УДК 517.956.223

І. С. Чепурухіна

Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями в крайових умовах

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Досліджено еліптичну крайову задачу для однорідного диференціального рівняння, яка містить додаткові невідомі функції у крайових умовах. Доведено, що оператор, який відповідає цій задачі, є обмеженим і нетеровим у підходящих парах гільбертових просторів Соболєва і ізотропних просторів Хермандера, що утворюють двобічну уточнену соболєвську шкалу. Для останніх показниками регулярності служать довільні дійсне число і додатна функція, повільно змінна на нескінченності за Караматою. Доведено теореми про апріорну оцінку узагальнених розв'язків задачі та їх регулярність.

Ключові слова: еліптична крайова задача, повільно змінна функція, простір Хермандера, нетерів оператор, апріорна оцінка розв'язків, регулярність розв'язків.

Еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах були введені Б. Лавруком [1, 2]. Такі задачі виникають при переході від загальної еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі (у випадку нерегулярних крайових умов). Більше того, клас цих задач замкнений відносно такого переходу. До цього класу належать різні задачі теорії пружності і гідродинаміки [3, 4].

Для еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями в крайових умовах доведено теореми про нетеровість відповідних операторів, породжені ними ізоморфізми, апріорні оцінки розв'язків і їх регулярність у двобічних шкалах функціональних просторів (див. [5, розд. 3] і [6, розд. 2]). Ці шкали складаються з просторів, введених Я. А. Ройтбергом [7]. Останні збігаються з просторами Соболєва лише для достатньо великих показників регулярності. Для інших значень показників простори Ройтберга містять елементи, які навіть не є розподілами в евклідовій області, де задана задача.

Мета роботи — встановити версії цих теорем для двобічної шкали просторів, утворених саме розподілами в евклідовій області. Така шкала складається з гільбертових просторів Соболєва і деяких ізотропних просторів Хермандера [8, п. 2.2]. Для останніх показниками регулярності служать довільні дійсне число і додатна функція, повільно змінна на нескінченності за Й. Караматою [9]. Ця уточнена соболєвська шкала була виділена і досліджена В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [10], які побудували для неї теорію розв'язності еліптичних крайових задач [11, 12]. Проте клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями в крайових умовах не був охоплений їх теорією.

У роботі розглянуто крайові задачі для однорідних еліптичних рівнянь. Оператор, який відповідає такій напіводнорідній задачі, коректно означений на всій двобічній уточненій соболєвській шкалі, що дає можливість отримати завершені результати. Для позитивної частини шкали ці задачі досліджено в [13] для неоднорідних еліптичних рівнянь.

1. Постановка задачі. Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geqslant 2$. Припустимо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким замкненим многовидом вимірності $n-1$ (C^∞ — структура на Γ є породжена простором $\mathbb{R}^n$). Як звичайно, $\overline{\Omega} := \Omega \bigcup \Gamma$.

Виберемо довільно цілі числа $q \geqslant 1$, $\varkappa \geqslant 1$, $m_1, \ldots, m_{q+\varkappa} \in [0, 2q-1]$ і $r_1, \ldots, r_\varkappa$. В області Ω розглянемо напіводнорідну лінійну еліптичну крайову задачу з $\varkappa$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$Au = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, q+\varkappa. \tag{2}$$

Тут $A := A(x, D)$ — диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ парного порядку $2q$, кожне $B_j := B_j(x, D)$ — крайовий диференціальний оператор на Γ порядку m_j, а кожне $C_{j,k} := C_{j,k}(x, D_\tau)$ — дотичний диференціальний оператор на Γ порядку $\mathrm{ord} C_{j,k} \leqslant m_j + r_k$. Усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкі функції, задані на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. Функція u на Ω і всі функції $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на Γ є шукані в крайовій задачі (1), (2). У роботі всі функції і розподіли вважаються комплекснозначними.

Нагадаємо (див. [5, п. 3.1.3] або [6, п. 2.2]), що крайова задача (1), (2) називається еліптичною в області Ω, якщо диференціальний оператор A правильно еліптичний на $\overline{\Omega}$, а система крайових умов (2) накриває A на Γ (тобто задовольняє аналог умови Шапіро–Лопатинського щодо A на Γ).

Позначимо через $K^{\infty}_{A}(\overline{\Omega})$ множину всіх функцій $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таких, що $Au = 0$ в області Ω. Пов'яжемо з крайовою задачею (1), (2) лінійне відображення

$$\Lambda' \colon (u, v_1, \ldots, v_\varkappa) \mapsto \left(B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, \ldots, B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k \right), \tag{3}$$
$$\text{де} \qquad u \in K^{\infty}_{A}(\overline{\Omega}), \qquad \text{і} \qquad v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^{\infty}(\Gamma).$$

Дослідимо властивості продовження (за неперервністю) цього відображення у підходящих парах гільбертових просторів Хермандера.

Для опису області значень цього продовження нам знадобиться формула Гріна

$$(Au, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} \left(B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k, h_j \right)_\Gamma =$$
$$= (u, A^+ w)_\Omega + \sum_{j=1}^{2q} \left(D_\nu^{j-1} u, K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^+_{k,j} h_k \right)_\Gamma + \sum_{j=1}^{\varkappa} \left(v_j, \sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^+_{k,j} h_k \right)_\Gamma,$$

правильна для довільних функцій u, $w \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $v_1, \ldots, v_\varkappa$, $h_1, \ldots, h_{q+\varkappa} \in C^{\infty}(\Gamma)$ (див. [5, теорема 3.1.2]). Тут і далі через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ позначено скалярні добутки в просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ усіх функцій, квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно, а також розширення за неперервністю цих скалярних добутків. Тут також A^+ є диференціальний оператор, формально спряжений до A відносно $(\cdot,\cdot)_\Omega$, а $C^+_{k,j}$ і $Q^+_{k,j}$ є дотичні диференціальні оператори, формально спряжені відповідно до $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. При цьому дотичний диференціальний оператор $Q_{k,j} := Q_{k,j}(x, D_\tau)$ узято із зображення крайового диференціального оператора B_j у вигляді

$$B_j(x, D) = \sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k}(x, D_\tau) D_\nu^{k-1}$$

(якщо $k > m_j$, то $Q_{j,k} := 0$). Тут і у формулі Гріна $D_\nu := i\partial_\nu$, де i — уявна одиниця, а ∂_ν — оператор диференціювання вздовж внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω. Крім того, $K_j := K_j(x, D)$ є деякий лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} K_j \leqslant 2q - j$.

З урахуванням формули Гріна розглянемо таку напіводнорідну крайову задачу в області Ω з $q + \varkappa$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$A^+ w = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^+_{k,j} h_k = \chi_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, 2q, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^+_{k,j} h_k = \chi_{2q+j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, \varkappa. \tag{6}$$

Ця задача є формально спряженою до задачі (1), (2) відносно вказаної формули Гріна. Відмітимо, що задача (1), (2) еліптична в області Ω тоді і тільки тоді, коли там еліптична формально спряжена задача (4)–(6) (див. [5, теорема 3.1.2]).

2. Уточнена соболєвська шкала. Розглянемо гільбертові функціональні простори, в яких буде досліджена крайова задача (1), (2). Вони утворюють уточнену соболєвську шкалу $\{H^{s,\varphi} \colon s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$, введену в [10]. Тут і надалі $\mathcal{M}$ — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi \colon [1, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені й відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються на нескінченності за Й. Караматою [9], тобто $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$. Повільно змінні функції добре вивчені і мають різноманітні застосування [14]. Їх характерним прикладом є функція

$$\varphi(t) := (\ln t)^{r_1} (\ln \ln t)^{r_2} \cdots (\ln \ldots \ln t)^{r_k}, \qquad t \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Означимо простір $H^{s,\varphi}$ спочатку на $\mathbb{R}^n$, де $n \geqslant 1$, а потім на Ω і Γ. Будемо додержуватись монографії [12, пп. 1.3, 2.1, 3.2].

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^n$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ є локально сумовним за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\|w\|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

де $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ гільбертів відносно норми $\|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$.

Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ є ізотропний випадок гільбертових просторів $\mathcal{B}_{2,\mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером [8, п. 2.2] і також Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [15, § 2]. Для цих просторів показником регулярності служить вагова функція $\mu \colon \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$. У нас $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ є радіальною функцією аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$.

У випадку, коли $\varphi \equiv 1$, простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ стає гільбертовим простором Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$ порядку s. Взагалі, виконуються неперервні і щільні вкладення

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0. \tag{7}$$

З них видно, що у класі просторів $\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\}$ числовий параметр s задає основну регулярність, а функціональний параметр φ — додаткову регулярність, підпорядковану основній. Коротко кажучи, φ уточнює основну регулярність s. Тому цей клас названо уточненою соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Її аналоги для Ω і Γ означаються таким чином.

Лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Omega)$ складається, за означенням, зі звужень на область Ω усіх розподілів $w\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. У ньому введена норма за формулою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)}:=\inf\{\|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\colon w\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n),\ w=u \text{ в } \Omega\},$$

де $u\in H^{s,\varphi}(\Omega)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно введеної норми, а множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в ньому.

Лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення. Із C^∞-структури на многовиді Γ виберемо який-небудь скінченний атлас, утворений локальними картами $\alpha_j:\mathbb{R}^{n-1}\leftrightarrow\Gamma_j$, де $j=1,\ldots,\lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Крім того, довільно виберемо функції $\chi_j\in C^\infty(\Gamma)$, де $j=1,\ldots,\lambda$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j\subset\Gamma_j$. Тоді, за означенням, простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h)\circ\alpha_j\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j\in\{1,\ldots,\lambda\}$. Тут $(\chi_j h)\circ\alpha_j$ є зображенням розподілу $\chi_j h$ у локальній карті α_j. Норма в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ означена за формулою

$$\|h\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)}:=\left(\sum_{j=1}^{\lambda}\|(\chi_j h)\circ\alpha_j\|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/2}.$$

Цей простір гільбертів і сепарабельний. Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зробленого вибору атласу і розбиття одиниці [12, теорема 2.3]. Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Ці гільбертові функціональні простори утворюють уточнені соболєвські шкали

$$\{H^{s,\varphi}(\Omega)\colon s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\}\qquad\text{і}\qquad\{H^{s,\varphi}(\Gamma)\colon s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\}\tag{8}$$

на Ω і Γ відповідно. Вони містять гільбертові соболєвські шкали: якщо $\varphi(t)\equiv 1$, то $H^{s,\varphi}(\Omega)=$ $=:H^s(\Omega)$ і $H^{s,\varphi}(\Gamma)=:H^s(\Gamma)$ є простори Соболєва порядку $s\in\mathbb{R}$.

Для шкал (8) виконуються компактні і щільні вкладення (7), якщо у формулі (7) замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ відповідно.

3. Результати. Сформулюємо результати роботи про властивості напіводнорідної еліптичної крайової задачі (1), (2) в уточнених соболєвських шкалах (8).

Із задачею (1), (2) і формально спряженою задачею (4)–(6) пов'яжемо лінійні простори N і N^+ нескінченно гладких розв'язків цих задач у випадку однорідних крайових умов. А саме: N складається з усіх розв'язків $(u,v_1,\ldots,v_\varkappa)\in C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^\varkappa$ задачі (1), (2) у випадку, коли всі $g_j=0$ на Γ, а N^+ складається з усіх розв'язків $(w,h_1,\ldots,h_{q+\varkappa})\in$ $\in C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$ задачі (4)–(6) у випадку, коли всі $\chi_j=0$ і всі $\chi_{2q+j}=0$ на Γ. Оскільки ці задачі еліптичні в Ω, простори N і N^+ скінченновимірні [5, лема 3.4.2]. Позначимо через N_1^+ скінченновимірний простір усіх векторів $(h_1,\ldots,h_{q+\varkappa})\in(C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$ таких, що $(w,h_1,\ldots,h_{q+\varkappa})\in N^+$ для деякого $w\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Покладемо $K_A^{s,\varphi}(\Omega):=\{u\in H^{s,\varphi}(\Omega)\colon Au=0 \text{ в } \Omega\}$ для довільних $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Тут образ Au розуміємо в сенсі теорії розподілів, а $K_A^{s,\varphi}(\Omega)$ розглядаємо як (замкнений) підпростір гільбертового простору $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Згідно з [12, теорема 3.11] множина $K_A^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в $K_A^{s,\varphi}(\Omega)$. Введемо гільбертові простори

$$\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := K_A^{s,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma), \qquad \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma) := \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Теорема 1. *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (3) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\Lambda' \colon \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma). \tag{9}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(g_1,\dots,g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$ таких, що

$$(g_1,h_1)_\Gamma + \ldots + (g_{q+\varkappa},h_{q+\varkappa})_\Gamma = 0 \qquad \text{для кожного} \qquad (h_1,\dots,h_{q+\varkappa}) \in N_1^+. \tag{10}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N_1^+$ *і не залежить від s та φ.*

З огляду на цю теорему нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T\colon E_1 \to E_2$, що діє у парі банахових просторів E_1 і E_2, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо оператор нетерів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1))$ скінченний.

Якщо $N = \{0\}$ і $N_1^+ = \{0\}$, то оператор (9) є ізоморфізмом за теоремою 1. У загальній ситуації цей оператор породжує ізоморфізм між деякими підпросторами, що мають скінченну ковимірність. У цьому зв'язку розглянемо такі розклади просторів, в яких діє оператор (9), у вигляді прямих сум підпросторів

$$\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) = N \dotplus \biggl\{(u,v_1,\dots,v_\varkappa) \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \colon$$
$$(u,u^{(0)})_\Omega + \sum_{k=1}^{\varkappa}(v_k,v_k^{(0)})_\Gamma = 0 \text{ для всіх } (u^{(0)},v_1^{(0)},\dots,v_\varkappa^{(0)}) \in N\biggr\}, \tag{11}$$

$$\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma) = N_1^+ \dotplus \{(g_1,\dots,g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma) \colon \text{виконується (10)}\}. \tag{12}$$

Позначимо через P і P_1^+ відповідно проектори просторів $\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$ на другий доданок у сумах (11) і (12) паралельно першому доданку. Ці проектори не залежать (як відображення) від s і φ.

Теорема 2. *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ звуження оператора* (9) *на підпростір $P(\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ є ізоморфізмом*

$$\Lambda' \colon P(K_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)) \leftrightarrow P_1^+(\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)). \tag{13}$$

Перейдемо до властивостей узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2). Попередньо дамо означення такого розв'язку.

Позначимо через $\mathcal{K}_A^{-\infty}(\Omega,\Gamma)$ об'єднання усіх просторів $\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За теоремою 1 для кожного вектора

$$(u,v) := (u,v_1,\dots,v_\varkappa) \in \mathcal{K}_A^{-\infty}(\Omega,\Gamma) \tag{14}$$

коректно означені за замиканням праві частини еліптичної крайової задачі (1), (2). Його називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі. Він задовольняє таку апріорну оцінку.

Теорема 3. *Нехай* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *і число* $\sigma > 0$. *Тоді існує число* $c > 0$ *таке, що*

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leqslant c(\|\Lambda'(u,v)\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)} + \|(u,v)\|_{\mathcal{K}_A^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}) \tag{15}$$

для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. *Тут* $c = c(s,\varphi,\sigma)$ *не залежить від* (u,v).

Дослідимо регулярність узагальненого розв'язку.

Теорема 4. *Нехай вектор* (14) *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умову* $g := (g_1,\ldots,g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$ *для деяких параметрів* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $(u,v) \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$.

Покладемо $m := \max\{m_1,\ldots,m_{q+\varkappa}\}$. З огляду на вкладення $K_A^{s,\varphi}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ узагальнений розв'язок (14) крайової задачі (1), (2) називається класичним, якщо $u \in C^m(\overline{\Omega})$ і $v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного $k \in \{1,\ldots,\varkappa\}$. Тоді ліві частини рівнянь (2) обчислюються за допомогою класичних похідних і є неперервними функціями.

Теорема 5. *Припустимо, що вектор* (14) *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умову* $g \in \mathcal{H}_{m+n/2,\varphi}(\Gamma)$ *для деякого параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$ *такого, що*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty. \tag{16}$$

Тоді цей розв'язок класичний.

Зауважимо, що в теоремі 5 умова (16) не лише достатня для класичності розв'язку (14), але й необхідна на класі всіх розглянутих узагальнених розв'язків.

Відмітимо, що теореми 1–4 є новими і для соболєвських просторів, тобто коли $\varphi \equiv 1$.

4. Обгрунтування результатів. Теорема 1 у соболєвському випадку, коли $s \in \mathbb{Z}$ і $\varphi \equiv \equiv 1$, випливає з [5, теорема 3.4.1]. Це доводиться за допомогою міркувань, подібних до тих, що наведені в [12, п. 4.4.2] (доведення теореми 4.25). Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ теорема 1 виводиться із соболєвського випадку методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів (її означення і властивості викладені в [12, п. 1.1]). А саме: виберемо додатні числа ε і δ такі, що $s-\varepsilon$ і $s+\delta$ є цілими числами. Маємо обмежені і нетерові оператори $\Lambda'\colon \mathcal{K}_A^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{H}_{s-\varepsilon}(\Gamma)$ і $\Lambda'\colon \mathcal{K}_A^{s+\delta}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{H}_{s+\delta}(\Gamma)$, що діють у парах просторів Соболєва. (У випадку $\varphi \equiv 1$ пропускаємо індекс φ у позначеннях просторів.) Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулами $\psi(t) := t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ при $t \geqslant 1$ і $\psi(t) := \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Застосувавши інтерполяцію з параметром ψ, отримаємо обмежений оператор

$$\Lambda'\colon [\mathcal{K}_A^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma), \mathcal{K}_A^{s+\delta}(\Omega,\Gamma)]_\psi \to [\mathcal{H}_{s-\varepsilon}(\Gamma), \mathcal{H}_{s+\delta}(\Gamma)]_\psi.$$

Згідно з [12, теорема 1.7] нетеровість цього оператора й інші його властивості, сформульовані в теоремі 1, є наслідком нетеровості зазначених вище операторів, які діють у просторах Соболєва та мають спільне ядро і однаковий індекс. Залишається використати інтерполяційні формули

$$[\mathcal{K}_A^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma), \mathcal{K}_A^{s+\delta}(\Omega,\Gamma)]_\psi = \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma), \qquad [\mathcal{H}_{s-\varepsilon}(\Gamma), \mathcal{H}_{s+\delta}(\Gamma)]_\psi = \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma). \tag{17}$$

Вони є наслідками теорем 1.5 і 2.2 з [12] і рівності $[K_A^{s-\varepsilon}(\Omega), K_A^{s+\delta}(\Omega)]_\psi = K_A^{s,\varphi}(\Omega)$. Остання випливає з другої рівності в (17) для $\varkappa = 0$ на підставі теореми 3.11 з [12].

Теорема 2 випливає з теореми 1. Справді, за теоремою 1 N — ядро, а $P_1^+(\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma))$ — область значень обмеженого оператора (9). Тому обмежений оператор (13) є бієкцією і за теоремою Банаха про обернений оператор є ізоморфізмом.

Перейдемо до теореми 3. Для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ потрібна оцінка (15) випливає з нерівностей

$$\|P(u,v)\|_{\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leqslant c_1 \|\Lambda'(u,v)\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)}, \quad \|(1-P)(u,v)\|_{\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leqslant c_2 \|(u,v)\|_{\mathcal{K}_A^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.$$

Тут c_1 є норма оператора, оберненого до ізоморфізму (13), а c_2 є норма оператора $1 - P\colon \mathcal{K}_A^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma) \to N$, де N розглядається як скінченновимірний підпростір в $\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$.

Обгрунтуємо теорему 4. Нехай вектори (u,v) і g задовольняють її умову. Оскільки $g \in P_1^+(\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma))$, то за теоремою 2 існує розв'язок $(u',v') \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ крайової задачі $\Lambda'(u',v') = g$. Звідси $(u-u', v-v') \in N$ і тому $(u,v) \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$.

Теорема 5 випливає з теореми 4 і версій [12, теореми 2.8, 3.4] теореми вкладення Хермандера [8, теорема 2.2.7] для шкал просторів (8). Справді, з умови $g \in \mathcal{H}_{m+n/2,\varphi}(\Gamma)$ випливає включення $(u,v) \in \mathcal{K}_A^{m+n/2,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ за теоремою 4. Тоді $u \in H^{m+n/2,\varphi}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ і $v_k \in H^{m+n/2+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \subset C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного номера $k \in \{1,\ldots,\varkappa\}$ на підставі цих версій і умови (16). Отже, розв'язок (u,v) класичний.

Автор висловлює вдячність О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Цитована література

1. *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. I. Построение сопряженных задач // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1963. – **11**, No 5. – С. 257–267.
2. *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. II. Граничная задача для полупространства // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1963. – **11**, № 5. – С. 269–278.
3. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures. An asymptotic analysis. – Paris: Masson, 1990. – 215 p.
4. *Nazarov S., Pileckas K.* On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations // J. Reine Angew. Math. – 1993. – **438**. – P. 103–141.
5. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.
6. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – 276 p.
7. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798–801.
8. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
9. *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33–48.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.
11. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No 2. – P. 211–281.
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. – 297 p. (Русское издание книги доступно как arXiv: 1106.3214).

13. *Чепурухіна І. С.* Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 284–304.
14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
15. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

References

1. *Lawruk B.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 1963, **11**, No 5: 257–267 (in Russian).
2. *Lawruk B.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 1963, **11**, No 5: 269–278 (in Russian).
3. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures. An asymptotic analysis, Paris: Masson, 1990.
4. *Nazarov S., Pileckas K.* J. Reine Angew. Math., 1993, **438**: 103–141.
5. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities, Providence: Amer. Math. Soc., 1997.
6. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions, Dordrecht: Kluwer, 1999.
7. *Roitberg Ya. A.* Dokl. Math., 1964, **5**: 1034–1038.
8. *Hörmander L.* Linear differential operators with partial derivatives, Moscow: Mir, 1965 (in Russian).
9. *Karamata J.* Mathematica (Cluj), 1930, **3**: 33–48.
10. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Ukr. Math. J., 2006, **58**, No 3: 398–417.
11. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Banach J. Math. Anal., 2012, **6**, No 2: 211–281.
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems, Berlin, Boston: De Gruyter, 2014.
13. *Chepurukhina I. S.* Zb. prats' Inst. Mat. NAN Ukraine, 2014, **11**, No 2: 284–304 (in Ukrainian).
14. *Seneta E.* Regularly varying functions, Berlin: Springer, 1976.
15. *Volevich L. R., Paneah B. P.* Uspekhi Mat. Nauk, 1965, **20**, No 1: 3–74 (in Russian).

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 10.02.2015*

И. С. Чепурухина

Полуоднородная эллиптическая задача с дополнительными неизвестными функциями в краевых условиях

Институт математики НАН Украины, Киев

Исследована эллиптическая краевая задача для однородного дифференциального уравнения, содержащая дополнительные неизвестные функции в краевых условиях. Доказано, что оператор, соответствующий этой задаче, является ограниченным и нетеровым в подходящих парах гильбертовых пространств Соболева и изотропных пространств Хермандера, которые образуют двустороннюю уточненную соболевскую шкалу. Для последних показателями регулярности служат произвольные вещественное число и положительная функция, медленно меняющаяся на бесконечности по Карамата. Доказаны теоремы об априорной оценке обобщенных решений задачи и их регулярности.

Ключевые слова: эллиптическая краевая задача, медленно меняющаяся функция, пространство Хермандера, нетеров оператор, априорная оценка решений, регулярность решений.

I. S. Chepurukhina

A semihomogeneous elliptic problem with additional unknown functions in boundary conditions

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

We investigate an elliptic boundary-value problem for a homogeneous differential equation, the problem containing additional unknown functions in the boundary conditions. We prove that the operator corresponding to this problem is bounded and Noetherian in appropriate pairs of inner product Sobolev spaces and Hörmander spaces that form a two-sided refined Sobolev scale. For the latter spaces, the regularity indices are an arbitrary real number and a positive function that varies slowly at infinity in the sense of Karamata. We prove theorems on a priori estimates of generalized solutions to the problem and their regularity.

Keywords: elliptic boundary-value problem, slowly varying function, Hörmander space, Noetherian operator, a priori estimate for solutions, regularity of solutions.