

УДК 539.374

ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН С ПОМОЩЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В. Г. КАРНАУХОВ*, А. В. КОЗЛОВ**, Е. В. ПЯТЕЦКАЯ***

*Институт механики НАН Украины имени С. П. Тимошенко, Киев

**Национальный транспортный университет, Киев

***Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 26.07.2002 ◊ Пересмотрено 5.12.2002

Дана постановка задачи об активном демпфировании стационарных и нестационарных изгибных колебаний тонких вязкоупругих пластин с использованием распределенных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Рассмотрены случаи программного управления колебаниями пластины без обратной связи и управления колебаниями с использованием обратной связи. Представлено несколько вариантов уравнений обратной связи, обеспечивающих изменение жесткостных, диссипативных и инерционных характеристик пластины. Основные соотношения получены на основе гипотез Кирхгофа – Лява, дополненных гипотезами о распределении электрических полевых величин. Для прямоугольной пластины с шарнирным закреплением торцов получены аналитические выражения для потенциала, демпфирующего любую из мод колебаний, возбуждаемых гармонической во времени поперечной нагрузкой. Аналогичные выражения получены и для заряда сенсора. Для других типов граничных условий и геометрии пластины при решении использован метод конечных элементов. На основе аналитических и конечно-элементных решений получены численные результаты, иллюстрирующие эффективность активного контроля стационарных и нестационарных колебаний пластины.

Дано постановку задачі про активне демпфування стаціонарних і нестаціонарних коливань тонких в'язкопружних пластин з використанням розподілених п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Розглянуті випадки програмного керування коливаннями пластини без оберненого зв'язку і керування коливаннями з використанням оберненого зв'язку. Представлені декілька варіантів рівнянь оберненого зв'язку, які забезпечують зміну жорсткісних, дисипативних та інерційних характеристик пластини. Основні співвідношення одержано на основі гіпотез Кірхгофа – Лява, доповнених гіпотезами про розподіл електричних польових величин. Для прямокутної пластини з шарнірним закріпленням торців одержано аналітичний вираз для потенціалу, який демпфує кожен з мод коливань, які збуджуються гармонічним за часом поперечним навантаженням. Аналогічний вираз одержано і для заряду сенсора. Для інших типів граничних умов і геометрії пластини при розв'язку використано метод скінченних елементів. На основі аналітичних та скінченно-елементних розв'язків одержані числові результати, які ілюструють ефективність активного контролю стаціонарних та нестаціонарних коливань пластини.

The problem of active damping of steady and unsteady vibrations of thin viscoelastic plates by distributed piezoelectric sensors and actuators is studied. The program control of the plate's oscillations both without feedback control and with such control are considered. Several variants of equations of the feedback control, which provide changes of the stiffness, dissipative and inertial characteristics of the plate, are presented. Principal equations are obtained on the basis of the Kirchhoff – Love mechanical hypothesis complemented with adequate assumptions about distribution of electric fields. For rectangular plate with pin joint support of edges the analytical expression for the electric potential is obtained. Mentioned potential is expressed as a damping factor for each mode of vibrations excited by the transverse loading. Analogous expression is obtained for the charge of the sensors. For other boundary conditions and geometry of plates the method of finite elements is used in the solution procedure. On the basis of the analytical and the finite element solutions the numerical results are obtained that illustrate the effectiveness of active damping of steady and unsteady vibrations of plates.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкие пластины широко используются в качестве конструктивных элементов в технических устройствах различного назначения, эксплуатация которых обычно проходит в режиме стационарного или нестационарного динамического нагружения. При этом зачастую возникает потребность в снижении уровней перемещений и напряжений. Наиболее часто для этого применяются пассивные методы демпфирования, когда в структуру

элемента вводятся неупругие (вязкоупругие либо вязкоупругопластические) включения с высокими демпфирующими характеристиками. Подробное описание технологии пассивного контроля колебаний изложено в работах [1–3] и в специальной литературе, ссылки на которую можно найти в [3]. Указанный подход дает хорошие результаты в высокочастотной области.

К современным достижениям в области демпфирования колебаний пластин следует отнести методы активного контроля, в том числе методы

демпфирования колебаний с использованием пьезоэлектрических включений. Суть подобных методов заключается в том, что одни включения (сенсоры) дают информацию о механическом состоянии пластины, а другие (актуаторы) подводят к пьезоактивным включениям разность электрических потенциалов, связанную определенными соотношениями (уравнениями обратной связи) с показаниями сенсоров. Если разность потенциалов актуатора пропорциональна разности потенциалов сенсора, то изменяются интегральные жесткостные характеристики пластины. Если же разность потенциалов пропорциональна току или его производной, то изменяются соответственно характеристики демпфирования или инерционные характеристики пластины. Это позволяет корректировать динамическое поведение пластины, в частности, уходить с резонанса и существенно увеличивать демпфирование колебаний объекта. С практической точки зрения ситуация выглядит следующим образом: когда известна действующая на пластину нагрузка, демпфирование колебаний достигается путем подвода к актуатору разности потенциалов с определенными амплитудой и фазой, которая бы компенсировала действие внешней механической нагрузки.

Методы активного контроля дают хорошие результаты в низкочастотной области. Для расширения диапазона частот эффективного контроля колебаний следует разрабатывать комбинированные методики демпфирования колебаний с применением как пассивных, так и активных методов контроля.

При использовании активного демпфирования колебаний наиболее часто используются два подхода:

1. Пьезоэлектрические слои полностью покрывают пассивный слой, а демпфирование осуществляется путем подвода к бесконечно тонким электродам, имеющим определенную геометрию, разности потенциалов с необходимыми амплитудой и фазой;
2. Пьезоэлектрические слои покрывают пассивные слои лишь частично; на пьезослои наносятся электроды, к которым подводится разность потенциалов с амплитудой и фазой, необходимыми для компенсации механического нагружения.

Форма электродов, сенсоров и актуаторов, их толщина, тип поляризации и расположение в теле выбираются из условия наиболее эффективного контроля колебаний. Например, если выбрать гео-

метрию электродов, сенсоров и актуаторов согласно суперпозиции определенных колебательных мод, то будут восприниматься и подавляться только такие моды. Этот тип контроля известен как модальный. Формирование модальных сенсоров и актуаторов достигается путем изменения следующих параметров:

- структуры пластины по ее толщине;
- геометрий электродов, сенсоров и актуаторов;
- поляризации пьезослоев;
- угла между главными направлениями анизотропии пассивной пластины и главными направлениями анизотропии пьезоэлементов;
- толщины пьезоэлемента (для формирования модального сенсора или актуатора она может быть выбрана переменной);
- свойств пьезоматериалов.

Новейшие результаты в этой области отражены в публикациях [4–8].

В целом задача выбора конкретной методики контроля колебаний путем их активного демпфирования достаточно сложна. Однако ее решение существенно упрощается в случае применения первого из указанных подходов, а также если пренебречь влиянием пьезовключений на жесткостные характеристики пассивной пластины в случае применения второго подхода. При таких ограничениях в некоторых случаях удастся получить аналитические решения, дающие возможность выбрать размеры и расположение электродов и пьезослоев, исходя из условий наиболее эффективного демпфирования колебаний.

В качестве сенсоров и актуаторов активно используются пьезополимеры. Они обладают уникальными свойствами: таким материалам легко придать необходимую форму; к тому же они не вносят существенных изменений в жесткостные характеристики пассивной конструкции. Необходимо отметить, что в современной литературе по контролю колебаний не учитывается реальное вязкоупругое поведение материалов, широко используемых как для изготовления пассивных пластинчатых элементов, так и для контроля колебаний с помощью полимерных материалов с пьезоэффектом. Между тем, в механике тонкостенных элементов накоплен большой опыт использования вязкоупругих моделей интегрального типа, достаточно хорошо описывающих диссипативные свойства полимерных материалов.

В данной статье рассматривается демпфирование колебаний пластин с помощью введения в их структуру вязкоупругих слоев (пассивное демпфирование) и пьезоэлектрических включений (активное демпфирование). Для описания вязкоупругих свойств пассивных и пьезоактивных компонент используются линейные модели вязкоупругости интегрального типа, являющиеся наиболее эффективными для описания диссипативных свойств материалов в линейной области. Дается постановка задач демпфирования стационарных и нестационарных колебаний пластинчатых вязкоупругих элементов. При использовании второго подхода к контролю колебаний рассматривается структурно неоднородная в своей плоскости пластина, состоящая из набора идеально соединенных между собой пластинчатых пассивных и пьезоактивных элементов. В свою очередь, каждый такой элемент может состоять из произвольного числа пассивных и пьезоактивных слоев. Для описания механического поведения этих пластинчатых элементов используются гипотезы Кирхгофа – Лява для всего пакета в целом, дополненные адекватными им гипотезами о распределении электрических полевых величин [9]. Представлены основные соотношения для пластинчатых актуаторов и сенсоров. Приведены уравнения обратной связи между потенциалами актуатора и сенсора, их первыми (током) и вторыми производными. Именно через параметры, входящие в эти уравнения, осуществляется влияние на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики пассивной пластины. Подробно рассматривается частный случай многослойного пластинчатого элемента, составленного из среднего пассивного пакета упругих и вязкоупругих слоев, а также двух пьезоактивных слоев, поляризованных в противоположных направлениях. Механическое поведение среднего пакета описывается моделью ортотропного слоя с усредненными по толщине жесткостными характеристиками, полученными с использованием гипотез Кирхгофа – Лява. В простейшем случае, когда влиянием пьезослоев на жесткостные характеристики пассивной пластины можно пренебречь (или когда структурная неоднородность в плоскости пластины отсутствует), при шарнирном закреплении торцов получены точные аналитические решения, дающие возможность определить наиболее рациональное размещение пьезовключений в плоскости пластины и их размеры.

Для решения интегро-дифференциального уравнения, которое получается при учете вязкоупругих свойств материалов, используется

классический метод усреднения. В случае учета влияния пьезовключений на жесткостные характеристики пассивной пластины, а также при других типах граничных условий для решения задачи демпфирования применяется метод конечных элементов (МКЭ). С использованием как аналитических, так и численных (конечно-элементных) методов решены конкретные задачи о демпфировании стационарных колебаний пластин для двух случаев граничных условий: шарнирного и жесткого закрепления торцов. Сравнение численных и аналитических результатов для шарнирного закрепления свидетельствует о высокой точности и эффективности разработанного варианта конечно-элементного метода для расчета демпфирования колебаний пластинчатых элементов. Представлены числовые данные о демпфировании колебаний пассивной пластины с использованием пьезовключений, размеры и размещение которых выбраны в соответствии с полученными аналитическими формулами. Представлены примеры расчета демпфирования нестационарных колебаний пассивной пластины из изотропного вязкоупругого материала Фойгта для двух случаев граничных условий: шарнирного и жесткого закрепления торцов. Показано, что даже использование одного актуатора приводит к существенному уменьшению амплитуды поперечных колебаний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ортотропную вязкоупругую пластину, находящуюся под действием динамической поверхностной стационарной или нестационарной нагрузки. Пластина состоит из произвольного числа пакетов металлических, полимерных или композитных пассивных (без пьезоэффекта) слоев. На верхней и нижней поверхностях пассивной пластины размещены вязкоупругие пьезоэлектрические слои произвольной в плане конфигурации, одни из которых выполняют функции сенсора, а другие – актуатора. Количество пьезослоев и их конфигурация выбираются из соображений наиболее эффективного демпфирования стационарных или нестационарных колебаний пассивного пакета. В частности, при использовании первого из указанных во введении подходов эти слои могут покрывать всю поверхность пластины. При этом демпфирование осуществляется за счет выбора той или иной конфигурации электродов и подвода к ним разности потенциалов с необходимыми фазой и амплитудой. При контроле нестационарных колебаний с применением модального контро-

ля конфигурация электродов и пьезослоев выбирается в виде суперпозиции мод колебаний, вносящих основной вклад в вибродеформации поверхности [4, 7, 8].

Использование второго подхода приводит к сложной конструктивно-неоднородной как по толщине, так и в плане пластине. Необходимо иметь в виду, что представленные ниже уравнения описывают не пластину в целом, а каждый ее пластинчатый элемент конечных размеров (включение, пятно) в отдельности. Такой элемент может быть активным или пассивным. Заметим также, что направления поляризации пьезоактивных слоев могут быть разными. Для описания геометрии сенсоров и актуаторов, а также направления поляризации можно по аналогии с [4, 7, 8] ввести функции формы и символы (функции поляризации) sign . При этом каждый элемент структурно-неоднородной пластины будет характеризоваться своими функциями формы и функциями поляризации [4, 7, 8]. Будем считать, что между элементами выполнены условия идеального механического и электрического контакта.

Основные соотношения для пластинчатых элементов получены на основе гипотез Кирхгофа – Лява и дополнительных гипотез относительно электрических полевых величин [9–11]. В данной работе пьезоэлектрические слои считаются постоянными по толщине, хотя, как указано выше, за счет выбора переменной толщины можно формировать модальные сенсоры и актуаторы. Определяющие уравнения для усилий и моментов содержат суммы составляющих, порождаемых пассивным пакетом, пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. Используется несколько видов уравнений обратной связи [4, 7, 8].

Пластина отнесена к декартовой системе координат (x, y, z) . Главные оси анизотропии совпадают с осями координат. Используются геометрически линейные кинематические соотношения. Координатная поверхность выбирается из условий наиболее простой записи определяющих соотношений для пластины, связывающих усилия и моменты с деформациями и электрическими полевыми величинами. Считается, что деформации малы. Кинематические соотношения теории пластин, уравнения движения и граничные условия являются универсальными соотношениями и имеют одинаковый вид независимо от свойств материала. Для геометрически линейного случая они представлены, например, в [10, 11]. Основываясь на этих результатах, напомним вкратце упомянутые универсальные соотношения.

Компоненты перемещений и деформаций имеют

вид

$$\begin{aligned} u_x &= u(x, y) + z\theta_x(x, y), \\ u_y &= v(x, y) + z\theta_y(x, y), \quad u_z = w(x, y), \\ \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_2 + z\kappa_2, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{12} + z\kappa_{12}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ – перемещения координатной поверхности в направлениях x, y, z соответственно; углы поворота составляют

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2) введены следующие обозначения для компонент тензора деформаций и изгиба:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad 2\kappa_{12} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \\ (1 \leftrightarrow 2, \quad u \leftrightarrow v, \quad x \leftrightarrow y). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения движения и граничные условия на торцах пластины имеют стандартный вид [10, 11] и здесь не приводятся.

Определяющие уравнения для составляющих усилий и моментов, которые вносятся в выражения для полных усилий и моментов пассивными ортотропными вязкоупругими слоями, имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \overset{0}{N}_1 &= \overset{0}{C}_{11} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{C}_{12} \otimes \varepsilon_2 + \\ &\quad + \overset{0}{K}_{11} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{K}_{12} \otimes \kappa_2, \\ \overset{0}{N}_2 &= \overset{0}{C}_{12} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{C}_{22} \otimes \varepsilon_2 + \\ &\quad + \overset{0}{K}_{12} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{K}_{22} \otimes \kappa_2, \\ \overset{0}{S} &= \overset{0}{C}_{66} \otimes \varepsilon_{12} + \overset{0}{K}_{66} \otimes \kappa_{12}, \\ \overset{0}{M}_1 &= \overset{0}{K}_{11} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{K}_{12} \otimes \varepsilon_2 + \\ &\quad + \overset{0}{D}_{11} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{D}_{12} \otimes \kappa_2, \\ \overset{0}{M}_2 &= \overset{0}{K}_{12} \otimes \varepsilon_1 + \overset{0}{K}_{22} \otimes \varepsilon_2 + \\ &\quad + \overset{0}{D}_{12} \otimes \kappa_1 + \overset{0}{D}_{22} \otimes \kappa_2, \\ \overset{0}{H} &= \overset{0}{K}_{66} \otimes \varepsilon_{12} + \overset{0}{D}_{66} \otimes \kappa_{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь символом \otimes обозначен интегро- дифференциальный оператор вида

$$F \otimes G = \int_{-\infty}^t F(t - \tau) dG(\tau). \quad (5)$$

Выражения для $C_{km}^0, K_{km}^0, D_{km}^0$ можно получить в соответствии с принципом Вольтерра и техникой расшифровки операторных выражений [12, 13]. Например, произведение и частное операторов с ядрами Ю. Н. Работнова расшифровываются по следующим правилам:

$$\frac{1}{1 - \mu \mathfrak{D}_\alpha^*(\lambda)} = 1 - \mu \mathfrak{D}_\alpha^*(\lambda - \mu),$$

$$\mathfrak{D}_\alpha^*(x) \mathfrak{D}_\alpha^*(y) = \frac{1}{x - y} [\mathfrak{D}_\alpha^*(x) - \mathfrak{D}_\alpha^*(y)]. \quad (6)$$

Здесь α, μ, λ – параметры ядер, определяемые экспериментально [12]. При моногармоническом деформировании символ \otimes заменяется алгебраическим комплексным выражением, а для упругого случая – операцией умножения.

Рассмотрим пьезоактивные слои. Будем считать, что они изготовлены из вязкоупругого пьезоэлектрического материала и поляризованы по толщине. При этом упрощенные в соответствии с динамической гипотезой Кирхгофа – Лява уравнения состояния для них имеют вид [9, 11]

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^k &= B_{11}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma \kappa_1) + \\ &+ B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma \kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma) \otimes E_\gamma^k, \\ \sigma_\beta^k &= B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma \kappa_1) + \\ &+ B_{22}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma \kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma) \otimes E_\gamma^k, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_{12} + \gamma \kappa_{12}), \\ D_\gamma^k &= \gamma_{33}^k(\gamma) \otimes E_\gamma^k + \\ &+ \gamma_{31}^k(\gamma) \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)], \end{aligned} \quad (7)$$

$k = 1, 2.$

Здесь и в дальнейшем индекс $k=1$ относится к

актуатору, а $k=2$ – к сенсору;

$$\begin{aligned} B_{11}^k(\gamma) &= B_{22}^k(\gamma) = \frac{1}{S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)]}; \\ B_{12}^k(\gamma) &= \nu^k(\gamma) B_{11}^k(\gamma); \\ B_{66}^k(\gamma) &= \frac{1}{2}[1 - \nu^k(\gamma)] B_{11}^k(\gamma); \\ \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^k [1 - k_p^k(\gamma)]; \\ \gamma_{31}^k &= \frac{d_{31}^k(\gamma)}{S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)]}; \\ \nu^k &= -\frac{S_{12}^k}{S_{11}^k}; \quad k_p^k = \frac{2 d_{31}^k(\gamma)}{\varepsilon_{33}^k(\gamma) S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)]}. \end{aligned} \quad (8)$$

В этих соотношениях использованы обозначения, принятые в работах [9, 11].

Пусть между пассивным пакетом и пьезоактивными слоями нанесены бесконечно тонкие электроды. Такие же электроды имеются и на внешних поверхностях пьезослоев. К этим электродам приложена разность потенциалов $V_k^0, k=1, 2$. Согласно [9, 11], индукция D_γ^k постоянна по толщине пьезослоя, так что

$$D_\gamma^k = C^k(\alpha, \beta). \quad (9)$$

При этом

$$\begin{aligned} E_\gamma^k &= \frac{1}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \otimes C^k - \\ &- \frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрируя выражение (10) по толщине пьезослоев, имеем

$$\begin{aligned} C^k &= \frac{1}{\nu_0^k} \otimes [-V_0 + \nu_1^k \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\ &+ \nu_2^k \otimes (\kappa_1 + \kappa_2)], \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив соотношение (11) в формулу (10), а полученное выражение для E_γ^k – в уравнения состо-

яния (7), получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha^k &= B_{11}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\
 &\quad + B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) + \sigma_0^k, \\
 \sigma_\beta^k &= B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\
 &\quad + B_{22}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) + \sigma_0^k, \\
 \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_{12} + \gamma\kappa_{12}), \\
 \sigma_0^k &= \left(\frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)} - \frac{\gamma_{31}^k(\gamma)v_1^k}{\gamma_{33}^k(\gamma)v_0^k} \right) \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\
 &\quad + \left(\frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \gamma - \frac{\gamma_{31}^k(\gamma)v_2^k}{\gamma_{33}^k(\gamma)v_0^k} \right) \otimes (\kappa_1 + \kappa_2) + \\
 &\quad + \frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)v_0^k} \otimes V_0^k.
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав соотношения (12) по толщине пластины и учтя расположение электродов, получим определяющие уравнения для активного пьезослоя:

$$\begin{aligned}
 N_1^k &= C_{11}^k \otimes \varepsilon_1 + C_{12}^k \otimes \varepsilon_2 + \\
 &\quad + K_{11}^k \otimes \kappa_1 + K_{12}^k \otimes \kappa_2 + N_0^k, \\
 N_2^k &= C_{12}^k \otimes \varepsilon_1 + C_{22}^k \otimes \varepsilon_2 + \\
 &\quad + K_{12}^k \otimes \kappa_1 + K_{22}^k \otimes \kappa_2 + N_0^k, \\
 S &= C_{66}^k \otimes \varepsilon_{12} + K_{66}^k \otimes \kappa_{12}, \\
 M_1^k &= K_{11}^k \otimes \varepsilon_1 + K_{12}^k \otimes \varepsilon_2 + \\
 &\quad + D_{11}^k \otimes \kappa_1 + D_{12}^k \otimes \kappa_2 + M_0^k, \\
 M_2^k &= K_{12}^k \otimes \varepsilon_1 + K_{22}^k \otimes \varepsilon_2 + \\
 &\quad + D_{12}^k \otimes \kappa_1 + D_{22}^k \otimes \kappa_2 + M_0^k, \\
 H &= K_{66}^k \otimes \varepsilon_{12} + D_{66}^k \otimes \kappa_{12}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 (C_{ij}^k, K_{ij}^k, D_{ij}^k) &= \int_{(h)}^k B_{ij}^k(\gamma)(1, \gamma, \gamma^2) d\gamma + \\
 &\quad + \nu_{(3,4,5)}^k - \frac{\left((v_1^k)^2, (v_1^k v_2^k), (v_2^k)^2 \right)}{v_0^k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{66}^k, K_{66}^k, D_{66}^k) &= \int_{(h)}^k B_{66}^k(\gamma)(1, \gamma, \gamma^2) d\gamma, \\
 N_0^k &= \frac{v_1^k}{k} V_0^k, \quad M_0^k = \frac{v_2^k}{k} V_0^k, \quad (k = 1, 2),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 v_0^k &= \int_{(h_k)}^k \frac{1}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\
 v_{(1,2)}^k &= \int_{(h_k)}^k \frac{\gamma_{31}^k(1, \gamma)}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\
 v_{(3,4,5)}^k &= \int_{(h_k)}^k \frac{\gamma_{31}^k(1, \gamma, \gamma^2)}{\gamma_{33}^k} d\gamma.
 \end{aligned}$$

При этом для сенсора ($k=2$) справедливо

$$D_\gamma^2 = 0.$$

Тогда

$$E_\gamma^2 = -\frac{\gamma_{31}^2}{\gamma_{33}^2} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)],$$

а во введенных выше жесткостных характеристиках необходимо положить $v_1^2 = v_2^2 \equiv 0$. Ненулевые величины $v_{3,4,5}^2$ определяются по формулам (15).

Общие усилия и моменты равны сумме усилий и моментов, вносимых пассивными и пьезоактивными слоями:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_1^0 + N_1^1 + N_1^2, \dots, \\
 M_1 &= M_1^0 + M_1^1 + M_1^2, \dots
 \end{aligned}$$

Учитывая полученные выше соотношения, найдем выражения для общих усилий и моментов в пла-

стине:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= C_{11} \otimes \varepsilon_1 + C_{12} \otimes \varepsilon_2 + K_{11} \otimes \kappa_1 + \\
 &\quad + K_{12} \otimes \kappa_2 + \overset{0}{N}, \\
 N_2 &= C_{12} \otimes \varepsilon_1 + C_{22} \otimes \varepsilon_2 + K_{12} \otimes \kappa_1 + \\
 &\quad + K_{22} \otimes \kappa_2 + \overset{0}{N}, \\
 S &= C_{66} \otimes \varepsilon_{12} + K_{66} \otimes \kappa_{12}, \\
 M_1 &= K_{11} \otimes \varepsilon_1 + K_{12} \otimes \varepsilon_2 + D_{11} \otimes \kappa_1 + \\
 &\quad + D_{12} \otimes \kappa_2 + \overset{0}{M}, \\
 M_2 &= K_{12} \otimes \varepsilon_1 + K_{22} \otimes \varepsilon_2 + D_{12} \otimes \kappa_1 + \\
 &\quad + D_{22} \otimes \kappa_2 + \overset{0}{M}, \\
 H &= K_{66} \otimes \varepsilon_{12} + D_{66} \otimes \kappa_{12}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \overset{0}{C}_{11} + \overset{1}{C}_{11} + \overset{2}{C}_{11}, \dots, \\
 K_{11} &= \overset{0}{K}_{11} + \overset{1}{K}_{11} + \overset{2}{K}_{11}, \dots, \\
 D_{11} &= \overset{0}{D}_{11} + \overset{1}{D}_{11} + \overset{2}{D}_{11}, \dots, \\
 \overset{0}{N} &= \overset{1}{N}_0 + \overset{2}{N}_0, \quad \overset{0}{M} = \overset{1}{M}_0 + \overset{2}{M}_0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Разность потенциалов на сенсоре получаем путем интегрирования соотношения (16) по толщине h_1 и по площади актуатора S_1 . В случае вязкоупругого материала она имеет вид

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{V}_0 &= \frac{1}{S_2} \int_{(h_2)} \int_{(S_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{\overset{2}{\gamma}_{33}} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\
 &\quad + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)] AB d\alpha d\beta d\gamma.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Эта величина легко измеряется и дает усредненную информацию о деформированном состоянии пластины [4, 7, 8]. Для малых размеров сенсоров можно получить локальные значения потенциалов:

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{V}_0 &= \int_{(h_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{\overset{2}{\gamma}_{33}} \otimes d\gamma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\
 &\quad + \int_{(h_2)} \frac{\overset{2}{\gamma}_{31}}{\overset{2}{\gamma}_{33}} \otimes d\gamma(\kappa_1 + \kappa_2).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Как следует из соотношений (20), (21), измеряемая сенсором разность потенциалов зависит как от тангенциальных, так и от изгибных деформаций. Необходимо отметить, что в отличие от чисто упругого случая, показания сенсора зависят от релаксационных свойств материала.

В случае отсутствия обратной связи пьезослой, отвечающий индексу $k=2$, заменяется дополнительным актуатором. При демпфировании изгибных колебаний пластины направления поляризации актуаторов выбираются противоположными. Выражения для жесткостных характеристик такой структурной неоднородности представлены в [15].

Соотношения (20) и (21) играют основную роль при контроле колебаний пластин, так как именно через показания сенсора формулируются алгоритмы обратной связи [4, 7, 8], передаваемые на актуатор через цепь обратной связи. Существует много различных вариантов алгоритмов обратной связи [4, 7, 8]. В данной работе управление колебаниями пластины будем осуществлять согласно следующим ее алгоритмам [4, 7, 8]:

$$\overset{1}{V}_0 = G_1 \overset{2}{V}_0, \tag{22}$$

$$\overset{1}{V}_0 = -G_2 \frac{\partial \overset{2}{V}_0}{\partial t}, \tag{23}$$

$$\overset{1}{V}_0 = -G_3 \frac{\partial^2 \overset{2}{V}_0}{\partial t^2}, \tag{24}$$

$$\overset{1}{V}_0 = -G_4 \operatorname{sign} \frac{\partial \overset{1}{V}_0}{\partial t}. \tag{25}$$

Здесь G_i – управляющие параметры, влияющие на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики пластины. Для одновременного влияния на все указанные характеристики пластины зададим следующий вид обратной связи:

$$\overset{1}{V}_0 = \left(G_1 - G_2 \frac{\partial}{\partial t} - G_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - G_4 \operatorname{sign} \frac{\partial}{\partial t} \right) \overset{2}{V}_0. \tag{26}$$

Естественно, при этом задача выбора управляющих параметров существенно усложняется.

Подставив выражения (22)–(25) (или (26)) в определяющие уравнения (18) и приняв во внимание соотношения (1)–(3), получим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещений структурно-неоднородной

как по толщине, так и по поверхности пластины:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u, v, w, G_k) &= \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_1, \\ \mathcal{L}_2(u, v, w, G_k) &= \tilde{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + F_2, \\ \mathcal{L}_3(u, v, w, G_k) &= \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_3. \end{aligned} \tag{27}$$

Ее коэффициенты зависят от параметров обратной связи.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения полученных интегродифференциальных уравнений используем вариационные методы в сочетании с методом усреднения. При этом решение интегродифференциальных уравнений представляется в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $U_i(\alpha, \beta)$ линейной упругой пьезопластины:

$$\begin{aligned} u &= \sum_i u_{i1}(t)U_i(\alpha, \beta), \\ v &= \sum_i u_{i2}(t)U_i(\alpha, \beta), \\ w &= \sum_i u_{i3}(t)U_i(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{28}$$

После использования, например, метода Бубнова–Галеркина по пространственным координатам, приходим к линейной системе интегродифференциальных уравнений по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{ij}}{dt^2} + \sum_{l=1}^{\infty} (M_{il} \otimes u_{l1} + N_{il} \otimes u_{l2} + \\ + R_{il} \otimes u_{l3}) = f_{ij}(t), \end{aligned} \tag{29}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3,$$

где $M_{il} \otimes$ – линейные интегральные операторы вида

$$M_{il} \otimes () = \overset{0}{M}_{il} [()] - \int_{-\infty}^t \overset{1}{M}_{il}(t - \tau) (()) (\tau) d\tau.$$

Считая вязкость материалов малой, для решения системы уравнений (29) используем метод усреднения, подробно изложенный в монографии [12] применительно к задачам вязкоупругости. Полученное решение зависит от управляющих параметров G_i , которые выбираются из условия наиболее

эффективного контроля колебаний пластины (например, из условия минимальности ее поперечного прогиба).

Для решения линейной системы (29) можно использовать и быстрое преобразование Фурье [14]. В этом случае операторы $M_{il} \otimes$ заменяются комплексными алгебраическими выражениями, соответствующими комплексным характеристикам вязкоупругих материалов [11, 14].

Следует отметить, что вместо глобальных параметров управления можно ввести модальные параметры управления, когда для каждой моды колебаний выбирается свой параметр управления [4, 7, 8].

Рассмотрим наиболее простой случай граничных условий – шарнирное закрепление торцов пластины. Будем считать, что пластина имеет симметричную по толщине структуру и нагружена известной стационарной или нестационарной поверхностной нагрузкой. Демпфирование колебаний пластины будем осуществлять прямоугольными в плане пьезоэлектрическими актуаторами. Требуется выбрать наиболее эффективное размещение актуаторов (электродов) и их размеры. Для случая, когда пьезослой имеют одинаковые электромеханические свойства и противоположные направления поляризации, выражения для жесткостных характеристик зависят от наличия или отсутствия электродов между пассивными и пьезоактивными слоями (подробнее см. в [15]). При этом движение пластины описывается решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} D_{11} \otimes \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \otimes \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + D_{22} \otimes \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \\ + q(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

$$w = 0, \quad D_{11} \otimes \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \overset{0}{M} \quad (x = 0, x = a),$$

$$w = 0, \quad D_{22} \otimes \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \overset{0}{M} \quad (y = 0, y = a)$$

при нулевых начальных условиях.

Решение краевой задачи (30) ищем в виде

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y. \tag{31}$$

Для прямоугольного в плане включения, имеющего размеры (c, d) и координаты центра (ξ, η) ,

выражение для вызываемого актуатором момента представим в форме

$$M = \sum_p \sum_q M_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \quad (32)$$

где

$$M_{mn}(t) = \frac{16M(t)}{abk_m p_n} \sin k_m \xi \sin p_n \eta \times \sin \frac{k_m c}{2} \sin \frac{p_n d}{2}, \quad (33)$$

а момент $M(t)$ пропорционален приложенной к актуатору разности потенциалов. Приложенная к поверхности нагрузка представляется в такой же форме:

$$q(x, y, t) = \sum \sum q_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y. \quad (34)$$

Подставив выражения (31)–(34) в соотношение (30), получаем интегро-дифференциальное уравнение по времени

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Delta_{mn} \otimes w_{mn} + p_{mn}(t) - M_{mn}(t) = 0 \quad (35)$$

с нулевыми начальными условиями. Здесь

$$\Delta_{mn} = (D_{11} k_{mn}^4 + 2(D_{12} + D_{66}) k_{mn}^2 p_{mn}^2 + D_{22} p_{mn}^4) / \tilde{\rho}; \quad (36)$$

$$M_{mn} = M_{mn} / \tilde{\rho}; \quad p_{mn} = q_{mn} / \tilde{\rho}.$$

Пусть

$$p_{mn}(t) = \tilde{p}_{mn} H(t), \quad M_{mn}(t) = \tilde{m}_{mn} H(t), \quad (37)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. Применение метода усреднения позволяет получить решение уравнения (35) в виде [12]:

$$w_{mn}(t) = \frac{\tilde{p}_{mn} - \tilde{m}_{mn}}{\Delta_{mn}} \exp\left(-\frac{\Delta_{mn} A_{mn}}{2} t\right) \times \left[\frac{A_{mn}(\tilde{p}_{mn} - \tilde{m}_{mn})}{\Delta_{mn}^2 (2 - B_{mn})} \sin\left(\frac{B_{mn}}{2} - 1\right) \Delta_{mn} t - \frac{(\tilde{p}_{mn} - \tilde{m}_{mn})}{\Delta_{mn}^2} \cos\left(\frac{B_{mn}}{2} - 1\right) \Delta_{mn} t \right], \quad (38)$$

где A_{mn} , B_{mn} соответственно синус- и косинус-преобразования Фурье ядер $\Delta_{mn}(t)$.

Как следует из решения (38), при $\tilde{p}_{mn} = \tilde{m}_{mn}$ соответствующая мода не возбуждается. Поэтому, разместив на поверхности пластины s актуаторов, можно компенсировать s мод колебаний и существенно уменьшить амплитуду колебаний объекта. Для оптимального выбора координат центра актуатора и его размеров с целью компенсации соответствующей моды необходимо рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях пластины, когда

$$p_{mn}(t) = \tilde{p}_{mn} \cos \omega t. \quad (39)$$

Если пластина не контролируется, т. е. к актуатору не прикладывается разность потенциалов, то решение уравнения (35) имеет вид

$$w_{mn} = -\tilde{p}_{mn} / \Delta_{mn}, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \Delta'_{mn} + i\Delta''_{mn} - \tilde{\rho}\omega^2_{mn} = \\ &= (D'_{11} + iD''_{11})k_{mn}^4 + 2[(D'_{12} + iD''_{12}) + \\ &\quad + 2(D'_{66} + iD''_{66})]k_{mn}^2 p_{mn}^2 + \\ &\quad + (D'_{22} + iD''_{22})p_{mn}^4 - \tilde{\rho}\omega^2_{mn}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для шарнирного закрепления резонансная частота определяется соотношением

$$\tilde{\rho}\omega^2_{mn} = \Delta'_{mn}. \quad (42)$$

При этом

$$w_{mn} = i\tilde{p}_{mn} / \Delta''_{mn}. \quad (43)$$

Если $D''_{mn} = D'_{mn} \operatorname{tg} \delta$, то

$$w_{mn} = i\tilde{p}_{mn} / (\Delta'_{mn} \operatorname{tg} \delta). \quad (44)$$

При $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ прогиб будет очень большим, хотя и конечным. С увеличением тангенса угла потерь прогиб будет уменьшаться.

Теперь приложим к актуатору разность потенциалов, изменяющуюся по гармоническому закону с частотой поверхностной силы. В этом случае на резонансе имеем

$$w_{mn} = i \frac{\tilde{p}_{mn} - (k_{mn}^2 + p_{mn}^2) \tilde{m}_{mn}}{\Delta'_{mn} \operatorname{tg} \delta}. \quad (45)$$

Так как на каждом из актуаторов разность потенциалов постоянна, то мы можем выбрать в выражении (45) произвольно только одно значение разности потенциалов на каждом из актуаторов.

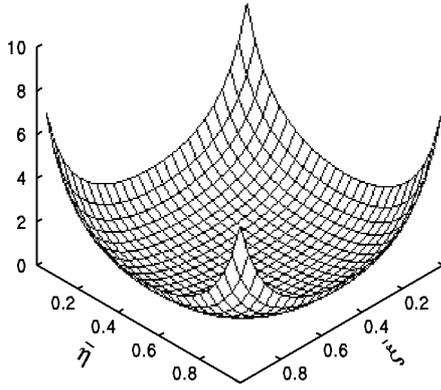


Рис. 1. Зависимость величины M^0/m^0 от координат центра актуатора для моды колебаний с частотой ω_{11}

Поэтому если на поверхность пластины нанесен один актуатор, он может компенсировать только одну составляющую нагрузки в выражениях (34) и (36). Как правило, максимальная составляющая нагрузки соответствует индексам $m=n=1$. При необходимости компенсации нескольких слабых следует увеличивать количество актуаторов. Для компенсации любой из гармоник необходимо разность потенциалов выбирать из условия равенства нулю числителя выражения (45), т. е.

$$p_{mn}^0 - (k_{mn}^2 + p_{mn}^2) m_{mn}^0 = 0. \tag{46}$$

Тогда решение приобретает вид

$$w = \sum_{r \neq m} \sum_{s \neq n} \frac{[p_{rs}^0 - (k_{mn}^2 + p_{mn}^2) m_{mn}^0]}{\Delta_{rs}} \times \sin k_r x \sin p_s y, \tag{47}$$

где

$$\Delta_{rs} = \Delta'_{rs} + i \Delta''_{rs} - \tilde{\rho} \omega_{mn}^2. \tag{48}$$

Величина прогиба резко падает из-за отсутствия резонансного члена в выражении (47), что обеспечивает быструю сходимость ряда Фурье.

Разность потенциалов рассчитывается по формуле, следующей из соотношений (33), (46):

$$M^0 = \frac{ab p_{mn}^0 k_m p_n}{16 k_m^2 + p_n^2} \times \frac{1}{\sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin k_n c/2 \sin p_n d/2}. \tag{49}$$

Величина M^0 пропорциональна подводимой к актуатору разности потенциалов. Центр актуато-

ра и его размеры выбираются из условия минимальности этой разности. Как следует из формулы (49), минимум разности потенциалов наблюдается при выполнении следующих равенств:

$$\begin{aligned} \sin k_m \xi &= 1, & \sin p_n \eta &= 1, \\ \sin \frac{k_m c}{2} &= 1, & \sin \frac{p_n d}{2} &= 1. \end{aligned} \tag{50}$$

Рассмотрим моды колебаний, соответствующие частотам $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{13}, \omega_{22}$. Для моды ω_{11} центр актуатора должен выбираться из условий

$$\sin k_1 \xi = 1, \quad \sin p_n \eta = 1,$$

так что его координаты равны $\xi = a/2, \eta = b/2$, (центр актуатора совпадает с центром пластины). При другом выборе центра актуатора имеем поверхность, описываемую выражением

$$\frac{M^0}{m^0} = \frac{1}{\sin k_1 \xi \sin p_1 \eta}, \tag{51}$$

где m^0 – некоторая константа.

На рис. 1 представлена поверхность, изображающая зависимость величины M^0/m^0 , пропорциональной разности потенциалов, от координат центра актуатора. Здесь $\xi = \xi/a, \eta = \eta/b$. Как следует из рисунка и формулы (51), при приближении центра актуатора к торцам пластины подводимая к нему разность потенциалов стремится к бесконечности. В окрестности точки $(a/2; b/2)$ существует достаточно большая область, в которой потенциал мало отличается от своего минимального значения. Поэтому центр актуатора также можно размещать в этой области.

Для моды ω_{21} из условия (50) при $m=2, n=1$ минимальная разность потенциалов достигается при размещении центров актуаторов в точках $(a/4; b/2), (3a/4; b/2)$. При этом разность потенциалов в зависимости от координат центра актуатора определяется соотношением

$$\frac{M^0}{m^0} = \frac{1}{\sin k_2 \xi \sin p_1 \eta}.$$

Поверхность, изображающая зависимость M^0/m^0 от координат центра актуатора, имеет такой же вид, что и поверхность на рис. 1, но с тем отличием, что она размещена над прямоугольником $0 \leq x \leq a/2, 0 \leq y \leq b/2$ с диагональю, длину которой обозначим через l .

Для моды ω_{13} центры актуаторов должны быть размещены в точках $(a/2; b/2)$, $(a/2; b/6)$, $(a/2; 5b/6)$. При этом пластина разбивается на три полосы шириной $b/3$ и длиной a . Над каждой из этих полос поверхность имеет вид, показанный на рис. 1. Разность потенциалов будет стремиться к бесконечности при подходе к краям указанных полос.

Для моды ω_{22} центры актуаторов, соответствующие минимальной разности потенциалов, расположены в точках $(a/4; b/4)$, $(a/4; 3b/4)$, $(3a/4; b/4)$, $(3a/4; 3b/4)$. Поэтому пластину следует разбить на четыре равных прямоугольника с центрами в этих точках. Над каждым из прямоугольников поверхность, изображающая зависимость разности потенциалов от координат центра актуатора, имеет вид, показанный на рис. 1.

Потенциал стремится к бесконечности при приближении центра актуатора к краям прямоугольника. Таким образом, при неудачном выборе координат центров актуаторов для каждой из мод потенциал может достичь критических значений, при которых наступит электрический или тепловой пробой.

Теперь рассмотрим, как изменяется разность потенциалов в зависимости от размера актуатора, размещенного в центре пластины (или упомянутых выше прямоугольников). Площадь актуаторов будем изменять путем изменения размеров l их диагоналей.

Для моды ω_{11} имеем

$$\frac{M^0}{m_1} = \frac{1}{\sin^2(\pi l/2L)},$$

где l и L – длины диагоналей актуатора и пластины соответственно. Характер зависимости величины потенциала от размера диагонали актуатора представлен на рис. 2. Вначале при изменении длины диагонали актуатора наблюдается резкое уменьшение потенциала, а затем – лишь незначительное его изменение. Для моды ω_{21} при выборе центра актуатора в точке $(a/4; b/2)$ имеем такое же соотношение, в котором L – длина диагонали прямоугольника с центром в $(a/4; b/2)$. Аналогичная формула справедлива и для моды ω_{22} при выборе центра актуатора в точке $(a/4; b/4)$. При этом L – длина диагонали прямоугольника.

Для моды ω_{13} при выборе координат центра актуатора в точке $(a/2; b/2)$ зависимость разности потенциалов от размера диагонали актуатора представлена на рис. 3. Заметим, однако, что если пластину разбить на три полосы, как было указано выше, и отнести длину диагонали актуатора к

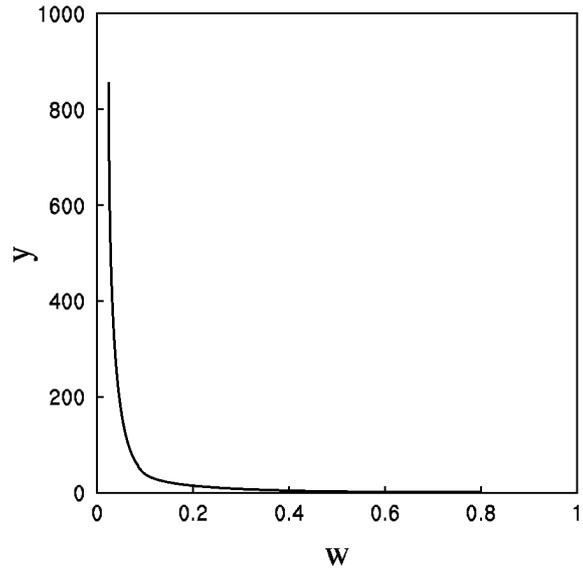


Рис. 2. Зависимость величины M^0/m^0 от длины диагонали актуатора для моды колебаний с частотой ω_{11}

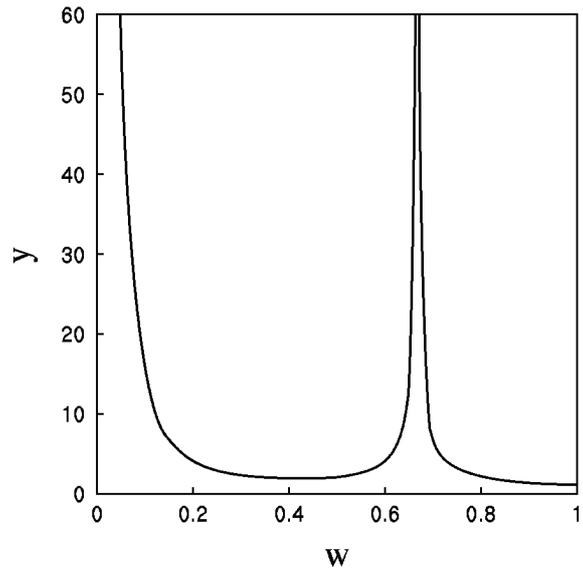


Рис. 3. Зависимость величины M^0/m^0 от длины диагонали актуатора для моды колебаний с частотой ω_{13}

длине диагонали полосы, то зависимость потенциала от размера диагонали актуатора будет иметь такой же характер, что и представленная на рис. 2.

Указанные выше формулы и графики иллюстрируют возможность компенсации нескольких мод колебаний с помощью актуаторов или разре-

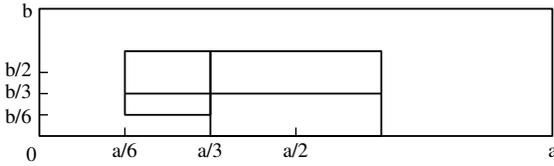


Рис. 4. Размещение актуаторов для компенсации четырех мод колебаний

зных электродов. На рис. 4 представлен один из возможных вариантов размещения четырех актуаторов (или разрезных электродов) при необходимости компенсации четырех мод колебаний. Естественно, при этом разность потенциалов на каждом актуаторе не будет минимальной.

Если функция M пропорциональна некоторой форме колебаний, то прогиб пластины, соответствующий этой форме, будет нулевым. Как отмечено выше, этот эффект может быть достигнут за счет изменения формы электродов, толщины пьезоактуатора, углов поворота главных направлений анизотропии и изменения направления поляризации. Если геометрическая конфигурация актуатора (или разрезного электрода) соответствует суперпозиции нескольких мод, то актуатор будет демпфировать все эти моды при должном выборе разности потенциалов.

Аналогичные соображения имеют место при расчете сенсоров. Пусть на пластину действует гармоническое во времени нагружение, распределенное по одной из форм колебаний. Тогда прогиб рассчитывается по формуле

$$w = w_{mn}^0 \sin k_m x \sin p_n y \exp(i\omega t). \quad (52)$$

Эта форма колебаний будет выдерживаться с большой точностью, если частота нагружения равна резонансной. В этом случае величина, обратная заряду Q , определяется по формуле

$$\frac{1}{Q} = \frac{A}{\sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin k_m c/2 \sin p_n d/2}, \quad (53)$$

где A – константа, не зависящая от координат центра и размеров актуатора.

Основной принцип работы сенсора состоит в том, что заряд должен быть максимальным при заданном прогибе. Тогда величина (53) будет минимальной.

Сравнение формул (49) и (53) показывает, что координаты центра сенсора и его размеры определяются одинаковыми соотношениями. Представ-

ленные выше соображения о положении и размерах актуатора для разных мод колебаний сохраняются без изменений и для сенсора. Если геометрия сенсора имеет вид некоторой моды колебаний, сенсор будет реагировать только на эту моду (играть роль фильтра).

Представленные рассуждения носят общий характер, независимо от вида граничных условий. Пусть в результате анализа частот и мод колебаний упругой пластины установлено, что при нестационарном нагружении основной вклад в деформирование вносят несколько мод (например, указанные выше четыре). Тогда при соответствующем выборе координат центров и размеров четырех актуаторов можно, согласно представленным выше формулам, устранить действие этих мод на пластину. При этом следует иметь в виду, что электроды актуаторов должны быть отделены друг от друга, т. е. необходимо использовать четыре разрезных электрода прямоугольной формы. Подводя к этим электродам разности потенциалов, рассчитанные по представленным выше формулам, можно существенно уменьшить прогиб в результате подавления четырех основных мод.

3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ

При учете влияния пьезослоев на жесткостные характеристики пластины и при граничных условиях, отличных от шарнирного опирания, получаем сложную задачу для пластины, структурно-неоднородной как по толщине, так и в плане. В этом случае найти какие-либо аналитические решения достаточно трудно.

Задачу можно существенно упростить, если использовать, например, трехслойную пластину, состоящую из пассивного среднего слоя и двух пьезоактивных слоев противоположной поляризации, покрывающих всю поверхность пластины. При использовании такого подхода компенсация внешней нагрузки производится нанесением на пьезослой бесконечно тонких электродов необходимой конфигурации, к которым подводится разность потенциалов, выбранная из соображений, приведенных в предыдущем разделе.

Для решения задачи активного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний можно использовать численные методы, в частности, метод конечных элементов. Подробности используемого варианта метода конечных элементов при вынужденных одночастотных колебаниях представлены в работах [16–18]. Результаты расчета амплитудно-частотных характеристик для трехслойной шарнирно опертой и жестко защемлен-

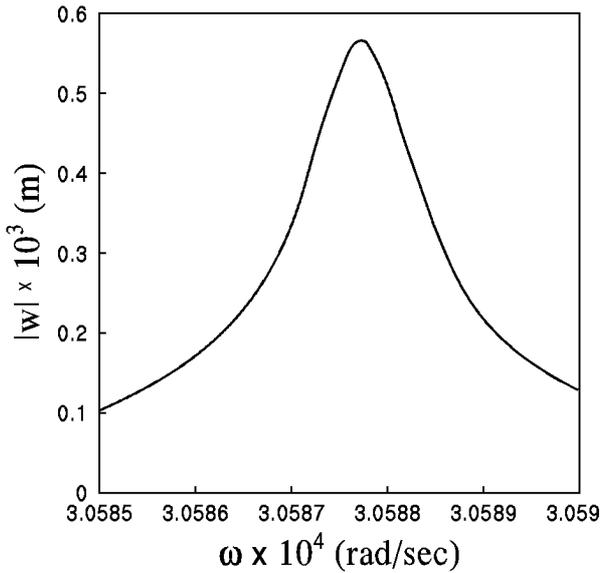


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика для шарнирно опертой пластины

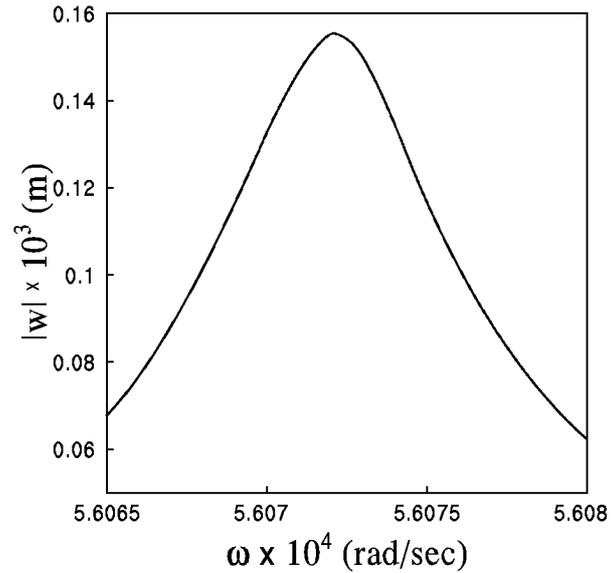


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика для жестко заземленной пластины

ной квадратной пластины представлены на рис. 5 и 6 соответственно. На средний пассивный слой из дюралюминия нанесены пьезослой одинаковой толщины и с одинаковыми электромеханическими свойствами, но с противоположной поляризацией. Электромеханические свойства материалов пассивного и пьезоактивных слоев материалов выбирались такими же, как и в работе [15], а размеры пластины полагались следующими: длина стороны $a=0.1$ м, толщина пассивного слоя $h=0.0098$ м, толщина каждого из пьезоактивных слоев $h_1=0.0001$ м. Заметим, что на рисунках представлены амплитудно-частотные характеристики вязкоупругой пластины при действии на нее изменяющегося по гармоническому закону внешнего давления без использования активного демпфирования. Далее, по указанной выше методике рассчитывалась необходимая для компенсации первой моды разность потенциалов. В результате ее действия прогибы пластин уменьшались на четыре порядка (в силу своей малости на графиках они не представлены). На рис. 7 представлена зависимость разности потенциалов, необходимой для компенсации механической нагрузки, от размера стороны квадратного электрода в случае жесткого заземления торцов.

Кратко рассмотрим технику использования метода конечных элементов (МКЭ) для случая демпфирования нестационарных колебаний, когда поведение изотропного материала описывается про-

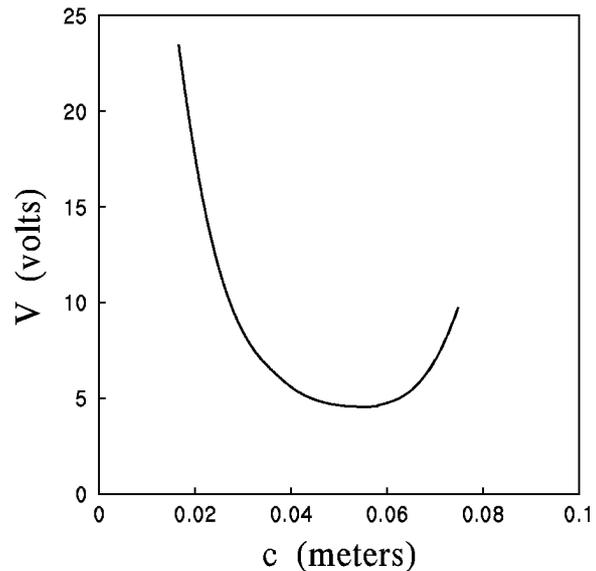


Рис. 7. Зависимость разности потенциалов от размеров актуатора для жестко заземленной пластины

стейшей моделью Фойгта, а поверхностная нагрузка изменяется во времени по закону $q = q_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. При этом все операторы в выражениях (18) принимают форму

$$D_{kl} = D_{kl}^0 + D_{kl}^1 \frac{\partial}{\partial t}. \quad (54)$$

Для изотропного пассивного материала выражения для жесткостных характеристик трехслойной пластины указанной выше структуры имеют вид

$${}^0D_{11} = \frac{2}{3S_{11}^E(1-\nu_1^2)} \left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^3 - \left(\frac{h_2}{2} \right)^3 + \frac{1+\nu_1}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} h_1^3 \right] + \frac{E_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)},$$

$${}^0D_{12} = \frac{2}{3S_{11}^E(1-\nu_1^2)} \left[\nu_1 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^3 - \nu_1 \left(\frac{h_2}{2} \right)^3 + \frac{1+\nu_1}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} h_1^3 \right] + \frac{\nu_2 E_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)},$$

$${}^0D_{66} = \frac{2}{3S_{11}^E(1+\nu_1)} \left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^3 - \left(\frac{h_2}{2} \right)^3 \right] + \frac{E_2 h_2^3}{12(1+\nu_2)},$$

$${}^1D_{11} = \frac{2C_1}{3(1-\nu_1^2)} \left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^3 - \left(\frac{h_2}{2} \right)^3 + \frac{1+\nu_1}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} h_1^3 \right] + \frac{C_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)},$$

$${}^1D_{12} = \frac{2C_1}{3(1-\nu_1^2)} \left[\nu_1 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^3 - \nu_1 \left(\frac{h_2}{2} \right)^3 + \frac{1+\nu_1}{8} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} h_1^3 \right] + \frac{C_2 \nu_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)},$$

$${}^1D_{66} = \frac{2C_1}{3(1+\nu_1)} \left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^3 - \left(\frac{h_2}{2} \right)^3 \right] + \frac{C_2 h_2^3}{12(1+\nu_2)}. \tag{55}$$

Для выбранной механической нагрузки разность потенциалов должна изменяться во времени по закону $V(t) = \int_0^t H(t) dt$. Тогда

$$M_0 = \frac{1}{2} \gamma_{11} (h_1 + h_2) V_0 H(t). \tag{56}$$

В соотношениях (55), (56) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{d_{31}(1+\nu_1)}{S_{11}^E(1-\nu_1^2)}; & \gamma_{33} &= \varepsilon_{33}^T(1-k_p^2); \\ \nu_1 &= -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}; & k_p^2 &= \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^E(1-\nu_1)\varepsilon_{33}^T}. \end{aligned} \tag{57}$$

Константы C_1, C_2, ν_1, ν_2 характеризуют упругие и диссипативные свойства пассивного материала.

При шарнирном закреплении краев пластины уравнение (35) приобретает вид

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + 2\mu_{mn} \frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 w_{mn} = F_{mn} H(t), \tag{58}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 &= \frac{D_{11}}{\bar{\rho}} (k_m^2 + p_n^2)^2; & \mu_{mn} &= \frac{{}^0D_{11}}{2D_{11}} \omega_{mn}^2; \\ F_{mn} &= \frac{16}{ab k_m p_n \bar{\rho}} \left[p_0 - M_0 (k_m^2 + p_n^2) \right]. \end{aligned} \tag{59}$$

Решение уравнения (53) должно удовлетворять нулевым начальным условиям. Необходимо отметить, что для модели Фойгта это уравнение является точным, а при использовании метода усреднения для уравнений состояния интегрального типа оно дает лишь приближенное решение. Для указанного типа нагружения точное решение получаем в форме

$$\begin{aligned} w &= \frac{16}{ab D_{11}} \sum_m \sum_n \frac{p_0 - (k_m^2 + p_n^2) M_0}{k_m p_n (k_m^2 + p_n^2)^2} \times \\ &\times \left[1 - e^{-\mu_{mn} t} \left(\cos \omega_{\mu} t + \frac{\mu_{mn}}{\omega_{\mu}} \sin \omega_{\mu} t \right) \right], \end{aligned} \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned} m &= 1, 3, \dots; & n &= 1, 3, \dots; \\ \omega_{\mu} &= \sqrt{\omega_{mn}^2 - \mu_{mn}^2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Как и в общем случае, выбрав разность потенциалов в соответствии с зависимостью

$$V_0 = \frac{2p_0}{\gamma_{11}(h_1 + h_2)(k_m^2 + p_n^2)}, \tag{62}$$

можно исключить любую из гармоник в соотношении (60). Скомпенсировав основную гармонику, мы существенно уменьшим прогиб пластины.

Аналитическое решение (60) может служить эталоном при разработке численных методов моделирования демпфирования колебаний с помощью пьезоэлектрических включений (в частности, при моделировании МКЭ).

Для модели Фойгта вариационное уравнение в пространстве изображений по Лапласу имеет вид

$$\delta\bar{\mathfrak{E}}(x, y, z) = 0, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{E}} = & \frac{1}{2} \int_F \left\{ \left(D_{11}^0 + sD_{11}^1 \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \left(D_{12}^0 + sD_{12}^1 \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \\ & + \left(D_{22}^0 + sD_{22}^1 \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \\ & + 2 \left(D_{66}^0 + sD_{66}^1 \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \\ & + \tilde{\rho} s^2 \bar{w} - \frac{2p_0}{s} \bar{w} - \\ & \left. - \frac{2}{s} M_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (64)$$

Для решения задачи (63), (64) срединная поверхность пластины делится n^* узловыми точками на m^* четырехугольных изопараметрических элементов. При этом в пределах элемента прогиб пластины аппроксимируется полиномами Эрмита:

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \sum_{i=1}^4 L_i \bar{w}_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)_i + \\ & + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)_i, \end{aligned} \quad (65)$$

где \bar{w}_i ; $(\partial \bar{w} / \partial x)_i$; $(\partial \bar{w} / \partial y)_i$; $(\partial^2 \bar{w} / \partial x \partial y)_i$ – изображения по Лапласу узловых значений прогиба и производных в вершинах четырехугольника; L_i , $i = 1 \div 16$ – бикубические полиномы Эрмита. Из соотношений (65) следует, что рассматриваемый элемент имеет 16 степеней свободы. Аппроксимируя механическую нагрузку и разность потенциалов полиномами Эрмита и выполняя обычную процедуру МКЭ, для определения изображений прогиба и его производных получаем систему линейных

алгебраических уравнений. В области оригинала ей соответствует система линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций времени:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = Q(t) \quad (66)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned} U(t) = 0, \quad \dot{U}(t) = 0, \\ \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

где M , C , K – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости; $Q(t)$ – узловые значения вектора электромеханической нагрузки.

Для решения системы (66) использован неявный метод, согласно которому на каждом временном шаге Δt необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} [a_0 M + a_1 C + (1 + \alpha) K] U_{K+1} = \\ = Q_{K+1} + \alpha K U_K + \\ + (a_0 U_K + a_2 \dot{U}_K + a_3 \ddot{U}_K) M + \\ + (a_1 U_K + a_4 \dot{U}_K + a_5 \ddot{U}_K) C, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\ddot{U}_{K+1} = a_0 (U_{K+1} - U_K) - a_2 \dot{U}_K - a_3 \ddot{U}_K,$$

$$\dot{U}_{K+1} = \dot{U}_K + a_6 \ddot{U}_K + a_7 \ddot{U}_{K+1}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha = \left[-\frac{1}{3}; 0 \right]; \quad \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}; \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha; \\ a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; \\ a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1; \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); \\ a_6 = \Delta t (1 - \gamma); \quad a_7 = \gamma \Delta t. \end{aligned}$$

Полагая в соотношениях (68) $\alpha = 0$, получаем алгоритм Ньюмарка [19].

На основе указанного выше подхода реализованы алгоритмы решения динамических задач с полностью или частично электродированными поверхностями. Конкретные расчеты проведены для пластины, составленной из противоположно поляризованных внешних слоев пьезокерамики типа ЦТСтБС-2 [11, 21, 22] и внутреннего дюралюминиевого слоя со следующими характеристиками ма-

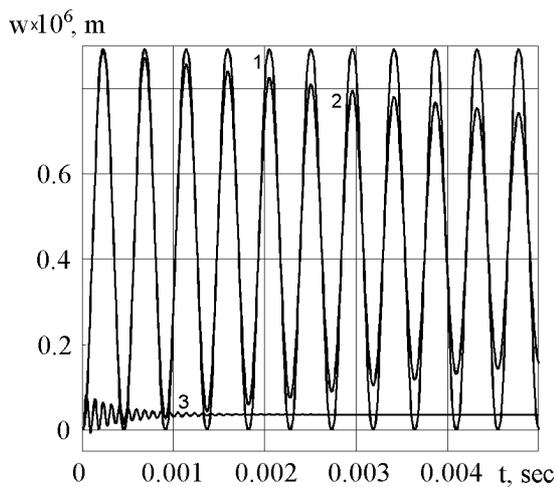


Рис. 8. Зависимость прогиба от времени для шарнирно закрепленной пластины

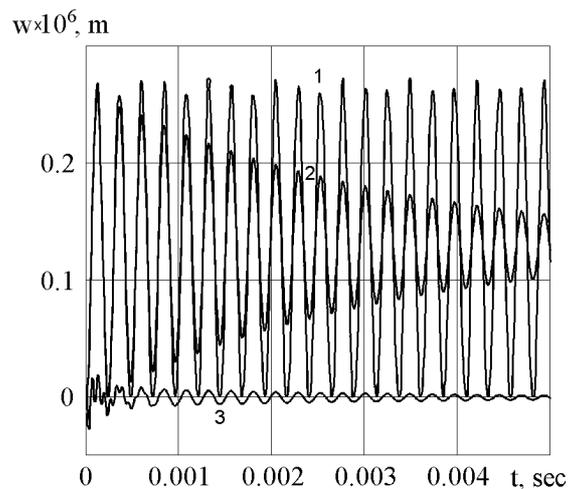


Рис. 9. Зависимость прогиба от времени для жестко заземленной пластины

териалов [20], размерами и параметрами нагружения:

$$\begin{aligned}
 d_{31} &= -1.6 \cdot 10^{-10} \text{ К/Н}, & S_{11}^E &= 12.5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \\
 S_{12}^E &= 4.2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, & \varepsilon_{33}^T &= 2100 \varepsilon_{33}^0, \\
 \varepsilon_{33}^0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, & \eta_1 &= 1.7 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\
 E_2 &= 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & \eta_2 &= 1.47 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\
 \rho_2 &= 0.279 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3, & \nu_2 &= 0.34, \\
 H &= 2h_1 + h_2 = 0.005 \text{ м}, & h_2 &= 0.004 \text{ м}, \\
 a &= b = 0.1 \text{ м}, & p_0 &= 0.1, \\
 V_0 &= 11 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

В таблице приведены максимальные значения прогиба в центре пластины для различных моментов времени, вычисленные с использованием аналитического (60) и конечно-элементного решений. Расчеты проводились как при раздельном, так и при совместном действии механической и электрической нагрузок. Разность потенциалов, позволяющая исключить в решении (60) первую гармонику, определялась в соответствии с условием (62).

На рис. 8 показана временная зависимость прогиба в центре шарнирно опертой пластины. Кривые 1 и 2 отвечают решению упругой и вязкоупругой задач соответственно при действии только механической нагрузки, а кривая 3 – решению вязкоупругой задачи при совместном электрическом и механическом нагружении.

В качестве второго примера использования предлагаемого подхода рассмотрим задачу о нестационарных колебаниях слоистой пластины с жестко заземленными краями. В этом случае демпфирования нестационарных колебаний можно достичь только при использовании частично электродированных поверхностей. Разность потенциалов, которую необходимо приложить к электродам для демпфирования первой моды, определяется в той же последовательности, что и раньше. Сначала решается задача на собственные колебания и вычисляется первая собственная частота изгибных колебаний жестко заземленной пластины. Затем определяется разность потенциалов, необходимая для демпфирования первой моды при действии нагрузки

$$p(t) = p_0 \cos \omega t.$$

Вычисленная таким образом разность потенциалов в зависимости от размеров электродированной области, дана на рис. 7.

На рис. 9 представлены кривые изменения прогиба в центре жестко заземленной пластины в зависимости от времени. Кривые 1 и 2 соответствуют решению упругой и вязкоупругой задач при действии механической нагрузки, а кривая 3 – при совместном действии электрической и механической нагрузок. Как следует из полученных результатов, резкое уменьшение амплитуды колебаний пластины достигается даже при использовании одного актуатора.

Таблица. Сравнение аналитического и численного (конечно-элементного) решений

$10^2 \times t, [c]$	Аналитическое решение $10^6 \times w, [M]$			Решение МКЭ $10^6 \times w, [M]$		
	$P = P_0H(t),$ $V = 0$	$P = 0,$ $V = V_0H(t)$	$P = P_0H(t),$ $V = V_0H(t)$	$P = P_0H(t),$ $V = 0$	$P = 0,$ $V = V_0H(t)$	$P = P_0H(t),$ $V = V_0H(t)$
0.023	0.885	0.822	0.063	0.885	0.821	0.064
0.114	0.856	0.817	0.039	0.857	0.818	0.038
0.206	0.820	0.784	0.036	0.823	0.788	0.036
0.296	0.794	0.759	0.035	0.793	0.757	0.036
0.387	0.767	0.731	0.036	0.766	0.728	0.036
0.478	0.739	0.704	0.035	0.737	0.701	0.036
0.615	0.706	0.671	0.035	0.703	0.667	0.036
0.752	0.676	0.640	0.036	0.673	0.637	0.036
0.888	0.649	0.615	0.034	0.646	0.617	0.035
0.980	0.632	0.596	0.036	0.629	0.593	0.036

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлена постановка задачи о демпфировании стационарных и нестационарных колебаний пластин с помощью включения в их структуру слоев вязкоупругих материалов и пьезоэлектрических включений, выполняющих функции сенсоров и актуаторов. Представлены возможные типы уравнений обратной связи, влияющей на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики пластины. Показано, что за счет использования обратной связи достигается существенное уменьшение амплитуд колебаний пластины.

Рассмотрен метод демпфирования колебаний, при котором к пьезоактуатору подводится разность потенциалов с амплитудой и фазой, необходимыми для компенсации внешней механической нагрузки. Подробно рассмотрен случай нагружения пластины давлением, изменяющимся по гармоническому закону. Для шарнирного закрепления торцов пластины получено аналитическое решение задачи о демпфировании ее колебаний. Представлены простые формулы, дающие возможность рассчитать координаты центра прямоугольного пьезовключения и его размеры из условия минимальности подводимой к пьезоактуатору разности потенциалов. Аналогичные соотношения получены и для сенсоров.

Представленные результаты расчета амплитудно-частотных характеристик для различных видов граничных условий свидетельствуют об эффективности рассмотренного способа демпфирования колебаний. Указаны

возможные подходы к проблеме демпфирования нестационарных колебаний, когда за счет компенсации определенного количества мод можно существенно уменьшить уровень вибраций объекта. Указан один из возможных вариантов размещения электродов для демпфирования четырех мод колебаний. В качестве примера использования одного актуатора решена задача об активном демпфировании изотропной пластины, изготовленной из вязкоупругого материала Фойгта. Рассмотрены два типа граничных условий: шарнирного и жесткого защемления торцов пластины. Для первого типа получено точное решение задачи о демпфировании колебаний, которое служит эталоном при оценке точности решения аналогичной задачи с помощью метода конечных элементов. Приведенные результаты расчета временных зависимостей прогиба в случаях пассивного и активного демпфирования свидетельствуют об эффективности использования активных методов.

1. Дубенец В. Г., Хильчевский В. В. Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т. 1. – К.: Вища школа, 1995. – 226 с.
2. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
3. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
4. Gabbert U. and Tzou H. S. Smart structures and structronic systems. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Pub., 2001. – 384 p.
5. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A

- survey // Appl. Mech. Reviews.– 1994.– **47**, N 44.– P. 113–123.
6. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Reviews.– 1998.– **51**, N 8.– P. 505–521.
7. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems.– Cambridge: Cambridge University Press, 1998.– 400 p.
8. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (distributed sensing and control of continua).– Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Pub., 1993.– 400 p.
9. *Механика связанных полей в элементах конструкций: в пяти томах. Том 5. Электроупругость /* Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с.
10. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.– М.: Наука, 1974.– 446 с.
11. *Механика связанных полей в элементах конструкций: в пяти томах. Том 4. Электротермовязкоупругость /* Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с.
12. *Ильюшин А. А., Победра Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости.– М.: Наука, 1970.– 280 с.
13. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел.– М.: Наука, 1977.– 384 с.
14. *Барканов Е., Рикардс Р., Хольсте К., Тегер О.* Вынужденные колебания вязкоупругой балки, пластины и оболочки типа сэндвич под ударной нагрузкой // Мех. композит. материалов.– 2001.– **36**, N 3.– С. 367–377.
15. *Карнаухова О. В., Козлов В. И., Рассказов О. А.* Параметрические колебания трехслойных пьезоэлектрических оболочек вращения // Акуст. вісн.– 2001.– **4**, N 1.– С. 31–43.
16. *Рассказов А. О., Козлов А. В.* Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочки вращения при нестационарном нагружении // Прикл. мех.– 1998.– **34**, N 5.– С. 68–75.
17. *Bhimaraddi A., Carr A. J., Moss P. T.* A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // Comput. Struct.– 1989.– **31**, N 3.– P. 299–308.
18. *Huang-Sying Ying, Ming-Liang Liao* Partial hybrid stress element for transient analysis of thick laminated composite plates // Int. J. Numer. Methods in Engng.– 1990.– **29**, N 8.– P. 1787–1796.
19. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов.– М.: Стройиздат, 1982.– 448 с.
20. *Bank H. T., Rosario R., Smith R. C.* Reduced-order model feedback control design: Numerical implementation in a thin shell model // IEEE Trans. Automat. Control.– 2000.– **45**, N 7.– P. 1312–1324.
21. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // Прикл. мех.– 2000.– **36**, N 2.– С. 39–63.
22. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И.* Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. мех.– 2001.– **37**, N 2.– С. 45–77.