

И. А. Лоза

## Кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в полом слоистом цилиндре при механическом способе возбуждения

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

*Проведен кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в неоднородном по толщине полом цилиндре, состоящем из металлических и пьезокерамических слоев, поляризованных в радиальном направлении при механическом способе возбуждения волн. Боковые поверхности цилиндра неэлектропроводны, внешняя боковая поверхность свободна от внешних воздействий, а к внутренней приложено гармонически изменяющееся давление  $P e^{i(kz - \omega t)}$ . Для решения задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После применения метода разделения переменных и представления решения в виде бегущих волн по длине цилиндра начальная задача теории электроупругости в частных производных сводится к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученная система решается устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты численных исследований для слоистого цилиндра, состоящего из слоев пьезокерамики PZT 4 и стали.*

**Ключевые слова:** кинематический анализ акустоэлектрических волн, слоистые пьезокерамические цилиндры, дискретная ортогонализация.

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с пьезокерамическими и металлическими слоями. Исследованию задачи о распространении упругих волн в круговых цилиндрах посвящено значительное количество работ. Содержание проведенных исследований достаточно полно отражено в работах [1–4] и др. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований. Так, для пьезокерамического цилиндра только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Наличие поверхности раздела двух сред приводит к необходимости удовлетворять условия сопряжения разрешающих функций на границе раздела сред. Исследования, посвященные этой проблематике, можно найти в работах [5, 6].

В данной работе для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с металлическими и пьезокерамическими слоями предложен эффективный численно-аналитический подход. На основании предложенного подхода проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Осесимметричные продольные уравнения движения  $i$ -го слоя в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения электростатики для  $i$ -го слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} &= 0; \\ E_r^i &= -\frac{\partial \phi^i}{\partial r}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

геометрические соотношения для  $i$ -го слоя:

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^i$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho^i$  — плотность материала;  $\omega$  — круговая частота;  $u_i^i$  — компоненты вектора перемещений;  $D_i^i$  — компоненты вектора электрической индукции;  $E_i^i$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\phi^i$  — электростатический потенциал;  $\varepsilon_{ij}^i$  — компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для  $i$ -го пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; & \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; & \sigma_{rz}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{51}^i E_z^i; \\ D_r^i &= e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{31}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{31}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; & D_z^i &= 2e_{51}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{33}^i E_z^i, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c_{ij}^i$  — компоненты тензора модулей упругости,  $e_{ij}^i$  — компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{ij}^i$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Физические соотношения для  $i$ -го металлического слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \frac{(1 - \nu^i) E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1 - \nu^i) E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1 - \nu^i) E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2 \frac{E^i}{2(1 + \nu^i)} \varepsilon_{rz}^i. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга. В дальнейшем индекс  $i$  будем опускать.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) задаются следующие.

Поверхности неэлектродированы  $D_r|_{r=R_0 \pm h} = 0$ . Внешняя поверхность цилиндра свободна от внешних усилий  $\sigma_{rr}|_{r=R_0+h} = \sigma_{rz}|_{r=R_0+h} = 0$ , к внутренней поверхности приложено гармонически изменяющееся давление  $\sigma_{rr}|_{r=R_0-h} = P e^{i(kz-\omega t)}$ ;  $\sigma_{rz}|_{r=R_0-h} = 0$ . Здесь  $R_0$  — радиус серединной поверхности цилиндра;  $h$  — половина толщины цилиндра.

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа:

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \phi, u_r, u_z, D_r\}^T. \quad (6)$$

Разрешая систему (1)–(4) относительно разрешающего вектора, после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r \Delta} u_r - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{r c_{55}} \frac{\partial \phi}{\partial z}; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_7}{c_{55}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:  $\Delta = c_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2$ ;  $\Delta_1 = c_{33}e_{13} - c_{13}e_{33}$ ;  $\Delta_2 = c_{13}\varepsilon_{33} + e_{13}e_{33}$ ;

$$\Delta_3 = (c_{13} - c_{33})\Delta_2 + (e_{33} - e_{13})\Delta_1 + (c_{13} - c_{11})\Delta;$$

$$\Delta_4 = (c_{13} - c_{33})\Delta_2 + (e_{33} - e_{13})\Delta_1 + (c_{13} - c_{12})\Delta;$$

$$\Delta_5 = c_{12}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2; \quad \Delta_6 = c_{11}\Delta + e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2; \quad \Delta_7 = c_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2.$$

**Решение задачи.** Решение задачи будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz-\omega t)}; & \sigma_{rz}(r, z, t) &= i \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz-\omega t)}; \\ \phi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \phi(r) e^{i(kz-\omega t)}; & u_r(r, z, t) &= h u_r(r) e^{i(kz-\omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= h u_z(r) e^{i(kz-\omega t)}; & D_r(r, z, t) &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя представление (8), исходную двухмерную задачу теории электроупругости в частных производных (7) можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega) \mathbf{R} \quad (9)$$

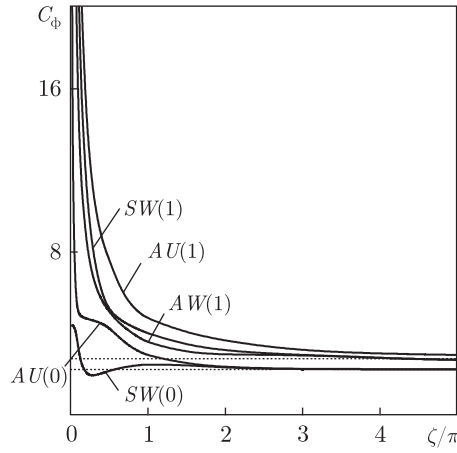


Рис. 1

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2. \quad (10)$$

где вектор  $\mathbf{C}_1^T = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ , вектор  $\mathbf{C}_2^T = \{P, 0, 0, 0, 0\}$ .

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h},$$

$\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>.

Решение задачи (9), (10) выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

**Результаты численного анализа.** Ниже приведены результаты численного анализа задачи (9), (10). Рассматривается трехслойный цилиндр, два внешних слоя которого являются пьезокерамическими из пьезокерамики PZT 4, а средний слой — стальной ( $\nu = 0,28$ ;  $E = 21$ ), параметр кривизны принят  $\varepsilon = 0,25$ . Толщина внешних слоев равна  $h$ , толщина среднего слоя —  $2h$ . На рис. 1 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. На рисунке используются обозначения для волн, принятые в работе [10]. Маркировка  $SW(0)$  означает, что волна рождается ( $k = 0$ ) как симметричные продольные колебания (волны расширения–сжатия),  $AU(0)$  — антисимметричные (изгибные) радиальные колебания. Как видно из приведенного рисунка, первые две ветки  $SW(0)$  и  $AU(0)$  в коротковолновом диапазоне выходят на одну скорость и распространяются практически без дисперсии. Две последующие  $AW(1)$  и  $SW(1)$  также выходят на одну скорость, но с большим значением.

На рис. 2 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в первой волне  $SW(0)$  для различных значений длин волн. Сплошной линией обозначены амплитуды радиальных перемещений  $u_r$ , штриховой — продольных  $u_z$ . Жирными линиями выделено распределение амплитуд перемещений в коротковолновой области. В случае длинных волн распределение амплитуд перемещений происходит практически по линейному закону. С уменьшением длины волны перемещения сосредотачиваются возле внешней боковой поверхности. Распределение перемещений в этом случае происходит по типу волн Рэлея.

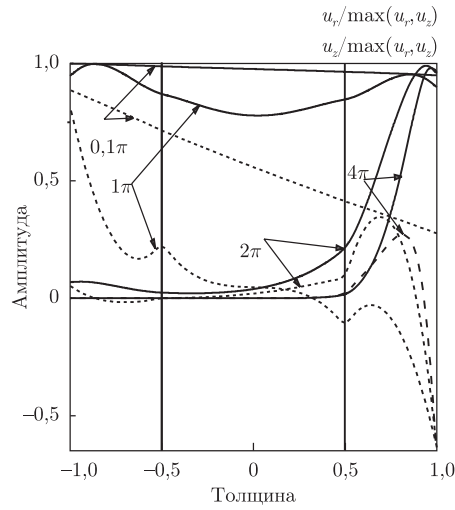


Рис. 2

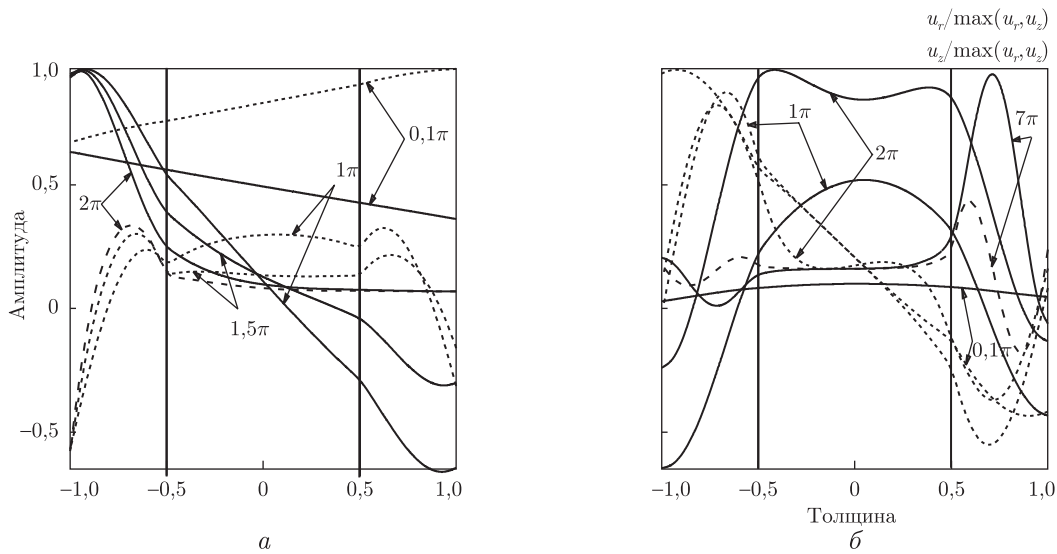


Рис. 3

Распределение амплитуд перемещений по толщине во второй волне  $AU(0)$  представлено на рис. 3, *а*. Также можно отметить, что для случая длинных волн распределение амплитуд перемещений по толщине носит линейный характер. С уменьшением длины волны перемещения также сосредотачиваются на боковой поверхности цилиндра, но уже на внутренней поверхности. Распределение перемещений в этом случае также происходит по типу волн Рэлея.

Рис. 3, *б* иллюстрирует распределение амплитуд перемещений по толщине в третьей волне  $AW(1)$ . В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны, перемещения сосредотачиваются в более мягких пьезокерамических слоях, в то время как стальной слой является практически недеформированным. Наибольшие перемещения наблюдаются во внешнем пьезокерамическом слое.

**Анализ результатов.** Так же, как и в случае однородного материала цилиндра, первая ветвь в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра. Для последующих же более высоких ветвей наблюдаются существенные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. В случае однородного материала с уменьшением длины волны амплитуды перемещений распределяются симметрично относительно срединной поверхности цилиндра. В случае же неоднородного материала с уменьшением длины волны перемещения сосредотачиваются в более мягких пьезокерамических слоях, в то время как более жесткий стальной слой остается практически не деформированным.

## Цитированная литература

1. *Физическая акустика* / Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1–7. – 663 с.
2. *Thurston R. N.* Elastic waves in rods and clad rods // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1978. – **64**, No 1. – P. 1–37.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
4. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
5. *Механика* связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Под ред. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. Отв. ред. А. Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. *Шульга Н. А.* Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами // *Усп. механики*. В 6-ти томах, 2007. – С. 681–702.
7. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *ASME Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **195**. – P. 195–216.
8. *Wu C.-P., Tsai T.-C.* Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method // *Appl. Math. Modelling.* – 2012. – **36**, Iss. 5. – P. 1910. – 1930.
9. *Grigorenko A., Müller W. H., Wille R., Loza I.* Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2012. – **24**(4–6). – P. 515–524.
10. *Григоренко А. Я., Лоза И. А.* Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями, поляризованными в осевом направлении // *Прикл. механика*. – 2011. – **47**, № 6. – С. 118–124.

## References

1. *Physical acoustics*, Ed. by W. Mason, R. Thurston, Moscow: Mir, 1966, Vol. 1–7 (in Russian).
2. *Thurston R. N.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 1978, **64**, No 1: 1–37.
3. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in solid bodies, Kiev: Naukova Dumka, 1981 (in Russian).
4. *Kolsky G.* Waves of stress in solid bodies, Moscow: IL, 1955 (in Russian).
5. *Mechanics of coupled fields in constructional elements*. Vol. 5, Elasolectricity, Eds. V.T. Grinchenko, A.P. Ulitko, N.A. Shulga, executive ed. A.N. Guz, Kiev: Naukova Dumka, 1989 (in Russian).
6. *Shulga N. A.* Advances of mechanics, in 6 vols., 2007: 681–702 (in Russian).
7. *Birman V., Byrd L. W.* *Appl. Mech. Rev.*, 2007, **195**: 195–216.
8. *Wu C.-P., Tsai T.-C.* *Appl. Mathemat. Modelling*, 2012, Vol. 36, Iss. 5: 1910–1930.
9. *Grigorenko A., Müller W. H., Wille R., Loza I.* *Continuum Mech. Thermodyn*, 2012, **24**(4–6): 515–524.
10. *Grigorenko A. Ya., Loza I. A.* *Int. Applied Mech.*, 2011, **47**, No 6: 118–124 (in Russian).

Национальный транспортный университет, Киев

Поступило в редакцию 12.03.2015

І. А. Лоза

## Кінематичний аналіз поширення вісесиметричних електропружних хвиль у порожнистому шаруватому циліндрі при механічному способі збудження

Національний транспортний університет, Київ

*Проведено кінематичний аналіз поширення вісесиметричних електропружних хвиль у неоднорідному по товщині порожнистому циліндрі, складеному з металевих та п'єзокерамічних шарів, поляризованих у радіальному напрямі при механічному способі збудження хвиль. Бічні поверхні циліндра вільні від електродів. Зовнішня бічна поверхня вільна від зовнішніх навантажень, а до внутрішньої підведений гармонічно змінний тиск  $Pe^{i(kz-\omega t)}$ . Для розв'язання даної задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Після розділення змінних і представлення розв'язку у вигляді хвиль, біжучих вздовж циліндра, початкова задача теорії електропружності у частинних похідних зводиться до неоднорідної крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях. Отримана система розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати чисельного аналізу для шаруватого циліндра, складеного з шарів п'єзокераміки PZT 4 та сталі.*

**Ключі слова:** кінематичний аналіз акустоелектричних хвиль, шаруваті п'єзокерамічні циліндри, дискретна ортогоналізація.

I. A. Loza

## Kinematic analysis of the propagation of axisymmetric elastoelectric waves in a hollow layered cylinder under a mechanical mode of excitation

National Transport University, Kiev

*The kinematic analysis of the propagation of axisymmetric elastoelectric waves excited mechanically in a hollow cylinder, which is inhomogeneous in thickness and is composed from metallic and piezoceramic layers, the latter being polarized in the radial direction, is performed. The lateral surfaces of the cylinder are free from electrodes. The external lateral surface is unloaded, and the internal surface undergoes the action of a pressure  $Pe^{i(kz-\omega t)}$ . For solving this problem, a numerical-analytical method is proposed. After the separation of variables and the representation of a solution in the form of waves running along the cylinder, the initial problem of the theory of elastoplasticity in partial derivatives is reduced to a boundary-value inhomogeneous problem with a system of ordinary partial differential equations solved by the stable method of discrete orthogonalization. The results of numerical analysis are given for a layered cylinder made from a steel and piezoceramic PZT 4.*

**Keywords:** kinematic analysis of elastoelectric waves, layered hollow cylinders, discrete orthogonalization.