ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко

Задача Колмогорова про існування абсолютно монотонної і кратно монотонної функції з заданими нормами похідних

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Розв'язано задачу Колмогорова про існування функції з заданими нормами похідних на класах кратно монотонних і абсолютно монотонних функцій у випадку довільного числа норм. Також показано зв'язок задачі Колмогорова і проблеми моментів Маркова.

Ключові слова: задача Колмогорова, кратно монотонна функція, абсолютно монотонна функція, нерівності для похідних.

1. Позначення та постановка задачі. Через $L_\infty(\mathbb{R}_-)$ позначимо простір істотно обмежених вимірних функцій $x\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ зі звичайною нормою $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbb{R}_-)}$.

Для $r \in \mathbb{N}$ через $L^r_\infty(\mathbb{R}_-)$ будемо позначати простір функцій $x\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, що мають локально абсолютно неперервну похідну порядку $r-1$, $x^{(0)} = x$, і таких, що $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R}_-)$. Покладемо $L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-) = L^r_\infty(\mathbb{R}_-) \bigcap L_\infty(\mathbb{R}_-)$.

Для $x \in \mathbb{R}$ і $r \in \mathbb{N}$ покладемо $x^r_+ := (\max\{x, 0\})^r$.

Ми розглядаємо задачу Колмогорова про існування функції з заданими нормами похідних у нижченаведеній постановці.

Задача Колмогорова. Нехай задано клас функцій $X \subset L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і довільну систему d цілих чисел $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_d = r$. Знайти необхідні і достатні умови на систему додатних чисел $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_d}$, які б гарантували існування функції $x \in X$ такої, що $\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i}$, $i = 1, \ldots, d$.

Нехай задано $d \in \mathbb{N}$ і цілі числа $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_d = r$. Покладемо $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$, $\mathbf{k}^2 := (k_2, k_3, \ldots, k_d)$ і ${}^2\mathbf{k}^2 := (k_2, k_3, \ldots, k_{d-1})$. Набір додатних чисел $\{M_{k_1}, \ldots, M_{k_d}\}$ будемо позначати через $M_\mathbf{k}$, набори $\{M_{k_2}, \ldots, M_{k_d}\}$ і $\{M_{k_2}, \ldots, M_{k_{d-1}}\}$ — через $M_{\mathbf{k}^2}$ і $M_{{}^2\mathbf{k}^2}$ відповідно. Для заданих вектора $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ і функції $x \in X$ покладемо

$$M_\mathbf{k}(x) := (M_{k_1}(x), \ldots, M_{k_d}(x)),$$

де

$$M_{k_i}(x) = \|x^{(k_i)}\|, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Будемо називати набір додатних чисел $M_{\mathbf{k}}$ допустимим для класу $X \subset L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, якщо існує функція $x \in X$ така, що $\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$ (або, більш коротко, $M_{\mathbf{k}}(x) = M_{\mathbf{k}}$). Множину всіх ненульових допустимих наборів $M_{\mathbf{k}}$ будемо позначати через $A_{\mathbf{k}}(X)$. Запис $M_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{k}}(X)$ означає, що множина $M_{\mathbf{k}}$ допустима для класу X.

У наведених позначеннях задачу Колмогорова можна сформулювати таким чином. Для заданого класу функцій $X \subset L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і довільної системи d цілих чисел $\mathbf{k}$ охарактеризувати множину $A_{\mathbf{k}}(X)$.

Історію питання та огляд відомих результатів стосовно задачі Колмогорова можна знайти в роботі [1].

2. Класи абсолютно монотонних та кратно монотонних функцій. Нескінченно диференційовну на $\mathbb{R}_-$ функцію будемо називати абсолютно монотонною, якщо вона і всі її похідні невід'ємні на $\mathbb{R}_-$. Через $AM(\mathbb{R}_-)$ будемо позначати клас абсолютно монотонних на $\mathbb{R}_-$ функцій.

Справедливе нижчеподане інтегральне зображення для абсолютно монотонних функцій, що було доведено С. Н. Бернштейном [2].

Теорема 1. *Функція $x(t)$ є абсолютно монотонною тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$x(t) = \int_0^\infty e^{tu} d\beta(u), \qquad t \in \mathbb{R}_-, \tag{1}$$

де $\beta(u)$ — неспадна обмежена функція.

Через $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ позначимо клас функцій $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ таких, що для $k = 0, \ldots, r-1$ похідні $x^{(k)}$ є неспадними та опуклими (див. [3]). Функції з класу $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ будемо називати r-кратно монотонними.

Р. Вільямсон [3] довів таку теорему.

Теорема 2. *Функція $y(t)$ є r-кратно монотонною тоді і тільки тоді, коли*

$$y(t) = \frac{1}{r!} \int_0^\infty (1 + ut)^r_+ d\beta(u), \qquad t \in \mathbb{R}_-, \tag{2}$$

де $\beta(u)$ — неспадна обмежена функція.

Для чисел $a_1, \ldots, a_d$ через $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ позначимо квадратну діагональну матрицю порядку d з числами $a_1, \ldots, a_d$ на головній діагоналі. Для даного вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ позначимо через $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)\mathbf{c}$ результат множення матриці $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ на вектор-стовпець $\mathbf{c}$. Для множини $A \subset \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)\, A := \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)\, \mathbf{c} \colon \mathbf{c} \in A\}.$$

Зв'язок між множинами $A_{\mathbf{k}}(AM(\mathbb{R}_-))$ і $A_{\mathbf{k}}(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-))$ встановлює така теорема.

Теорема 3. *Нехай задано цілі числа $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_d \leqslant r$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$. Тоді*

$$A_{\mathbf{k}}(AM(\mathbb{R}_-)) = \mathrm{diag}((r-k_1)!, \ldots, (r-k_d)!) A_{\mathbf{k}}(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)).$$

При доведенні цієї теореми ми використовуємо (1), (2) і той факт, що усі норми похідних порядків $k_1, \ldots, k_d$ у функцій з класів $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ і $AM(\mathbb{R}_-)$ досягаються в точці нуль.

3. Розв'язок задачі Колмогорова. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_s > 0$, $s = 1, \dots, m$, $a_1 > a_2 > \dots > a_s > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Функцію

$$\phi(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-), \mathbf{a}, \lambda; t) := \frac{1}{r!}\sum_{s=1}^{m} \lambda_s (a_s + t)^r_+$$

називатимемо $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$-ідеальним сплайном з m вузлами. Функцію

$$\phi(AM(\mathbb{R}_-), \mathbf{a}, \lambda; t) := \sum_{s=1}^{m} \lambda_s e^{a_s t}$$

називатимемо $AM(\mathbb{R}_-)$-ідеальним сплайном з m вузлами.

Нехай X позначає один з класів $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ або $AM(\mathbb{R}_-)$. Нами доведено, що якщо $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_d \leqslant r$ і d парне, то для довільного $M_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{k}}(X)$ існує єдиний X-ідеальний сплайн $\phi(X; M_{\mathbf{k}}; t)$ з не більше ніж $d/2$ вузлами, для якого $M_{\mathbf{k}}(\phi(X; M_{\mathbf{k}})) = M_{\mathbf{k}}$.

Розв'язок задачі Колмогорова на класах $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ та $AM(\mathbb{R}_-)$ дає нижчесформульована теорема.

Теорема 4. *Нехай r, $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$ і $0 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_d = r$ — невід'ємні цілі числа, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$. Нехай X позначає один з класів $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ або $AM(\mathbb{R}_-)$. У випадку, коли d непарне,*

$$\{M_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{k}}(X)\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} M_{\mathbf{k}^2} \in \mathrm{int} A_{\mathbf{k}^2}(X) \\ M_{k_1} \geqslant \|\phi^{(k_1)}(X, M_{\mathbf{k}^2})\| \end{matrix}\right\} \bigvee$$

$$\bigvee \left\{\begin{matrix} M_{\mathbf{k}^2} \in \partial A_{\mathbf{k}^2}(X) \bigcap A_{\mathbf{k}^2}(X) \\ k_1 > 0 \\ M_{k_1} = \|\phi^{(k_1)}(X, M_{\mathbf{k}^2})\| \end{matrix}\right\} \bigvee \left\{\begin{matrix} M_{\mathbf{k}^2} \in \partial A_{\mathbf{k}^2}(X) \bigcap A_{\mathbf{k}^2}(X) \\ k_1 = 0 \\ M_{k_1} \geqslant \|\phi^{(k_1)}(X, M_{\mathbf{k}^2})\| \end{matrix}\right\},$$

а у випадку, коли d парне,

$$\{M_{\mathbf{k}} \in A_{\mathbf{k}}(X)\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} M_{\mathbf{k}^2} \in \mathrm{int} A_{\mathbf{k}^2}(X) \\ M_{k_1} > \|\phi^{(k_1)}(X, M_{2\mathbf{k}^2})\| \end{matrix}\right\} \bigvee$$

$$\bigvee \left\{\begin{matrix} M_{\mathbf{k}^2} \in \partial A_{\mathbf{k}^2}(X) \bigcap A_{\mathbf{k}^2}(X) \\ k_1 > 0 \\ M_{k_1} = \|\phi^{(k_1)}(X, M_{2\mathbf{k}^2})\| \end{matrix}\right\} \bigvee \left\{\begin{matrix} M_{\mathbf{k}^2} \in \partial A_{\mathbf{k}^2}(X) \bigcap A_{\mathbf{k}^2}(X) \\ k_1 = 0 \\ M_{k_1} \geqslant \|\phi^{(k_1)}(X, M_{2\mathbf{k}^2})\| \end{matrix}\right\}.$$

Крім того, $M_{\mathbf{k}} \in \mathrm{int} A_{\mathbf{k}}(X)$ тоді і тільки тоді, коли $M_{\mathbf{k}^2} \in \mathrm{int} A_{\mathbf{k}^2}(X)$ і $M_{k_1} > \|\phi^{(k_1)}(X, M_{\mathbf{k}^2})\|$ (при непарному d) або $M_{k_1} > \|\phi^{(k_1)}(X, M_{2\mathbf{k}^2})\|$ (при парному d).

4. Зв'язок задачі Колмогорова та проблеми моментів Маркова. Проблема моментів має достатньо давню історію. Першими її почали систематично вивчати П. Л. Чебишов, А. А. Марков та Т. Стілтьєс. Класичні результати з цієї проблематики можна знайти в монографіях [4, 5]. Ми розглядаємо проблему моментів у такому формулюванні.

Проблема моментів Маркова. Нехай на напівосі $[0, \infty)$ задано систему функцій $u_1, \dots, u_n$. Знайти необхідні та достатні умови на набір чисел $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, для того щоб гарантувати існування неспадної обмеженої функції σ такої, що

$$c_k = \int_0^\infty u_k(t)\, d\sigma(t), \qquad k = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Через $\mathcal{M}(u_1, \ldots, u_n)$ позначимо множину всіх наборів $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, які допускають зображення (3).

Відмітимо, що, згідно з означенням, рівномірні норми абсолютно монотонної на $\mathbb{R}_-$ функції $x(t)$ та її похідних досягаються у точці нуль. Внаслідок інтегрального зображення (1) це означає, що для $k = 0, 1, \ldots$

$$\|x^{(k)}\| = x^{(k)}(0) = \int_0^\infty u^k d\beta(u).$$

Таким чином, справедлива нижчесформульована теорема, яка показує, що розв'язок задачі Колмогорова на класі абсолютно монотонних функцій дає також розв'язок проблеми моментів Маркова з функціями $u_1(t) = t^{k_1}, \ldots, u_d(t) = t^{k_d}$.

Теорема 5. *Нехай задано* $d \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_d$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$. *Тоді*

$$A_{\mathbf{k}}(AM(\mathbb{R}_-)) = \mathcal{M}(t^{k_1}, \ldots, t^{k_d}).$$

Цитована література

1. *Бабенко В. Ф., Бабенко Ю. В., Коваленко О. В.* Задача Колмогорова на классе кратно монотонных функций // Доп. НАН України. – 2013. – № 11. – С. 7–12.
2. *Бернштейн С. Н.* Абсолютно монотонные функции // Собрание сочинений. Т. 1. – Москва: Изд-во АН СССР, 1928. – С. 379–425.
3. *Williamson R. E.* Multiply monotone functions and their Laplace transforms // Duke Math. J. – 1956. – **23**, No 2. – P. 189–207.
4. *Karlin S., Studden W. J.* Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics. – New York: Interscience, 1966. – 586 p.
5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – Москва: Физматлит, 1973. – 553 с.

References

1. *Babenko V. F., Babenko Yu. V., Kovalenko O. V.* Dopov. NAN Ukraine, 2013, No 11: 7–12 (in Russian).
2. *Bernshtein S. N.* Absolute monotone functions, Collection of works, Vol. 1, Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1928 (in Russian).
3. *Williamson R. E.* Duke Math. J., 1956, **23**, No 2: 189–207.
4. *Karlin S., Studden W. J.* Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics, New York: Interscience, 1966.
5. *Krein M. G., Nudelman A. A.* The Markov moment problem and extremal problems, Moscow: Fizmatlit, 1973 (in Russian).

Дніпропетровський національний
університет ім. Олеся Гончара
Університет Кеннесоу, США

Надійшло до редакції 13.05.2015

В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко

Задача Колмогорова о существовании абсолютно монотонной и кратно монотонной функции с заданными нормами производных

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
Университет Кеннесоу, США

Решена задача Колмогорова о существовании функции с заданными нормами производных на классах кратно монотонных и абсолютно монотонных функций в случае произвольного числа норм. Показана связь задачи Колмогорова и проблемы моментов Маркова.

Ключевые слова: задача Колмогорова, кратно монотонная функция, абсолютно монотонная функция, неравенства для производных.

V. F. Babenko, Yu. V. Babenko, O. V. Kovalenko

Kolmogorov's problem about the existence of absolute monotone and multiply monotone functions with given norms of derivatives

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University
Kennesaw State University, USA

Kolmogorov's problem about the existence of a function with given norms of derivatives for classes of multiply monotone functions and absolute monotone functions in the case of an arbitrary number of norms is solved. The connection of Kolmogorov's problem with Markov's moment problem is shown.

Keywords: Kolmogorov's problem, multiply monotone function, absolute monotone function, inequalities for derivatives.