

## Функція Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої труби

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

*Побудовано функцію Гріна тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої труби довільної (але незмінної по її довжині) форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими і акустично м'якими стінками, а також стінками змішаного типу. Ця функція представляється рядом за акустичними модами труби. Кожен член ряду є суперпозицією прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді відповідно вниз та вгору за течією від акустичного джерела. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти рівномірної осередненої течії в трубі. Ці ефекти стають більш вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу труби, в якому розташоване згадане джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію Гріна зменшується, проявляючись, крім іншого, у зменшенні зазначеної її асиметрії. У випадку ж відсутності течії одержана функція Гріна є симетричною відносно вказаного перерізу. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення, яке дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна–Гордона до його класичного одновимірного аналога і на основі відомого розв'язку останнього одержувати розв'язок першого рівняння.*

**Ключові слова:** функція Гріна, конвективне хвильове рівняння, пряма труба.

Дослідження закономірностей генерації та поширення звуку в трубах різних геометрій є актуальним у автомобіле- та літакобудуванні, архітектурі, медицині, нафтогазовій промисловості, комунальному господарстві тощо [1–4]. Незалежно від типу труб і акустичних джерел у них, такі дослідження в принципі можуть бути проведені на основі методу функцій Гріна. Проте його застосування є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Крім іншого, така можливість залежить від геометрії досліджуваної труби та форми її поперечного перерізу, фізичних властивостей її стінок та умов її закріплення, фізичних властивостей зовнішнього та внутрішнього середовища, акустичних умов на кінцях труби та наявності або відсутності течії в ній тощо. Як засвідчує аналіз наукової літератури, з-поміж конструкцій, геометрія та фізичні властивості яких визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш дослідженими є нескінченні прямі жорсткостінні труби кругової та прямокутної форм поперечного перерізу (див., наприклад, [1, 5–12]). Для них було побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца, а також з їхньою допомогою на основі теореми Гріна було одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених трубах. Проте всі ці результати зазвичай обмежувалися випадком відсутності течії в трубі. Якщо ж наявність течії і бралася до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявлялися лише у неявному вигляді [1, 5, 7, 9–12].

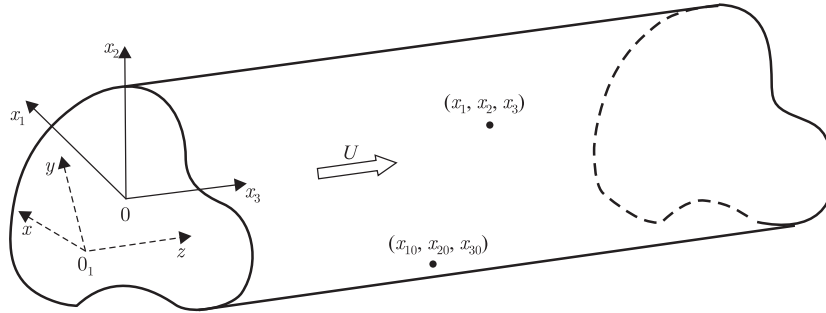


Рис. 1. Геометрія задачі

Цей недолік був частково усунутий у недавніх роботах [13–15]. Там було побудовано функції Гріна хвильового рівняння й рівняння Гельмгольца для прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу із внутрішньою осередненою течією [13], а також функцію Гріна хвильового рівняння для прямої труби прямокутного поперечного перерізу з таким же типом стінок і такою ж течією [14, 15]. У цих функціях, крім іншого, вже в явному вигляді були відображені ефекти зазначеної течії.

У даному дослідженні далі розвиваються результати робіт [13–15] на випадок прямої труби довільної (але незмінної по її довжині) форми поперечного перерізу з акустично жорсткими або акустично м'якими стінками, або ж зі стінками змішаного типу. Одержані при цьому результати мають явну залежність від параметрів течії в трубі.

**Постановка задачі.** На рис. 1 зображено нескінченну пряму трубу довільної (але незмінної по її довжині) форми та площі поперечного перерізу.<sup>1</sup> Її стінки є акустично жорсткими або акустично м'якими, або ж якась їх частина є акустично жорсткою, а інша — акустично м'якою. У цій трубі задано рівномірну осереднену (по її поперечному перерізу) течію рідини зі швидкістю  $U$  в напрямку твірної її стінки, а також довільно розташовані акустичні джерела різної природи. Останні генерують в трубі акустичне поле, яке описується тривимірним *конвективним* хвильовим рівнянням [13]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma, \quad (x_1, x_2) \in A, \quad |x_3| < \infty, \quad |t| < \infty. \quad (1)$$

Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для цієї труби.

У рівнянні (1)  $c_0$  — швидкість звуку в незбуреній рідині;  $p_a$  — акустичний тиск;  $t$  — час;  $\gamma$  задає сумарний розподіл зазначених джерел;  $x_1, x_2, x_3$  — ортогональні (у загальному випадку криволінійні) координати з віссю  $x_3$  уздовж течії;  $A$  — поперечний переріз труби площею  $|A|$ ; друга повна похідна за часом і оператор Лапласа у координатах  $x_1, x_2, x_3$  записуються таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}; \\ \nabla^2 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Тут мається на увазі така форма поперечного перерізу труби і такий тип її стінок, для яких можна знайти її акустичні моди

$h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) є коефіцієнтами Ламе [8]:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}, \quad (3)$$

$$h_1 = h_1(x_1, x_2), \quad h_2 = h_2(x_1, x_2), \quad h_3 = 1;$$

$x, y, z$  — є прямокутними координатами, вибраними таким чином, що їх початок лежить у тому ж поперечному перерізі труби, що і початок системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , а вісь  $z$  співнаправлена з віссю  $x_3$  (див. рис. 1). Крім того, тут, згідно з умовою задачі,  $U = \text{const}$ ,  $\partial A / \partial x_3 = 0$ ,  $|A| = \text{const}$ .

**Функція Гріна. Рівняння та умови, які задовольняє функція Гріна.** Шукана функція Гріна  $G$  описує акустичний тиск у довільній точці труби  $(x_1, x_2, x_3)$  в момент часу  $t$ , який генерується в момент  $t_0$  одиничним точковим імпульсним акустичним джерелом у трубі в точці  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  (див. рис. 1). Вона задовольняє рівняння

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0), \quad (4)$$

$$(x_1, x_2) \in A, \quad (x_{10}, x_{20}) \in A, \quad |x_3| < \infty, \quad |x_{30}| < \infty, \quad |t| < \infty, \quad |t_0| < \infty,$$

в якому

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1 h_2} \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \delta(x_3 - x_{30}) -$$

тривимірна просторова,  $\delta(x_i - x_{i0})$  — одновимірні просторові, а  $\delta(t - t_0)$  — одновимірна часова дельта-функції Дірака;  $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$  і  $\vec{r}_0 = x_{i0} \vec{e}_i$  — радіус-вектори відповідно точки поля і зазначеного джерела;  $\vec{e}_i$  — орт осі  $x_i$ ; оператори  $d^2/dt^2$  і  $\nabla^2$  даються в (2), а також передбачається підсумовування за індексами, що повторюються.

Граничні умови для функції  $G$  відображають відсутність нормальної компоненти акустичної швидкості на поверхні труби  $S$  (у разі акустично жорсткої її стінки):

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (5)$$

(де  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до  $S$ ) або рівність нулевій акустичного тиску на  $S$  (у разі акустично м'якої стінки):

$$G|_S = 0, \quad (6)$$

або ж (у разі акустичної жорсткості якоїсь частини стінки труби (наприклад,  $S_1$ ) і акустичної м'якості решти її стінки ( $S_2 = S - S_1$ )) відсутність зазначених характеристик акустичного поля на цих частинах поверхні  $S$ :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad G|_{S_2} = 0. \quad (7)$$

Крім того, не повинно бути як відбиття звуку на кінцях труби (на нескінченності), так і акустичного поля в усій трубі до початку його генерації зазначеним джерелом:

$$G|_{t < t_0} = 0, \quad (8)$$

а також повинен виконуватися принцип взаємності [8–12]:

$$G(\vec{r}; t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r}_0, -t_0; \vec{r}, -t). \quad (9)$$

**Побудова функції Гріна та її аналіз.** Розв'язок задачі (4)–(9) шукатимемо у вигляді розкладу функції  $G$  в ряд за акустичними модами труби  $\Psi_{nm}$ :

$$G(x_1, x_2, x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) = \sum_n \sum_m G_{nm}(x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) \Psi_{nm}(x_1, x_2). \quad (10)$$

Ці моди задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \nabla_{(x_1, x_2)}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2) &= -k_{nm}^2 \Psi_{nm}(x_1, x_2), \\ \nabla_{(x_1, x_2)}^2 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

(в якому  $k_{nm}$  — модальні хвильові числа у перерізі  $A$ ), залежно від типу стінок труби — одну із граничних умов (5)–(7), і, згідно з постановкою задачі, можуть бути знайдені аналітично або чисельно. Їхня ж кількість (а відтак, і межі сум у (10)) залежить від форми поперечного перерізу труби і типу її стінок.

У (10) невідомими є коефіцієнти  $G_{nm}$ . Для їх визначення підставимо ряд (10) у розписане з урахуванням (2) рівняння (4), помножимо одержаний при цьому вираз скалярно на моди  $\Psi_{nm}$ , а також врахуємо ортогональність функцій  $\Psi_{nm}$ :

$$\begin{aligned} \iint_A \Psi_{nm}(x_1, x_2) \Psi_{sq}(x_1, x_2) dA &= \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2; & (s, q) = (n, m); \\ 0; & (s, q) \neq (n, m); \end{cases} \\ \|\Psi_{nm}\|^2 &= \iint_A \Psi_{nm}^2(x_1, x_2) dA; \quad dA = h_1 h_2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (12)$$

і співвідношення (11). Послідовність таких операцій приводить до одновимірного конвективного рівняння Кляйна–Гордона для  $G_{nm}$  [8, 13–15]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t \partial x_3} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial x_3^2} + k_{nm}^2 G_{nm} &= \\ = \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta(x_3 - x_{30}) \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (13)$$

в якому  $M = U/c_0$  — число Маха течії в трубі, а квадрати норм мод  $\|\Psi_{nm}\|^2$  і межі зміни всіх змінних даються відповідно у (12) і (4).

Подальше введення нових безрозмірних змінних

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{\lambda x_3}{l}, \quad X_{30} = \frac{\lambda x_{30}}{l}, \quad T = \lambda^{-1} \frac{c_0 t}{l} + M \frac{\lambda x_3}{l}, \\ T_0 &= \lambda^{-1} \frac{c_0 t_0}{l} + M \frac{\lambda x_{30}}{l}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

(де  $l$  — масштаб довжини, вибір якого пояснюється після співвідношення (17)) дозволяє позбутися у рівнянні (13) доданків, які містять число Маха течії і переписати його у класичному вигляді [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial X_3^2} + k_{nm}^2 l^2 G_{nm} = \\ = l^2 \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta\left(\frac{l}{\lambda}(X_3 - X_{30})\right) \delta\left(\frac{\lambda l}{c_0}(T - T_0 - M(X_3 - X_{30}))\right) \end{aligned} \quad (15)$$

в області

$$|X_3| < \infty, \quad |X_{30}| < \infty, \quad |T| < \infty, \quad |T_0| < \infty.$$

Розв'язком класичного рівняння Кляйна–Гордона (15) у вказаній області є суперпозиція прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від імпульсного джерела, розташованого у точці  $X_3 = X_{30}$  [8, 13–15]:

$$\begin{aligned} G_{nm} = \frac{c_0}{2} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} [H(X_{30} - X_3)H(T - T_0 + X_3 - X_{30}) + \\ + H(X_3 - X_{30})H(T - T_0 - (X_3 - X_{30}))] J_0(k_{nm} l \sqrt{(T - T_0)^2 - (X_3 - X_{30})^2}). \end{aligned} \quad (16)$$

Тут  $H(\dots)$  — функція Хевісайда;  $J_0(\dots)$  — циліндрична функція Бесселя першого роду порядку 0, а також було взято до уваги умову випромінювання у нескінченність, яку має задовольняти функція  $G$ .

Тоді підстановка (14) у (16) дає остаточні вирази для  $G_{nm}$  у (10):

$$\begin{aligned} G_{nm} = \frac{c_0}{2} \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \left[ H\left(\frac{\lambda}{l}(x_{30} - x_3)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) + \right. \\ \left. + H\left(\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) \right] \times \\ \times J_0\left(k_{nm} l \sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{l^2}(t - t_0)(x_3 - x_{30}) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{l^2}(x_3 - x_{30})^2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Бачимо, що параметр  $l$  не впливає на значення жодної з функцій у (17), а відтак і на значення як самих коефіцієнтів  $G_{nm}$ , так і функції Гріна (10) (оскільки функції  $\Psi_{nm}$  і квадрати їхніх норм  $\|\Psi_{nm}\|^2$ , а також функція  $J_0$  у (17) взагалі не залежать від  $l$ , а знаки аргументів усіх функцій Хевісайда в (17) не залежать від значення параметра  $l > 0$ ). Це вказує на те, що масштаб довжини  $l$  у перетворенні (14) можна вибирати довільно.

Наявність співвідношень (17) дозволяє на основі (10) записати вираз для шуканої функції Гріна:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, t; x_{10}, x_{20}, x_{30}, t_0) = \\ = \frac{c_0}{2} \left[ H\left(\frac{\lambda}{l}(x_{30} - x_3)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) + \right. \\ \left. + H\left(\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(x_3 - x_{30})\right) \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_n \sum_m \frac{\Psi_{nm}(x_{10}, x_{20})}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x_1, x_2) J_0(k_{nm} l \sqrt{\xi}), \quad (18)$$

де

$$\xi = \frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2} (t - t_0)^2 + 2 \frac{c_0 M}{l^2} (t - t_0) (x_3 - x_{30}) + (M^2 - 1) \frac{\lambda^2}{l^2} (x_3 - x_{30})^2.$$

Бачимо, що функція (18) представляється рядом за акустичними модами труби  $\Psi_{nm}$ . Кожен член цього ряду є сумою прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вниз та вгору за течією від акустичного джерела, розташованого у перерізі труби  $x_3 = x_{30}$ . Крім того, функція (18) задовольняє умову причинності (8) і принцип взаємності (9), а також одну із граничних умов (5)–(7) та умову випромінювання у нескінченність.

Подальший аналіз виразу (18) свідчить про те, що в одержаній функції Гріна через числа  $M$  і  $\lambda$  відображено ефекти досліджуваної течії. Ці ефекти стають більш вагомими зі збільшенням  $M$ , зумовлюючи, крім іншого, появу і подальше збільшення асиметрії функції  $G$  відносно перерізу  $x_3 = x_{30}$ , в якому розташоване зазначене джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію  $G$  зменшується, спричиняючи, зокрема, зменшення вказаної її асиметрії. У випадку ж відсутності течії в трубі ( $M = 0$ ,  $\lambda = 1$ ) функція (18) стає симетричною відносно перерізу  $x_3 = x_{30}$ .

На закінчення зробимо такі висновки.

1. Побудовано функцію Гріна  $G$  тривимірного конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої труби довільної (але незмінної по її довжині) форми та площі поперечного перерізу з акустично жорсткими і акустично м'якими стінками, а також зі стінками змішаного типу.

2. Ця функція представляється рядом за акустичними модами труби. Кожен член ряду є суперпозицією прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді відповідно вниз та вгору за течією від акустичного джерела.

3. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображено ефекти рівномірної осередненої течії в трубі. Ці ефекти стають більш вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції  $G$  відносно перерізу труби  $x_3 = x_{30}$ , в якому розташоване зазначене джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію  $G$  зменшується, проявляючись, крім іншого, у зменшенні зазначеної її асиметрії. У випадку ж відсутності течії в трубі функція  $G$  є симетричною відносно перерізу  $x_3 = x_{30}$ .

4. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення (14), яке дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна–Гордона (13) до його класичного одновимірного аналогу (15) і, на основі відомого розв'язку останнього, одержувати розв'язок першого рівняння.

5. Запропонований у даній роботі підхід створює основи для подальшого розроблення аналітичних методів кількісного знаходження характеристик акустичних полів у каналах з нерегулярною геометрією і внутрішньою течією.

## Цитована література

1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Ч. 1. Загальна теорія // Акуст. вісник. – 2003. – **6**, № 3. – С. 3–9.
2. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2000. – **32**. – P. 347–382.

3. *Вовк І. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С.* Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромех. – 2009. – **11**, № 4. – С. 17–30.
4. *Young D. F.* Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Eng. – 1979. – **101**. – P. 157–175.
5. *Davies H. G., Ffowcs Williams J. E.* Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech. – 1968. – **32**, No 4. – P. 765–778.
6. *Doak P. E.* Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): the effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib. – 1973. – **31**, No 1. – P. 1–72.
7. *Blake W. K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols. – New York: Acad. Press, 1986. – 974 p.
8. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics: Vol. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 997 p.
9. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
10. *Howe M. S.* Hydrodynamics and sound. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. – 463 p.
11. *Гринченко В. Т., Вовк І. В., Матцпура В. Т.* Основи акустики. – Київ: Наук. думка, 2007. – 640 с.
12. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. – Москва: Машиностроение, 1981. – 294 с.
13. *Борисюк А. О.* Функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу з осередненою течією // Акуст. вісн. – 2011. – **14**, № 4. – С. 9–17.
14. *Borysyuk A. O.* Green's function of the convective wave equation for a rigid rectangular pipe // Наукоємні технології. – 2014. – No 3(23). – С. 374–378.
15. *Борисюк А. О.* Функція Гріна конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного поперечного перерізу // Доп. НАН України. – 2015. – № 3. – С. 40–44.

## References

1. *Borysyuk A. O.* Acoustic Bulletin, 2003, **6**, No 3: 3–9 (in Ukrainian).
2. *Berger S. A., Jou L.-D.* Ann. Rev. Fluid Mech., 2000, **32**: 347–382.
3. *Vovk I. V., Grinchenko V. T., Malyuga V. S.* Appl. Hydromech., 2009, **11**, No 4: 17–30 (in Russian).
4. *Young D. F.* J. Biomech. Eng., 1979, **101**: 157–175.
5. *Davies H. G., Ffowcs Williams J. E.* J. Fluid Mech., 1968, **32**, No 4: 765–778.
6. *Doak P. E.* J. Sound Vib., 1973, **31**, No 1: P. 1–72.
7. *Blake W. K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration. In 2 vols., New York: Acad. Press, 1986.
8. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. Vol. 1., New York: McGraw-Hill, 1953.
9. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
10. *Howe M. S.* Hydrodynamics and sound, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
11. *Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matcypura V. T.* Fundamentals of Acoustics. Kiev: Nauk. Dumka, 2007 (in Ukrainian).
12. *Godstein M. E.* Aeroacoustics, Moscow: Mashynostroenie, 1981 (in Russian).
13. *Borysyuk A. O.* Acoustic Bulletin, 2011, **14**, No 4: 9–17 (in Ukrainian).
14. *Borysyuk A. O.* Science-Based Technologies, 2014, No 3 (23): 374–378.
15. *Borysyuk A. O.* Dop. of the NAS of Ukraine, 2015, No 3: 40–44 (in Ukrainian).

А. А. Борисюк

## Функция Грина трехмерного конвективного волнового уравнения для бесконечной прямой трубы

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

*Построена функция Грина трехмерного конвективного волнового уравнения для бесконечной прямой трубы произвольной (но неизменной по ее длине) формы и площади поперечного сечения с акустически жесткими и акустически мягкими стенками, а также стенками смешанного типа. Эта функция представляется рядом по акустическим модам трубы. Каждый член ряда является суперпозицией прямой и обратной волн, распространяющихся на соответствующей моде соответственно вниз и вверх по течению от акустического источника. В построенной функции Грина в явном виде отражены эффекты равномерного осредненного течения в трубе. Эти эффекты становятся более существенными с увеличением числа Маха течения, приводя, в частности, к появлению и дальнейшему увеличению асимметрии функции относительно поперечного сечения трубы, в котором находится упомянутый источник. И наоборот, с уменьшением числа Маха весомость влияния течения на функцию Грина уменьшается, проявляясь, кроме прочего, в уменьшении указанной ее асимметрии. В случае же отсутствия течения полученная функция Грина является симметричной относительно этого сечения. В процессе построения функции Грина предложено преобразование, позволяющее сводить одномерное конвективное уравнение Кляйна–Гордона к его классическому одномерному аналогу и на основании известного решения последнего получать решение первого уравнения.*

**Ключевые слова:** функция Грина, конвективное волновое уравнение, прямая труба.

А. О. Borisyuk

## Green's function of the three-dimensional convective wave equation for an infinite straight pipe

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*Green's function of the three-dimensional convective wave equation for an infinite straight pipe of arbitrary (but constant along its length) cross-sectional shape and area, having either acoustically rigid or acoustically soft walls or the walls of a mixed type, is obtained. This function is represented by a series of the pipe acoustic modes. Each term of the series is a superposition of the direct and reverse waves propagating in the corresponding mode downstream and upstream of the acoustic source, respectively. In the Green's function, the effects of a uniform mean flow in the pipe are directly reflected. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and the further growth of the function asymmetry about the pipe cross-section in which the noted source is located. Vice versa, a decrease of the Mach number results in a decrease of the effects and, in particular, a decrease of the indicated function asymmetry. In the absence of a flow, the Green's function is symmetric about the noted cross-section. A transformation is suggested that allows one to reduce the one-dimensional convective Klein-Gordon equation to its classical one-dimensional counterpart and, by proceeding from the known solution of the later equation, to obtain a solution to the former one.*

**Keywords:** Green's function, convective wave equation, straight pipe.