УДК 519.21

К. В. Глиняна

Ергодичність відносно просторової змінної дискретних за часом стохастичних потоків

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. І. Портенком)

Вивчається дискретний за часом потік частинок у випадковому середовищі. Досліджуються властивості потоку за просторовою змінною у фіксований момент часу. Отримано результати про його стаціонарність та ергодичність.

Ключові слова: стохастичні потоки з дискретним часом, стаціонарні процеси, ергодичність.

Стохастичні потоки описують рух частинок у випадковому середовищі [1–9]. У таких потоках, як правило, рух окремої частинки задається дифузійним процесом. Складність будови та властивостей потоку обумовлена взаємним зв'язком цих процесів для різних частинок. Низка питань, що виникає при цьому, пов'язана з властивостями потоків за просторовою змінною у фіксований момент часу [6, 10]. Також дуже складною є структура шуму, що керує системою [5, 11].

Одним з прикладів стохастичних потоків є потік розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, що керуються гладким за просторовою змінною семімартингалом $\{F(x,t), x \in \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\}$ [6]

$$\begin{aligned} &dx(u,t) = F(x(u,t), dt), \\ &x(u,0) = u. \end{aligned} \tag{1}$$

Можна довести, що, якщо локальні характеристики семімартингала $\{F(x,t), x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\}$ задовольняють умови Ліпшица та лінійного збільшення, процес $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}, t \in [0,T]\}$ має такі властивості: для кожного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \frac{|x(u,t)|}{(1+|u|)^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{2}$$

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \frac{(1+|u|)^{1-\varepsilon}}{1+|x(u,t)|} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3}$$

Зауважимо, що співвідношення (2), (3) відрізняються від характеру збільшення за просторовою змінною розв'язку детермінованої задачі Коші з коефіцієнтом, що задовольняє умову Ліпшица,

$$\begin{aligned} &dy(u,t) = a(y(u,t),t)\,dt, \\ &y(u,0) = u, \end{aligned}$$

для якого відомо, що

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{y(u,t)}{u} = 1. \tag{4}$$

Ця відмінність стохастичного потоку від детермінованого є суттєвою. У роботі [10] побудовано приклад стохастичного диференціального рівняння з ліпшицевими коефіцієнтами такий, що відповідний стохастичний потік задовольняє

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \frac{|x(u,t)|}{|u|h(u)} = 1 \quad \text{м.н.}, \tag{5}$$

де $h(u) = \exp\sqrt{\log\log|u|}$.

Але деякі стохастичні потоки, що не можуть бути описані за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь з гладкими коефіцієнтами, мають властивості, аналогічні властивості (4) детермінованого потоку. Так, наприклад, для потоку, що складається з броунівських частинок, виконується співвідношення (4). Це відбувається за рахунок леми Бореля–Кантелі. На додачу до цього, інколи має місце ергодичність за просторовою змінною стохастичного потоку у фіксований момент часу. Прикладом таких потоків можуть бути потоки дифузійних частинок із сингулярною взаємодією. Потоки зі склеюванням було побудовано в роботах [3, 4] та вивчено в роботах [5, 8, 9, 10]. Саме властивість ергодичності вивчається у даній роботі.

При дослідженні розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь використовується дискретна апроксимація Ейлера–Маруями [12]. Цей підхід дає можливість звести дослідження до аналізу випадкових блукань. Аналогічно можна побудувати дискретну за часом апроксимацію стохастичного потоку [13]. У ролі шуму, що керує системою частинок, виступає послідовність стаціонарних незалежних гауссових процесів $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geqslant 1}$. У роботі ми доводимо, що зі стаціонарності та ергодичності за просторовою змінною шуму випливає стаціонарність та ергодичність стохастичного потоку з дискретним часом.

1. Стохастичні потоки з дискретним часом та їх ергодичність. Система взаємодіючих гауссових блукань на прямій $\{x(u,n), u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$, яка наближує потоки броунівських частинок, була побудована та досліджена у роботі І. І. Ніщенко [13]. Нехай $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n\geqslant 1}$ — незалежні стаціонарні гауссові процеси з нульовим середнім та неперервною коваріаційною функцією Γ, $\Gamma(0) = 1$. Визначимо $\{x(u,n), u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$ за допомогою рекурентного співвідношення

$$\begin{aligned} &x(u,n+1) = x(u,n) + \xi_{n+1}(x(u,n)),\\ &x(u,0) = u, \qquad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Неперервність функції Γ та незалежність процесів $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ гарантують коректність означення. Основною відмінністю потоку з дискретним часом від потоків з неперервним часом є те, що частинки можуть змінювати початкову впорядкованість, тобто відображення $x(\cdot,N)$ може бути не монотонним. У цій роботі дослідження властивостей відображення $x(\cdot,N)$ базується на ергодичній теорії стаціонарних процесів.

Перш за все відзначимо, що процес $\{x(u,n) - u, u \in \mathbb{R}\}$ при кожному $n \geqslant 1$ є стаціонарним, а саме має місце така лема.

Лема 1. *Процес, що набуває значень в* $\mathbb{R}^\infty$

$$\{(\xi_1(u), x(u,1)-u, \xi_2(u), x(u,2)-u, \ldots, \xi_n(u), x(u,n)-u, \ldots), u \in \mathbb{R}\}$$

є стаціонарним у вузькому сенсі.

Доведення. Позначимо $\varkappa_n(u) = (\xi_1(u), x(u,1)-u, \ldots, \xi_n(u), x(u,n)-u)$. Оскільки σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ породжується алгеброю $\mathcal{A} = \{B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n, B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), n \geqslant 1\}$, то достатньо перевірити, що виконується рівність

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{\varkappa_n(u_i+h) \in B_1^i \times \ldots \times B_{2n}^i\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{\varkappa_n(u_i) \in B_1^i \times \ldots \times B_{2n}^i\}\right). \tag{7}$$

Доведення проведемо за методом математичної індукції за n. При $n=1$ маємо $x(u,1)-u = \xi_1(u)$ та рівність (7) виконується внаслідок стаціонарності процесу ξ_1. Нехай рівність (7) є вірною при n. Тоді при $n+1$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k}\{\varkappa_{n+1}(u_i+h) \in B_1^i \times \ldots \times B_{2n+2}^i\}) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} \mathbb{1}\{\varkappa_n(u_i+h) \in B_1^i \times \ldots \times B_{2n}^i\} \times \right.$$

$$\times \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{(\xi_{n+1}(u_i+h), x(u_i+h,n)-(u_i+h)+\xi_{n+1}(x(u_i+h,n))) \in \right.$$

$$\left.\left. \in B_{2n+1}^i \times B_{2n+2}^i\}|\xi_1, \ldots, \xi_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} \mathbb{1}\{\varkappa_n(u_i+h) \in B_1^i \times \ldots \times B_{2n}^i\} \times \right.$$

$$\left. \times \varphi(x(u_1+h,n)-(u_1+h), \ldots, x(u_k+h,n)-(u_k+h))\right],$$

де

$$\varphi(y_1, \ldots, y_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{(\xi_{n+1}(u_i+h), y_i+\xi_{n+1}(y_i+(u_i+h)) \in B_{2n+1}^i \times B_{2n+2}^i\}\right).$$

Використовуючи припущення індукції та стаціонарність процесів $\{\xi_n\}$, робимо висновок, що отриманий вираз не залежить від h. Лему доведено.

Наведемо основні означення та результати, пов'язані з ергодичністю стаціонарного процесу [15]. Нехай $\{X(u), u \in \mathbb{R}\}$ — стаціонарний у вузькому сенсі процес в $\mathbb{R}$. Позначимо через $M(\mathbb{R})$ множину всіх функцій на $\mathbb{R}$ з σ-алгеброю $\mathfrak{S}$, що породжується циліндричними множинами. Визначимо міру μ_X на $\mathfrak{S}$, що пов'язана з процесом X:

$$\mu_X\{f \in M(\mathbb{R})\colon f(u_1) \in \Delta_1, \ldots, f(u_k) \in \Delta_k\} = \mathbb{P}\{X(u_1) \in \Delta_1, \ldots, X(u_k) \in \Delta_k\},$$
$$k \geqslant 1, \qquad \Delta_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Означення 1. (i) Вимірна функція F на $M(\mathbb{R})$ називається інваріантною, якщо при всіх $f \in M$

$$F(f(\cdot + x)) = F(f(\cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Множина $A \in \mathfrak{S}$ називається інваріантною, якщо $\mathbb{1}_A$ є інваріантною функцією.

Означення 2. Стаціонарний у вузькому сенсі процес $\{X(u), u \in \mathbb{R}\}$ називаємо ергодичним, якщо для кожної інваріантної множини A

$$\mu_X(A) \in \{0, 1\}.$$

Для ергодичних процесів має місце така теорема.

Теорема 1 (Біркгофа–Хінчина). *Нехай X — ергодичний процес. Тоді для $F \in \in L^1(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$ існують границі*

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_0^U F(X(\cdot + u))\, du = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U} \int\limits_{-U}^U F(X(\cdot + u))\, du = \int\limits_M F d\mu_X. \tag{8}$$

Для перевірки ергодичності процесу більш зручно користуватися такою властивістю.

Означення 3. Процес X задовольняє властивість перемішування, якщо для двох довільних функцій $F, G \in L^2(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$

$$\lim_{u\to\infty} \int\limits_M F(f(\cdot + u)) G(f(\cdot)) \mu_X(df) = \int\limits_M F(f) \mu_X(df) \int\limits_M G(f) \mu_X(df). \tag{9}$$

Відомо [15], що стаціонарний гауссів процес задовольняє властивість перемішування, якщо його коваріаційна функція $r(h) = \mathbb{E}X(u)X(u+h)$ прямує до нуля при $h \to \infty$.

Зауважимо, що властивість перемішування достатньо перевіряти на класі функцій

$$\mathcal{E} = \{F\colon F(X) = \exp\{i(\vec{\lambda}, X(\vec{u}))\}, \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m, X(\vec{u}) = (X(u_1), \ldots, X(u_m)), \vec{u} \in \mathbb{R}^m, m \geqslant 1\}.$$

Дійсно, з теореми Банаха–Штейнгауза випливає, що для обмеженої білінійної форми $\int\limits_M F(f(\cdot + u)) G(f(\cdot)) \mu_X(df)$ збіжність (9) для $F, G \in L^2(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$ випливає з виконання цієї властивості на всюди щільній підмножині.

Основним результатом роботи є таке твердження про ергодичність процесу $\{x(u, N) - - u, u \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 2. *Нехай потік $\{x(u, n), u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ побудовано за послідовністю гауссових процесів $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n \geqslant 1}$ з коваріаційною функцією Γ такою, що $\Gamma(u) \to 0$, $u \to \infty$. Тоді процес $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ є ергодичним для кожного $N \geqslant 1$.*

Доведення. Перевіримо, що процес $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ задовольняє умову перемішування, використовуючи метод математичної індукції. При $N = 1$ маємо $x(u, 1) - u = \xi_1(u)$. Як було зауважено, гауссів процес задовольняє умову перемішуваня, якщо $\Gamma(u) \to 0$, $u \to \infty$. Припустимо, що для процесу $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ виконується (8) при $N = n$. Тоді для $N = n + 1$ і функцій F, $G \in \mathcal{E}$

$$\int\limits_M F(f(\cdot + h)) G(f(\cdot)) \mu_{(x(u,n+1)-u)}(df) = \mathbb{E} \exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u} + \vec{h}, n + 1) - (\vec{u} + \vec{h}))\} \times$$

$$\times \exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n + 1) - \vec{v})\},$$

де $x(\vec{v}, n) = (x(v_1, n), \ldots, x(v_m, n))$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{h} = (h, \ldots, h) \in \mathbb{R}^m$, та

$$F(f) = \exp\{i(\vec{\alpha}, f(\vec{u}))\}, \qquad G(f) = \exp\{i(\vec{\beta}, f(\vec{v}))\}.$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для x_n, маємо

$$\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\alpha}, x((\vec{u}+\vec{h}), n+1) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\beta, \vec{x}(\vec{v}, n+1) - \vec{v})\} =$$
$$= \mathbb{E}[\exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u}+\vec{h}, n) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n) - \vec{v})\} \times$$
$$\times \exp\{-\frac{1}{2}(K(x(\vec{u}+h, n), x(\vec{v}, n))\alpha\beta, \alpha\beta)\}],$$

де через $K(\vec{u}, \vec{v})$ позначено коваріаційну матрицю гауссового вектора $(\xi_n(u_1), \ldots, \xi_n(u_m), \xi_n(v_1), \ldots, \xi_n(v_m))$ в $\mathbb{R}^{2m}$ та $\alpha\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m)$. Продовжуючи рівність, отримуємо

$$\mathbb{E}\Bigg[\exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u}+\vec{h}, n) - (\vec{u}+\vec{h}))\}\exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n) - \vec{v})\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Gamma(x(u_i+h, n) - x(u_j+h, n))\alpha_i\alpha_j\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Gamma(x(v_i, n) - x(v_j, n))\beta_i\beta_j\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\sum_{i,j=1}^{m}\Gamma(x(u_i+h, n) - x(v_j, n))\alpha_i\beta_j\right\}\Bigg].$$

Відзначимо, що $|x(u_i+h, n) - x(v_j, n)| \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$ при $h \to \infty$, отже, $\Gamma(x(u_i+h, n) - x(v_j, n)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $h \to \infty$. За припущенням індукції $\{x(u, n) - u, u \in \mathbb{R}\}$ задовольняє умову перемішування, тому отриманий вираз має границю при $h \to \infty$, яка дорівнює

$$\mathbb{E}\exp\left\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u}, n) - \vec{u}) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Gamma(x(u_i, n) - x(u_j, n))\alpha_i\alpha_j\right\} \times$$
$$\times \mathbb{E}\exp\left\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n) - \vec{v}) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Gamma(x(v_i, n) - x(v_j, n))\beta_i\beta_j\right\} =$$
$$= \mathbb{E}\exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u}, n+1) - \vec{u})\}\mathbb{E}\exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n+1) - \vec{v})\}.$$

Таким чином, процес $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ задовольняє умову перемішування. Зауважимо, що ергодичність процесу випливає з доведеної властивості. Для цього достатньо в (9) як F та G взяти індикатори інваріантних множин. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай λ — міра Лебега на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Тоді для довільного $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$*

$$\frac{\lambda\{u \in [-U, U] : x(u, N) - u \in \Delta\}}{2U} \to \mathbb{P}\{x(0, N) \in \Delta\}$$

при $U \to \infty$.

Доведення. Ця властивість отримана застосуванням теореми Біркгофа–Хінчина до функції $F(X) = 1\!\!\mathrm{I}_{\{X(0)\in\Delta\}}$.

При умові гладкості коваріаційної функції процесів $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}$ $\Gamma \in C^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ процес $\{x(u,N), u \in \mathbb{R}\}$ є диференційовним. Використовуючи ергодичність за просторовою змінною процесу $\{x'(u,N), u \in \mathbb{R}\}$, зробимо висновок про те, наскільки порушується монотонність відображення $x(\cdot,n)$

Наслідок 2.

$$\lim_{U\to\infty} -\frac{1}{U}\int\limits_0^U x'(u,n)1\!\!\mathrm{I}_{\{x'(u,n)<0\}}du = C, \qquad C>0.$$

Доведення. З ергодичної теореми випливає

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_0^U x'(u,n)du = \lim_{U\to\infty} \frac{x(U,n)-x(0,n)}{U} = 1. \tag{10}$$

З іншого боку,

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_0^U |x'(u,n)|du = \mathbb{E}|(x'(u,n))|. \tag{11}$$

Зауважимо, що $\{|x'(u,n)|\}_{n\geqslant 1}$ є супермартингалом, $|x'(u,0)| = 1$. Тому $\mathbb{E}|(x'(u,n))| > 1$, оскільки супермартингал $|x'(u,n)|$ не є детермінованим. Порівнюючи (10) та (11), отримуємо

$$-\frac{1}{U}\int\limits_0^U x'(u,n)1\!\!\mathrm{I}_{\{x'(u,n)<0\}}du \to C, \qquad C>0.$$

Таким чином, міра тих точок прямої, які змінили б порядок при відображенні $x(\cdot,n)$, є нескінченною.

Роботу виконано за часткової підтримки гранту Національної академії наук України та Російского фонду фундаментальних досліджень, проект № 09-01-14.

Цитована література

1. *Norris J. R.* Smoluchowski's coagulation equation: uniqueness, nonuniqueness and a hydrodynamic limit for the stochastic coalescent // Ann. Appl. Probab. – 1999. – **9**. – P. 78–109.
2. *Zirbel C. L., Cinlar E.* Dispersion of particle systems in Brownian flows // Adv. Appl. Prob. – 1996. – **28**, No 1. – P. 53–74.
3. *Arratia R.* Coalescing Brownian motions on the line. – Madison: University of Wisconsin-Madison, 1979. – 256 p.
4. *Harris T. E.* Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 // Stochastic Processes and their Applications. – 1984. – **17**, No 2. – P. 187–210.
5. *Le Jan Y., Raimond O.* Flows, coalescence and noise // Ann. Probab. – 2004. – **32**, No 2. – P. 1247–1315.
6. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 346 p. – (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 24).
7. *Kraichnan R.* Dynamical stochastic modeling of turbulence // Turbulence in Fluid flows. – New York: Springer, 1993. – P. 73–86. – (IMA Volumes in Mathematics and its Applications; Vol. 55).
8. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.

9. *Конаровський В. В.* Система взаємодіючих частинок зі змінною масою: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – Київ, 2011. – 126 с.
10. *Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.* Spatial estimates for stochastic flows in Euclidean space // Ann. Probab. – 1998. – **26**, No 1. – P. 56–77.
11. *Warren J., Watanabe S.* On spectra of noises associated with Harris flows // arXiv: math/0307287. – 2003.
12. *Кузнецов Д. Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. – Ст.-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 786 с.
13. *Nishenko I. I.* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory Stoch. Process. – 2011. – **17**, No 1. – P. 70–78.
14. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
15. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – Москва: Наука, 1990. – 272 с.

References

1. *Norris J. R.* Ann. Appl. Probab., 1999, **9**: 78–109.
2. *Zirbel C. L., Cinlar E.* Adv. Appl. Prob., 1996, **28**, No 1: 53–74.
3. *Arratia R.* Coalescing Brownian motions on the line, Madison: University of Wisconsin–Madison, 1979.
4. *Harris T. E.* Stochastic Processes and their Applications, 1984, **17**, No 2: 187–210.
5. *Le Jan Y., Raimond O.* Ann. Probab., 2004, **32**, No 2: 1247–1315.
6. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 24, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
7. *Kraichnan R.* Turbulence in Fluid flows, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 55, New York: Springer, 1993: 73–86.
8. *Dorogovtsev A. A.* Measure-Valued Processes and Stochastic Flows, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2007 (in Russian).
9. *Konarovskii V. V.* System of interaction particles with changeable mass, PhD dissertation, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2011 (in Ukrainian).
10. *Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.* Ann. Probab, 1998, **26**, No 1: 56–77.
11. *Warren J., Watanabe S.* On spectra of noises associated with Harris flows, arXiv: math/0307287, 2003.
12. *Kuznetsov D. F.* Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Analysis, Saint-Petersburg: Polytechnic Univ., 2010 (in Russian).
13. *Nishenko I. I.* Theory Stoch.Process, 2011, **17**, No 1: 70–78.
14. *Kornfeld I. P., Sinai Ya. G., Fomin S. V.* Ergodic Theory, Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).
15. *Rozanov Yu. A.* Stationary Random Processes, Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 11.03.2015*

Е. В. Глиняная

Эргодичность относительно пространственной переменной дискретных по времени стохастических потоков

Институт математики НАН Украины, Киев

Изучается дискретный по времени поток частиц в случайной среде. Исследуются свойства потока по пространственной переменной в фиксированный момент времени. Получены результаты о его стационарности и эргодичности.

Ключевые слова: стохастические потоки с дискретным временем, стационарные процессы, эргодичность.

E. V. Glinyanaya

Ergodicity with respect to the spatial variable of discrete-time stochastic flows

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

We consider a discrete-time flow of particles in the random environment and investigate spatial properties for such flow at a fixed moment of time. Results about the stationarity and ergodicity of the flow are obtained.

Keywords: discrete-time stochastic flows, stationary processes, ergodicity.