ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968/968.78

Н. О. Вірченко, М. О. Четвертак

Узагальнене інтегральне перетворення Фур'є

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Запроваджено нове узагальнення інтегрального перетворення Фур'є у вигляді

$$\widetilde{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x))\, dx,$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$*,* $(\tau, \beta) \subset R$*,* $\tau - \beta < 1$*,* $r > 0$*,* ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ *–* (τ, β)*-конфлюентна гіпергеометрична функція. Доведено формулу обернення, подано основні властивості нового інтегрального перетворення Фур'є. Подано ілюстративні приклади застосування цього інтегрального перетворення.*

Ключові слова: конфлюентна гіпергеометрична функція, узагальнене інтегральне перетворення, інтегральне перетворення Фур'є.

За останні десятиріччя посилився інтерес до теорії спеціальних функцій, оскільки ці функції відіграють важливу роль у різноманітних галузях природничих, технічних наук, зокрема при розв'язанні складніших задач математичної фізики, аеродинаміки, атомної фізики, астрофізики, акустики, квантової теорії поля, теорії імовірностей та математичної статистики, біомедицини та ін.

Серед спеціальних функцій особливо виділяються гіпергеометричні функції, саме узагальнені та частинні випадки гіпергеометричних функцій, як-от: функції Бесселя, функції Лежандра, функції Матьє, ортогональні многочлени та ін. — займають панівне місце серед інших вищих трансцендентних функцій завдяки їх великій практичній застосовності [1–3].

Тепер особливо цінними для практики виявились узагальнені вироджені (конфлюентні) гіпергеометричні функції. Вони вже знайшли застосування в математичній фізиці, теорії імовірностей, теорії кодування, в інтегральному численні тощо. Цікавий підхід до узагальнення гіпергеометричних функцій подав Е. Райт [4].

Зауважимо, що одним із ефективних сучасних аналітичних методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, крайових задач математичної фізики, теорії пружності та ін. є *метод інтегральних перетворень*. Найвідомішими є інтегральні перетворення Фур'є, Лапласа, Мелліна, Меєра, Мелера–Фока.

Подальше дослідження нових типів інтегральних перетворень є актуальним, потрібним для ширшого застосування їх на практиці.

У даній роботі запроваджується нове узагальнення інтегрального перетворення Фур'є, яке, як частинний випадок, містить класичне інтегральне перетворення Фур'є.

1. Узагальнене інтегральне перетворення Фур'є. Запровадимо узагальнене інтегральне перетворення Фур'є у вигляді:

$$F(f(x);\alpha)=\widetilde{f}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(\alpha x))\,dx, \tag{1}$$

де $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0$, $(\tau,\beta)\subset R$, $\tau-\beta<1$, $r>0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)-(\tau,\beta)$-конфлюентна гіпергеометрична функція [1]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}{}_1\Psi_1\big[{}^{(a,\tau);}_{(c,\beta);}|xt^{\tau}\big]\,dt, \tag{2}$$

де ${}_1\Psi_1(\ldots)$ — узагальнена функція Фокса–Райта [4]:

$${}_p\Psi_q(z)={}_p\Psi_q\big[{}^{(a_i;\alpha_i)}_{(b_j;\beta_j)}|z\big].$$

При $\tau=\beta=1$, $r=0$ (1) дає класичне інтегральне перетворення Фур'є [5].

Зображення функції ${}_p\Psi_q(z)$ за допомогою інтеграла Мелліна–Бернса має вигляд

$${}_p\Psi_q(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{-\infty}}\frac{\Gamma(s)\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(a_i-\alpha_i s)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j-\beta_j s)}(-z)^{-s}ds,$$

де шлях інтегрування $L_{-\infty}$ відокремлює всі полюси $b_i=-l$ $(l=0,1,2,\ldots)$ функції $\Gamma(s)$ зліва і полюси $a_{ik}=(a_i+k)/a_i$ $(i=1,2,\ldots,p;k=0,1,2,\ldots)$ справа; $L_{-\infty}=L$ — контур, розміщений у горизонтальній смузі, починається з точки $-\infty+i\varphi_1$ та йде до точки $-\infty+i\varphi_2$ $(-\infty<\varphi_1<\varphi_2<+\infty)$; $s\in C$.

Для функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ при умовах існування цієї функції справедливі такі формули диференціювання:

$$\frac{d}{dx}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+\tau)}{\Gamma(c+\beta)}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a+\tau;c+\beta;x), \tag{3}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n\tau);c+\beta n;x). \tag{4}$$

Подамо властивості узагальненого інтегрального перетворення Фур'є (1).

Властивість лінійності для інтегрального перетворення (1) має вигляд

$$\widetilde{F}\left\{\sum_{n=1}^{n}C_i f_i(x);\alpha\right\}=\sum_{n=1}^{n}C_i\widetilde{F}\{f(x);\alpha\}, \tag{5}$$

де $C_i=\text{const}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Властивість подібності

$$\widetilde{F} = \{f(\delta;\alpha)\} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i\alpha x}{\delta}} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -r\left(\frac{\alpha x}{\delta}\right)\right) dx. \tag{6}$$

Ці властивості очевидні.

2. Формула обернення узагальненого інтегрального перетворення Фур'є. Справедливою є така теорема.

Теорема 1. *За умов існування узагальненого інтегрального перетворення Фур'є* (1) *справедлива формула*

$$\begin{aligned} &f(t) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \int\limits_0^{\infty} (tx)^{-1} \widetilde{F}(x) K(tx)\, dx, \\ &K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{\varsigma(s)} ds, \\ &\varsigma(s) = {}_2\Psi_1[{}^{(a,\tau);(s,1);}_{(c,\beta);} | -r]. \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення. Застосуймо інтегральне перетворення Мелліна:

$$M\{e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x); s)\} = \int\limits_0^{\infty} (\alpha x)^{s-1} e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x))\, d\alpha x =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \tau n)\Gamma(s + n)}{\Gamma(c + \beta n)} \frac{(-r)^n}{n!} \int\limits_0^{\infty} (\alpha x)^{s-1+n} e^{i\alpha x} d\alpha x =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} {}_2\Psi_1[{}^{(a,\tau);(s,1);}_{(c,\beta);} | -r].$$

Остаточно:

$$M\{f((t); 1 - s)\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} {}_2\Psi_1[{}^{(a,\tau);(s,1);}_{(c,\beta);} | -r]^{-1} M\{\widetilde{F}; s\}.$$

Звідки, застосувавши обернення інтегрального перетворення Мелліна, маємо

$$f(t) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \int\limits_0^{\infty} (tx)^{-1} \widetilde{F}(x) K(tx)\, dx,$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{\varsigma(s)} ds,$$

$$\varsigma(s) = {}_2\Psi_1[{}^{(a,\tau);(s,1);}_{(c,\beta);} | -r].$$

3. Співвідношення між узагальненими інтегральними перетвореннями Фур'є похідних функції. Розглянемо $\widetilde{F}^{(n)}(\alpha)$:

$$\widetilde{F}^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n} e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x))\, dx. \tag{8}$$

Інтегруємо (8) частинами:

$$\widetilde{F}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x))|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} [e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x))]|_x' dx.$$

Допускаючи, що

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{d^k f}{dx^k} \right) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{9}$$

після повторних інтегрувань частинами, отримаємо

$$\widetilde{F}^{(n)}(\alpha) = (-i\alpha)^n \widetilde{F} + A \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}((a + n\tau); (c + n\beta); -r(\alpha x))\, dx, \tag{10}$$

де

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} (-1)^n (r\alpha)^n \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + n\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c + n\beta)}. \tag{11}$$

Подамо *приклади* образів, знайдених за допомогою узагальненого інтегрального перетворення Фур'є (1), *таких* функцій:

1) $f(x) = \dfrac{J_\mu[a(z + x)] J_\nu[a(\varsigma + x)] e^{-i\alpha x} x^{-n}}{(z + x)^\mu (\varsigma + x)^\nu}$,

2) $f(x) = J_{\nu - x}(a) J_{\mu + x}(a) e^{-i\alpha x} x^{-n}$,

3) $f(x) = e^{-x^2 - i\alpha x} H_{2m+n}(ax) H_n(x) x^{-n}$.

Образи, відповідно, матимуть вигляд:

1) $B\Gamma(\mu + \nu)\sqrt{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{a}} J_{\mu+\nu-1/2}[a(z - \varsigma)]$,

2) $BJ_{\mu+\nu}(2a), \qquad \mathrm{Re}(\mu + \nu) > 1$,

3) $B\sqrt{\pi} 2^{-m+1/2} \dfrac{(2m + n)!}{m!} (a^2 - 1)^m a^n$,

де

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-r\alpha)^n \frac{\Gamma(a + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n)} \frac{1}{n!}, \qquad n \in N_0.$$

У роботі за допомогою узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції побудовано нове узагальнене інтегральне перетворення Фур'є. Формула обернення та основні властивості цього перетворення дають змогу широко застосовувати узагальнене інтегральне перетворення Фур'є, зокрема, і в прикладному математичному аналізі, для обчислення інтегралів, які відсутні в математичній літературі та ін.

Цитована література

1. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. – London: Chapman and Hall, CRC, 2004. – 390 p.
2. *Virchenko N., Kalla S. L., Al-Zamel A.* Some results on a generalized hypergeometric function // Integral Tranforms and Special Functions. – 2001. – **12**, No 1. – P. 89–100.
3. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // Fract. Calculus and Appl. Anal. – 2006. – **9**, No 2. – P. 101–108.
4. *Wright E. M.* On asympotic expansions of generalized Bessel function // Proc. Lond. Math. Soc. – 1935. – **38**. – P. 257–270.
5. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.
7. *Вірченко Н. О.* Узагальнені інтегральні перетворення. – Київ: Задруга, 2013. – 397 с.

References

1. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms, London: Chapman and Hall, CRC, 2004.
2. *Virchenko N., Kalla S. L., Al-Zamel A.* Integral Transforms and Special Functions, 2001, **12**, No 1: 89–100.
3. *Virchenko N.* Fract. Calculus and Appl. Anal., 2006, **9**, No 2: 101–108.
4. *Wright E. M.* Proc. Lond. Math. Soc., 1935, **38**: 257–270.
5. *Sneddon I. N.* Fourier Transforms, New York: McGraw-Hill, 1951.
6. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Trancendental Functions, New York: McGraw-Hill, 1953, Vol. 1.
7. *Virchenko N. O.* The generalized integral transforms, Kyiv: Zadruga, 2013 (in Ukrainan).

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 19.03.2015*

Н. А. Вирченко, М. А. Четвертак

Обобщенное интегральное преобразование Фурье

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"

Введено новое обобщение интегрального преобразования Фурье в виде

$$\widetilde{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x))\, dx,$$

где $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $(\tau, \beta) \subset R$, $\tau - \beta < 1$, $r > 0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots) - (\tau,\beta)$*-конфлюэнтная гипергеометрическая функция. Доказана формула обращения, даны основные свойства нового интегрального преобразования Фурье. Приведены иллюстративные примеры применения этого интегрального преобразования.*

Ключевые слова: конфлюэнтная гипергеометрическая функция, обобщенное интегральное преобразование, интегральное преобразование Фурье.

N. O. Virchenko, M. O. Chetvertak

The generalized integral Fourier transform

NTU of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute"

A new generalization of the integral Fourier transform

$$\widetilde{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(\alpha x)) dx,$$

where $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, a > 0$, $(\tau, \beta) \subset R$, $\tau - \beta < 1$, $r > 0$, *and* ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ *is the* (τ, β)*-confluent hypergeometric function, is introduced. The inversion formula of this integral transform is proved. The basic properties of a new integral Fourier transform and some examples are given.*

Keywords: confluent hypergeometric function, generalized integral transform, Fourier' integral transform.