации метода стационарной фазы для азимутального угла и приближения дифракции Фраунгофера для радиальной переменной.

Приложение

В асимптотической оценке БОИ вида (21), (28) ограничимся главным членом разложения (см [3], Приложение) записанным в соответствии с рекомендациями [13] (с. 465, с. 478). Обобщение результатов, приведенных в [13], содержится в работах [11], [14]. Для главного члена асимптотического разложения интеграла (21) имеем выражение

$$I_\varphi \approx e^{i\Phi_s} f_2(r_1, \varphi_s; \vec{\chi}_1) h_{s\varphi} \Delta Q_\varphi, \qquad (\text{П}1)$$

где Φ_s и $h_{s\varphi}$ заданы соотношениями (23) и (24), а величина ΔQ_φ равна

$$\Delta Q_\varphi = Q(y_l) - Q(y_u) = e^{-i\pi/4} \int\limits_{\mu_l}^{\mu_u} e^{i\mu^2} \mathrm{d}\mu. \qquad (\text{П}2)$$

Здесь $Q(y)$ – дополнение интеграла вероятности;

$$y_{l,u} = \mu_{l,u} e^{-i\pi/4}, \qquad (\text{П3})$$

$$\mu_l = \pm\sqrt{|\Phi_s - \Phi_l|} \quad \text{при} \quad \varphi_l - \varphi_s \gtrless 0, \qquad (\text{П4})$$

$$\mu_u = \pm\sqrt{|\Phi_s - \Phi_u|} \quad \text{при} \quad \varphi_u - \varphi_s \gtrless 0, \qquad (\text{П5})$$

причем Φ_s, Φ_l, Φ_u – значения фазы (13) в точках $\varphi_\perp = \varphi_s, \varphi_l, \varphi_u$ соответственно.

Формулу (П2) можно записать и в виде комбинации интегралов Френеля $C(z)$ и $S(z)$:

$$\Delta Q_\varphi = e^{-i\pi/4}\sqrt{\pi/2}\Big\{\Big[C\Big(\sqrt{2/\pi}\mu_u\Big) - C\Big(\sqrt{2/\pi}\mu_l\Big)\Big] +$$
$$+ i\Big[S\Big(\sqrt{2/\pi}\mu_u\Big) - S\Big(\sqrt{2/\pi}\mu_l\Big)\Big]\Big\}. \qquad (\text{П6})$$

Асимптотика, аналогичная (П2), для интеграла (28) получается заменой $f_2(r_1, \varphi_s; \vec{\chi}_1) \to f_4(\theta_s)$, $h_{s\varphi} \to h_{s\theta}$, $\Delta Q_\varphi \to \Delta Q_\theta$. При этом, взяв во внимание (29), (31), (33), находим:

$$\Phi_s = 2kR_s\alpha_{zs}^2, \qquad (\alpha_{zs} \equiv \cos\theta_s), \qquad (\text{П7})$$

$$h_{s\theta} = e^{i\pi/4}\big/\sqrt{kR_s}, \qquad (\text{П8})$$

$$\mu_l = \pm\sqrt{|\Phi_s - \Phi_l|} \quad \text{при} \quad \theta_l - \theta_s \gtrless 0, \qquad (\text{П9})$$

$$\mu_u = \pm\sqrt{|\Phi_s - \Phi_u|} \quad \text{при} \quad \theta_u - \theta_s \gtrless 0. \qquad (\text{П10})$$

Величины $|h_{s\varphi}|$ и $|h_{s\theta}|$ являются эффективными размерами областей соответствующих переменных, $\varphi_\perp$ либо θ_{01}, формирующих асимптотические значения интегралов по этим переменным. Для переменной $\varphi_\perp$ величина $|h_{s\varphi}| = (kR_s)^{-1/2}(\sin\theta_s)^{-1}$, а для переменной θ_{01} соответственно $|h_{s\theta}| = (kR_s)^{-1/2}$. В обоих случаях эффективные области порядка величины характерного угла $(\lambda/R_s)^{1/2}$.

Для предельных значений "большой" $\big(|\mu_u - \mu_l| \gg 1\big)$ либо "малой" $\big(|\mu_u - \mu_l| \ll 1\big)$ площадки возможны упрощения (П2), основанные на асимптотиках интеграла вероятности.

Случай "большой" площадки

В определенной мере этот случай анализировался в [3]. Информацию о поведении $|\Delta Q_\varphi|^2$ можно получить также из монографии [16] (с. 465).

Вкратце поведение ΔQ_φ сводится к следующему. Величина ΔQ_φ существенным образом зависит от положения стационарной точки φ_s относительно концов интервала интегрирования φ_l и φ_u. В "освещенной" зоне $(\varphi_l \le \varphi_s \le \varphi_u)$ величина $|\Delta Q_\varphi| \approx \sqrt{\pi}$ при достаточной удаленности φ_s как от φ_l, так и φ_u (при этом $|\mu_l| \gg 1$ и $|\mu_u| \gg 1$). Вблизи границы освещенной зоны $\big(|\mu_l| \ll 1$ либо $|\mu_u| \ll 1\big)$ величина $|\Delta Q_\varphi| \approx \sqrt{\pi}/2$ с линейным по $y_{l,u}$ убыванием при движении φ_s из зоны "света" в зону "тени". Далеко в области тени $(\varphi_s < \varphi_l$ либо $\varphi_s > \varphi_u)$ величина $|\Delta Q_\varphi| \approx \big(2|\mu_l|\big)^{-1}$ либо $|\Delta Q_\varphi| = \big(2|\mu_u|\big)^{-1}$ соответственно.

Случай "малой" площадки $|\mu_u - \mu_l| \ll 1$

Проблема оценки ΔQ_φ и ΔQ_θ в этом случае подобна в некоторой мере рассмотренной авторами монографии [15] для задачи о дифракции плоской волны на щели. Факторы, осложняющие в нашем случае анализ – случайные дифракционные решетки вместо щели с равномерным амплитудно-фазовым освещением и произвольные углы падения волны вместо нормального падения. Кроме того, выбранное авторами [15] разложение фазы непригодно для малых углов дифракции $\varphi \sim a/r \ll 1$ (см. [15], с. 105), что неприемлемо для нашего рассмотрения.

Проведем свободную от указанных недостатков оценку ΔQ_φ, ΔQ_θ, основанную на малости $|\mu_u - \mu_l| \ll 1$. Представим (П2) в виде суммы:

$$\Delta Q_\varphi \equiv I = I_1 + I_2, \qquad (\text{П11})$$

где

$$I_1 = e^{-i\pi/4}\int\limits_{\mu_l}^{\mu_c} e^{i\mu^2}\mathrm{d}\mu, \qquad (\text{П12})$$

а I_2 определяется аналогичным выражением с заменой $\mu_l \to \mu_c$, $\mu_c \to \mu_u$.

Для I_1 проведем замену переменной интегрирования $\mu = \mu_c + A_1\xi$, $\mathrm{d}\mu = A_1\mathrm{d}\xi$ и введем обозначения: $A_1 = \mu_l - \mu_c$, $B_1 = \mu_c^2$, $C_1 = \mu_c A_1$, $\mu^2 \approx B_1 + 2C_1\xi + \ldots$ (многоточие означает малые квадратичные члены $\sim|\mu_l - \mu_c|^2 \ll 1$). В формуле (П12) величина $\mu_c = \pm\sqrt{|\Phi_s - \Phi_c|}$ при $\varphi_c - \varphi_s \gtrless 0$, где Φ_c – фаза в срединной точке $\varphi_c = (\varphi_u - \varphi_l)/2$ интервала интегрирования в (20). В результате вычислений получаем

$$I_1 \approx -A_1 e^{i(B_1 + C_1 - \pi/4)}(\sin C_1)/C_1. \qquad (\text{П13})$$

Для I_2 аналогичная замена $\mu = \mu_c + A_2\xi$, где $A_2 = \mu_u - \mu_c$, $C_2 = \mu_c A_2$, $B_2 \equiv B_1$, приводит к выражению

$$I_2 \approx A_2 e^{i(B_2 + C_2 - \pi/4)}(\sin C_2)/C_2. \qquad (\text{П14})$$

В дальнейшем будем считать $\varphi_l = 0$, $\varphi_u = \Delta\varphi \ll 1$, $\varphi_c = \Delta\varphi/2$. Интервал значений $0 \le \varphi_1 \le 2\pi$ можно разбить на четыре части, где μ_l, μ_c, μ_u имеют определенный знак в зависимости от положения стационарной точки φ_s:

а) $0 \le \varphi_1 \le \pi$, $-\pi \le \varphi_s \equiv \varphi_1 - \pi \le 0$, $\mu_l = +|\mu_l|$, $\mu_c = +|\mu_c|$, $\mu_u = +|\mu_u|$;

б) $\pi \le \varphi_1 \le \pi + \Delta\varphi/2$, $0 \le \varphi_s \le \Delta\varphi/2$, $\mu_l = -|\mu_l|$, $\mu_c = +|\mu_c|$, $\mu_u = +|\mu_u|$;

в) $\pi + \Delta\varphi/2 \le \varphi_1 \le \pi + \Delta\varphi$, $\Delta\varphi/2 \le \varphi_s \le \Delta\varphi$, $\mu_l = -|\mu_l|$, $\mu_c = -|\mu_c|$, $\mu_u = +|\mu_u|$;

г) $\pi + \Delta\varphi \le \varphi_1 \le 2\pi$, $\Delta\varphi \le \varphi_s \le \pi$, $\mu_l = -|\mu_l|$, $\mu_c = -|\mu_c|$, $\mu_u = -|\mu_u|$.

Конкретно для случая (а) получим

$$A_1 = \sqrt{2\chi_1 r_1}\left\{\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_l}{2} - \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_c}{2}\right\} \approx$$

$$\approx -\sqrt{2\chi_1 r_1}\,\frac{\Delta\varphi}{4}\cos\frac{\varphi_s - \varphi_c}{2}. \qquad (\text{П15})$$

При этом учтено, что $\sin(\Delta\varphi/8) \approx \Delta\varphi/8$ для “малой” площадки $(\Delta\varphi \ll 1)$. С учетом (П15)

$$C_1 = \mu_c A_1 \approx -\frac{\chi_1 r_1 \Delta\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_c}{c}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_c}{2} =$$

$$= -\frac{\chi_1 r_1 \Delta\varphi}{4}\sin(\varphi_1 - \varphi_c). \qquad (\text{П16})$$

Продолжив аналогичные вычисления, для A_2, и C_2 получим: $A_2 = -A_1 \equiv A$, $C_2 = -C_1 \equiv C$. Можно убедиться, что для случаев (б), (в) и (г) выражения для A_1, A_2, C_1, C_2 остаются такими же.

Складывая I_1 и I_2 с учетом полученных равенств, приходим к результату

$$\Delta Q_\varphi \equiv I = 2Ae^{i(B - \pi/4)}(\sin 2C)/(2C), \qquad (\text{П17})$$

где

$$2A = \sqrt{2\chi_1 r_1}\,\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_s - \varphi_c}{2}, \qquad (\text{П18})$$

$$2C = \frac{\chi_1 r_1 \Delta\varphi}{2}\sin(\varphi_s - \varphi_c). \qquad (\text{П19})$$

Формулы, аналогичные (П6) и (П17), получаются и для ΔQ_θ. Параметры μ_l, μ_c и μ_u в этом случае определяются выражением для фазы (30), которое с учетом (13) имеет вид

$$\Phi(\theta_{01}) = 2kR_{01}(1 - \sin\theta_s \sin\theta_{01}). \qquad (\text{П20})$$

Если $\Phi_s, \Phi_l, \Phi_c, \Phi_u$ – значения фазы (П20) в точках θ_{01}, равных $\theta_s, \theta_l, \theta_c, \theta_u$ соответственно, то

$$|\mu_l| = 2\sqrt{kR_l}\left|\sin\frac{\theta_s-\theta_l}{2}\right|, \qquad (\text{П21})$$

а $|\mu_c|, |\mu_u|$ получаются из (П21) заменой нижнего индекса l на индекс c либо u соответственно. При этом учтено тождество $z_0 \equiv R_{01}\cos\theta_{01}$ для любого текущего значения θ_{01}.

Из треугольников, образованных линиями, соединяющими точку источника $(0, z_0)$ с точками $(r_l, 0)$, $(r_c, 0)$ и $(r_u, 0)$ на плоскости $z = 0$, можно получить:

$$\sqrt{R_l} \approx \sqrt{R_c}(1-\delta_1+\delta_2+\ldots), \qquad (\text{П22})$$

$$\sqrt{R_u} \approx \sqrt{R_c}(1+\delta_1+\delta_2+\ldots), \qquad (\text{П23})$$

где $\delta_1 = \frac{a}{2R_c}\sin\theta_c$, $\delta_2 = \frac{a^2}{2R_c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\theta_c\right)$, $a = \Delta r/2$, а многоточие означает члены более высокого порядка малости в разложении по степеням $a/R_c \ll 1$.

В разложениях $\sin\frac{\theta_s-\theta_c}{2}$ и $\sin\frac{\theta_s-\theta_u}{2}$ также ограничимся квадратичными членами $(\Delta\theta/4)$:

$$\sin\frac{\theta_s-\theta_l}{2} \approx \sin\frac{\theta_s-\theta_c}{2} + \frac{\Delta\theta}{4}\cos\frac{\theta_s-\theta_c}{2} -$$

$$-\frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta\theta}{4}\right)^2\sin\frac{\theta_s-\theta_c}{2}+\ldots. \qquad (\text{П24})$$

В аналогичном разложении для $\sin\frac{\theta_s-\theta_u}{2}$ следует заменить $\Delta\theta/4$ на $(-\Delta\theta/4)$.

Путь дальнейших вычислений повторяет пройденный ранее при получении формулы (П17). Интервал $0 \le \theta_s \le \pi$ разбивается на четыре части: $[0,\theta_l]$, $[\theta_l,\theta_c]$, $[\theta_c,\theta_u]$ и $[\theta_u,\pi/2]$, – в каждой из которых μ_l, μ_u вычисляются с сохранением квадратичных членов $\sim (\Delta r/R_c)^2$. (Напомним, что $\Delta\theta \approx (\Delta r/R_c)\cos\theta_c$.) В результате получим

$$\Delta Q_\theta \approx 2Ae^{i(B-\pi/4)}(2C)^{-1}\sin(2C), \qquad (\text{П25})$$

где

$$2A = 2a\sqrt{\frac{k}{R_c}}\cos\frac{\theta_s+\theta_c}{2}, \quad (2a = \Delta r), \qquad (\text{П26})$$

$$2C = 2ka|\sin\theta_s - \sin\theta_c|, \qquad (\text{П27})$$

$$B = \mu_c{}^2 = 4kR_c\sin^2\frac{\theta_s-\theta_c}{2}. \qquad (\text{П28})$$

При выводе формул (П25)–(П27) мы пренебрегли поправками δA и δC к величинам A и C более высокого, нежели $\Delta r/R_c$, порядка:

$$|\delta A| \approx \frac{a}{4R_c}a\sqrt{\frac{k}{R_c}}\sin\left(2\theta_c - \frac{\theta_s-\theta_c}{2}\right), \qquad (\text{П29})$$

$$|\delta C| \approx \frac{a}{4R_c}2ka\left|\sin\frac{\theta_s-\theta_c}{2}\sin\left(2\theta_c-\frac{\theta_s-\theta_c}{2}\right)\right|. \qquad (\text{П30})$$

Это можно сделать при выполнении условий $|\delta A|/|A| \ll 1$ и $|\delta C| \ll 1$.

Отметим, что при $\theta_c = 0$ величина ΔQ_θ, определяемая формулой (П25), совпадает с “диаграммным” множителем в решении задачи о дифракции на щели [15] (с. 25, формула (1.17)).

Литература

1. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 399-409.

2. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. II. Средняя интенсивность и частотный спектр флуктуаций

поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2008. – Т. 13, №1. – С. 92-98.
3. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. III. Временная корреляционная функция и интенсивность в случае наклонного зондирования при однопозиционной локации // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – Т. 14, №3. – С. 304-313.
4. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. IV. Частотный спектр в случае наклонного зондирования при однопозиционной локации // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – Т. 14, №4. – С. 420-424.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
6. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
7. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 373 с.
8. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Галкин Е. А. Растягаев Д. С. Волновые катастрофы-фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн (обзор). // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т. 51, №10. – С. 1155-1192.
9. Федорюк М. Ф. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
10. Анютин А. П., Боровиков В. А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя: Препр. / АН СССР. Ин-т радиотехники и электроники; №42 (414). – Москва: 1984. – 53 с.
11. Каратыгин В. А., Розов В. А. Метод стационарной фазы для двойного интеграла с произвольно расположенной стационарной точкой // ЖВММФ. – 1972. – Т. 12, №6. – С. 1391-1405.
12. Боровиков В. А. Метод стационарной фазы для двумерных областей с угловыми точками // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36, вып. 5. – С. 777-788.
13. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
14. Каратыгин В. А., Розов В. А. Метод стационарной фазы для интеграла в конечных пределах с произвольно расположенной стационарной точкой // ЖВММФ. – 1970. – Т. 10, №2. – С. 300-312.
15. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. – М.: Связь, 1978. – 248 с.
16. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.

Перехід від ближньої до дальньої зони у розв'язанні задачі зворотнього розсіяння хвиль статистично нерівною поверхнею

А. С. Брюховецький

Для випадку зворотнього розсіяння хвиль статистично нерівною поверхнею визначено асимптотики двократних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій, що визначають часову кореляційну функцію розсіяного поля. При кутах ковзання набагато більших від характерного кута френелевської зони в розрахунках використовується метод стаціонарної фази. Отриманий розв'язок дозволяє граничні переходи до значень фізичних параметрів, що відповідають "великій" та "малій" площадці. Для кута ковзання набагато меншого від френелівського одержано комбінований розв'язок – методом стаціонарної фази за змінним азимутальним кутом та наближенням дифракції Фраунгофера за радіальною змінною. Розрахунки дозволяють встановити зв'язок із розв'язками, побудованими на евристичних спрощуючих гіпотезах.

Near-to-Far Zone Transition in the Problem of Wave Backscattering by a Statistically Rough Surface

A. S. Bryukhovetski

For a case of wave backscattering by a statistically rough surface the asymptotics of twofold integrals of rapidly oscillating functions which determine temporary correlation function of the scattered field are found. At grazing angles much greater than the characteristic angle of the Fresnel zone in calculi, the method of a stationary phase will be utilized. The solution obtained enables passages to the limit to values of physical parameters adequate to "large" and "small" surface elements. For a grazing angle much less than the Fresnel angle the combined solution is the method of a stationary phase on a variable azimuth and approximation of Fraunhofer diffraction on a radial variable. The calculations allow the relationship with solutions based on heuristic simplifying hypotheses.