

# Про роздільну здатність редукції аномалій сили тяжіння

© Ю. І. Дубовенко, 2011

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна  
Надійшла 16 серпня 2009 р.  
Представлено членом редколегії В. І. Старостенком

Ошибка трансформаций модуля градиента силы тяжести как гармонических функций обуславливается кривизной эквипотенциальных поверхностей поля амплитуды аномалий, меры области трансформации и достигает, в зависимости от вида трансформации, недопустимых величин. Интерпретация гравианомалий как гармонических функций неэффективна для региональных структур.

The transformation error of anomalies of the MGGP as a harmonic functions depends on the field's equipotential surface curvature, anomaly amplitude and the measure of transformation area, reaching according to the kind of transformation unreasonable values. Gravity anomalies treatment as a harmonic functions has poor effectiveness for the deep regional structures.

Гравіметрія, як й інші науки про Землю, досягла у своєму розвитку етапу, на якому отримання нових узагальнених знань про глибинну будову земної кори і мантії неможливе, як відзначають автори [Страхов и др., 2001; Черный, 1992; Интерпретация ..., 1992], без постановки глобальних експериментів, що вимагає обґрунтування застосовності наявних методів інтерпретації потенціальних полів до глобальних масштабів. Формалізація моделей середовища та апіорної інформації відбувається на основі апроксимаційного підходу [Страхов и др., 2001]. Особливої значущості набувають проблеми повного видобутку корисної інформації через редукції, трансформації та комплексування методів [Гравиразведка ..., 1990] і побудову адекватної глобальної нормальної моделі Землі, щодо якої ці трансформації здійснюються. Постає питання роздільної здатності методу.

Актуальність повного видобутку корисної інформації з даних гравіметрії засвідчує чимало публікацій [Оганесян, 2004; Балк, 1989; Страхов, 1990; Старостенко 1978; Дубовенко, 2009а], як і наведена в них бібліографія. У руслі розв'язання цієї проблеми формується нове відгалуження в теорії інтерпретації даних гравіметрії — теорія відновлення модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МППСТ) [Черный, 1992]; в її межах досліджена нова неklasична задача відновлення МППСТ [Дубовенко, 2009а, б; 2010].

**1. Актуальність проблеми.** В процесі інтерпретації гравіметричних спостережень чільне місце займає редукція сили тяжіння за допомо-

гою методів аналітичного продовження, серед яких особливо відзначимо задачу відновлення потенціалу в заданій області. Темі редукції сили тяжіння присвячена численна бібліографія [Гравиразведка..., 1990; Старостенко, 1978; Дубовенко, 2009а б; 2010; Черный, 1969; Алексидзе, 1965; Черный, Якимчик, 1999; Страхов, 1964], але досі її визначають *наближено* через неточність постановки класичних задач теорії потенціалу. Дійсно, за розв'язання зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа, як і редукції за методом Стокса—Молоденського, маємо точний диференціальний оператор для потенціалу сили тяжіння, але *наближені* граничні умови: земна поверхня не є еквипотенціальною, а сила тяжіння не є лінійною комбінацією гармонічної функції та її нормальної похідної. В редукції за допомогою розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа, навпаки, маємо наближене диференціальне рівняння, оскільки величина  $g(x)$  негармонічна [Алексидзе, 1965], зате точні граничні умови. Першому методу надають перевагу в геодезії, а другий є традиційним для гравіметрії. Така підміна виявляє недоліки класичної редукції, якими можна нехтувати в малих масштабах, але які стають відчутними уже в регіональних побудовах. Нагадаємо основні ваді редукцій:

- розрахунок нормального поля Землі і поправок за висоту точки спостереження проводять з різних моделей нормальної Землі;
- слабко враховано розподіл густини в поправці за проміжний шар і топопоправці (за рельєф);

- аналітичне продовження аномалій сили тяжіння як гармонічних функцій дійсне лише для областей малої міри [Черный, Якимчик, 1999];
- неврахування різної напрямленості векторів нормальної  $\gamma(x)$  і реальної  $g(x)$  сили тяжіння провокує, як показано нижче, похибку майже в 200 мГал за максимального розходження векторів до  $40''$ , а всередині такої похибки може сховатись реальна аномалія від глибинних джерел.

Ці чинники обмежують сферу застосування наближених суто класичних методів редукції областями *малої міри*. Іншими словами, традиційні методи гравіметрії, основані на моделях плоскої Землі і гармонічних аномалій сили тяжіння, заданих на необмежених множинах, не мають належної роздільної здатності для інтерпретації гравіаномалій від глибинних аномалієвірних джерел, незважаючи на їхнє поширення в геофізичній практиці. Мода на подібні глибинні густинні побудови, як зазначено у статті [Черный, Якимчик, 1999], веде до неоправданої дискредитації методів аналітичного продовження через їх застосування у неналежних геологічних ситуаціях (зачаровані магією сучасної наукової графіки, інтерпретатори інколи забувають, що в основу тлумачення закладені прості моделі середовища з усіма властивими їм припущеннями й обмеженнями). Внаслідок значущості похибок перерахунку аномалій класичними методами для вивчення глибин Землі, очевидно, необхідно задіяти повнішу інформацію про поведінку аномалій сили тяжіння.

Вихід з цього тупика неможливий через просте вдосконалення алгоритмів продовження, а пролягає через указання меж застосовності стандартних методів [Серкерев, 1990], чисельну оцінку похибок. Це дасть змогу розділити «сфери впливу» класичної теорії потенціалу і «глобальних» методів.

**2. Витоки проблеми.** Класичну методику відновлення потенціалу заклав К. Юнг [Юнг, 1936], запропонувавши вважати природи МППСТ в *локальній області* вертикальною складовою сили тяжіння<sup>1</sup>. Для наближеного аналітичного продовження сили тяжіння в малій області він

<sup>1</sup> Частинні похідні потенціалу за будь-яким напрямом збігаються з проекціями аномалій за цим напрямом, тобто  $\delta g_z = \frac{\partial W}{\partial z}$ , де  $z$  спрямоване по нормалі  $v$  до рівневої поверхні еліпсоїда — генератора аномального поля  $\gamma$ . На площах діаметром в кількадесят кілометрів зміною напрямку  $v$  можна знехтувати, і тоді аномалія  $\delta g_z$  буде наближено гармонічною функцією, оскільки через неперервність других похідних потенціалу  $W$  маємо  $\Delta \delta g_z = \Delta \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta W = 0$ , що дає змогу відновлювати потенціал, як гармонічну функцію.

переформулював задачу з правою частиною у вигляді наближених значень сили тяжіння в задачу Неймана для рівняння Лапласа, що дало змогу задіяти для аналітичного продовження апарат теорії гармонічних функцій. З кінця 1950-х років за допомогою аналітичного продовження досі розв'язують задачі локалізації аномальних джерел далеко не завжди в локальних областях, про пагубність чого вже згадувалось.

Перелом настав з виходом праці [Алексидзе, 1965], в якій вперше відзначено, що аномалії сили тяжіння загалом *не є гармонічними функціями*, якими їх у *першому наближенні* вважав К. Юнг, але праця пройшла повз увагу геофізиків. Основні труднощі редукування полягають в тому, що для повного опису значень поля сили тяжіння неможливо отримати лінійне диференціальне рівняння, якщо невідомі форма й густина збурювальних тіл, тому доводиться відшукувати деякі наближення збурень гравіполя. Редукцію саме в такій постановці досліджував М. А. Алексидзе, відшукуючи *гармонічне наближення* реального розподілу сили тяжіння в *деякій обмеженій замкнутій області*, розміри якої узгоджені з точністю вхідних даних. У побудові цієї локальної області використано властивість гармонічності похибки апроксимування значень сили тяжіння. Звісно, точність апроксимації обернено пропорційна розмірам області, в якій апроксимується сила тяжіння. Детальний опис гравіаномалій в глобальній області наведено у статті [Черный, 1982].

З огляду на викладене доцільно переглянути методику відновлення потенціалу в глобальній області за його слідами (чи його похідних) на межі області (задачі Діріхле, Неймана чи Коші [Левенков, 1987]). Дійсно, гармонічний потенціал однозначно відновлюється у глобальній області за *точних* граничних умов, як розв'язок відповідної межової задачі для рівняння Лапласа [Сретенский, 1946], але саме *точні* умови недоступні через методичні чи економічні міркування<sup>2</sup>. Лишається лазівка у вигляді розв'язання задачі Пуанкаре (про косу похідну), але для її розв'язання не вистачає граничних даних стосовно орієнтації вектора сили тяжіння щодо земної поверхні.

**3. Розбіжність векторів.** Напруженість поля сили тяжіння має вигляд

$$g(x) = |-\nabla W(x)| =$$

<sup>2</sup> Задіяти виміряні значення сили тяжіння як точні граничні умови неможливо через їх негармонічність, негладкість та обтяження різноманітними похибками.

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(x)}{\partial n} = (\bar{g}(x), \bar{n}(x)), \quad (1)$$

де  $\frac{\partial x_i(x)}{\partial n} = \cos(n, x_i)$ ,  $i = 1, 3$  — напрямні косинуси одиничного вектора  $\bar{n}(x)$  внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні  $dW(x): W(y)=Cx$  у точці  $x$ . Очевидна ортогональність напруженості поля до поверхні  $W(z)$ , тобто вимірюється насправді *приріст градієнта потенціалу*, а не один з його складників, як це зазвичай уявляють [Веселов, Сагітов, 1968].

Пояснимо це твердження детальніше. Під час вимірювань гравіметр устанавлюють у кожній точці  $x_i$  профілю  $\partial y$  за рівнем на еквіпотенціальній поверхні  $W(z)=Cx_i$ , яка перетинає  $\partial y$  у цій точці (рис. 1). Просторову орієнтацію гравіметра під час вимірювання не фіксують, тому нахили приладу зі зміщенням по профілю  $\partial y$  лишаються *невідомими*. Різниця цих нахилів зумовлена різною кривизною кожної з непаралельних одна одній еквіпотенціальних поверхонь  $W(z)=Cx_i$ ,  $Cx_i \neq Cx_{i+1}$  і описується *приростом кута між нормальми*  $v(x_i)$  і  $n(x_i)$  до поверхні Землі  $\partial y$  і еліпсоїда  $W(z)$ , що перетинаються в точках  $x_i$  і  $x_{i+1}$ , або, по суті, значеннями напрямних косинусів  $\cos(n, x_i)$ . Величини напрямних косинусів у точках рельєфу за профілем не визначають через надмірну складність таких вимірювань, тому гравіметричні виміри є лише приростами абсолютних значень сили тяжіння (аналітичною апроксимацією яких є значення МГПСТ) між поверхнями  $W(z)=Cx_i$ . Відтак, під словами «значення сили тяжіння» слід розуміти «значення МГПСТ».

Для тлумачення цих значень виконують редукцію сили тяжіння, виміряної на різних

рівневих поверхнях, до єдиного рівня, зазвичай, рівня геоїда (принагідно зазначимо, що уточнення локального геоїда в межах України, що є окремою проблемою, теж приведе до уточнення виконуваних редукцій). Під редукцією значень МГПСТ розумітимемо таку задачу: визначити за заданими на поверхні  $\partial y$  значеннями  $g(x)$ ,  $x \in \partial y$  її значення  $g(\xi)$  у деякій точці  $\xi$  поза поверхнею  $\partial y$ .

**Зауваження 1.** Якщо функція  $g(x)$  задана лише на частині поверхні  $\partial y$  (звична справа в геофізичній практиці), незалежно від того, в яку область вона продовжується, задача редуктування  $g(x)$  є некоректною [Черный, 1992].

Якщо для аналізу графіка за графічним зображенням не вистачає роздільної здатності, застосовують його диференціальні властивості. За аналогією, для наближеного опису значень  $g(x)$  в глобальній області на додаток до їхнього «графіка» у вигляді ізоповерхонь рівня задіємо диференціальні властивості цих поверхонь, що характеризуються відношенням (1). Для відновлення з гарантованою точністю поля сили тяжіння за його *гармонічним наближенням*  $g(x)$  слід розв'язувати відповідну межову задачу в області *малої міри*. За допомогою сучасних методів [Інтерпретація ..., 1992; Гравиразведка ..., 1990; Балк, 1989; Старостенко, 1978; Булах и др., 1976] подібні задачі розв'язують із точністю до деякої сталої інтегрування, що залежить від форми і розмірів області розв'язку. У разі відновлень значень сили тяжіння в глобальній області за її значеннями в локальних підобластях отримані розв'язки неможливо «зшити», як ковдру з клаптів, через відсутність прийнятних критеріїв склеювання локальних гармонічних наближень<sup>3</sup>.

У праці [Алексидзе, 1985] її зведено до розв'язання внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в локальній області; в роботі [Черный, 1992] доведено коректність її постановки на множинах витокоподібно зображених

<sup>3</sup> Точність продовжених як гармонічні функції значень сили тяжіння істотно залежить від розмірів області, в якій поставлена межова задача, тому для отримання результату з заданою точністю нерідко доводиться відповідно зменшувати розміри області. При редукції в глобальну область її розбивають на локальні підобласті, розв'язуючи відповідну задачу для кожної з них, за місцевим «нульовим рівнем» продовження і місцевої точності розв'язку. Ця точність залежить ще й від точності граничних даних, розмірів і форми локальної підобласті, а різниця рівнів, від яких обчислюють аномалії, може сягати кількесот мілігалів залежно від величини ундуляцій рельєфу і напруженості поля сили тяжіння. Отже, продовження в глобальну область не дає змоги обчислити в ній аномалії від єдиного рівня.

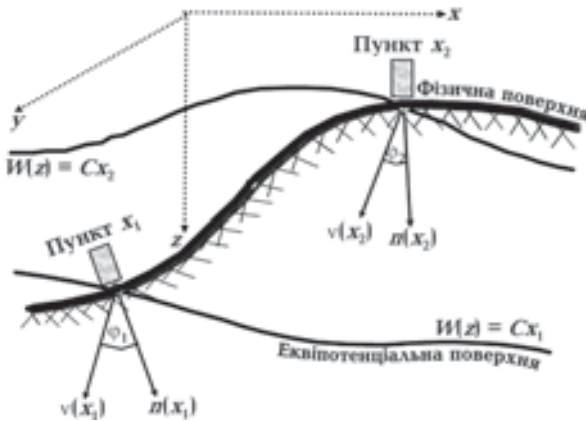


Рис. 1. Приріст кутів між еквіпотенціальними поверхнями та фізичною поверхнею Землі в різних точках профілю.

функцій у вигляді потенціалів простого шару, поширених на опуклій поверхні Ляпунова, і, в данину заслугам попередника у дослідженні теми, названо задачу його іменем.

Задача Алексідзе у постановці Чорного [Дубовенко, 2009а] означає: знайти функцію  $W(x)$ ,  $x \in \partial y$ , яка задовольняє в необмеженій замкнутій області  $\bar{y}^+ = y^+ \cup \partial y$  рівняння Лапласа  $\Delta W(x) = 0$ ,  $x \in y^+$ , якщо в будь-якій точці межі  $\partial y$  області і на нескінченно віддаленій точці вона задовольняє

умови:  $\sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \right)^2 = g^2(x)$ ,  $x \in \partial y$ ,  $W(x) \rightarrow 0$  при

$|x| \rightarrow \infty$ , де  $g(x)$  — задана неперервна функція;  $y^-$  — обмежена область мас Землі;  $y^+$  — її необмежене доповнення без мас;  $\partial y$  — ляпуновська межа  $y^-$  і  $y^+$ , така, що  $y^+ = R^{(3)} \setminus \bar{y}^-$ ,  $\bar{y}^- = y^- \cup \partial y$  (фізична поверхня Землі).

Вважаємо, що густина  $\sigma(\xi)$  є інтегрованою функцією [Картвелишвили, 1983], хоча вона може бути практично більш гладкою. Питання розв'язності і властивостей задачі висвітлені в роботах [Дубовенко, 2009а, б; 2010]. Визначимо кількісний вимір поняття «область малої міри», в якій справедлива властивість гармонічності функції  $g(x)$ .

**4. Оцінка міри області.** Детальна оцінка міри області означає виявлення зв'язку геометрії області не лише з точністю вимірів і величиною аномалій, а й з геометрією еквіпотенціальних поверхонь і точністю гармонічної апроксимації аномалій. Спробуємо дати її простіше, ніж у статті [Черный, Якимчик, 1999]. Щоб оцінити по черзі вклад кожної з цих величин, згадаймо опис значень сили тяжіння в глобальній області [Черный, 1982]. Класичну аномалію загалом визначають як різницю значень спостереженого і нормального полів [Веселов, Сагитов, 1968]:

$$\begin{aligned} \delta g(x) &= |g(x)| - |\gamma(x)| = \\ &= 2|g(x)| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\partial T(x)}{\partial v}, \end{aligned} \quad (3)$$

в якій  $\gamma(x)$  — напруженість нормального поля сили тяжіння, що визначається виразом

$$\gamma(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} = |\text{grad} U(x)| \cos \theta =$$

$$= (|\text{grad} W(x)| - |\text{grad} T(x)|) \cos \theta = g(x) \cos \theta - \frac{\partial T(x)}{\partial v},$$

де  $T(x) = W(x) - U(x)$  — збурювальний потенціал, як різниці реального і нормального потенціалів. Останній визначено у близькій області  $y_0^-$  простої геометрії (близькість областей  $y_0^-$  і  $y^-$

означає близькість меж  $\partial y_0$  і  $\partial y$ , описану мірою відхилення поверхні стиснутого сфероїда  $\partial y_0$  від земного рельєфу  $\partial y$ ), з такими ж масами, як в  $y^-$ , розподіленими «правильно» у певному сенсі [Картвелишвили, 1983]. Істинна аномалія сили тяжіння  $\tau(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial v(x)} = \frac{\partial W(x)}{\partial n(x)} \frac{\partial n(x)}{\partial v(x)} - \frac{\partial U(x)}{\partial v(x)}$  — нормальна похідна збурювального потенціалу  $T(x)$ , виходячи з (3), дорівнює

$$\tau(x) = g(x) - \gamma(x) - 2g(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2}, \quad (4)$$

де  $\vartheta(x)$  — кут між нормальними  $\mathbf{n}(x)$  і  $\mathbf{H}(x)$  у точці  $x$  (відхилення виска),  $\cos \vartheta(x) = (\mathbf{n}(x), \mathbf{H}(x))$  і  $\gamma(x)$  — нормальна сила тяжіння від *вигомого розподілу мас* усередині сфероїда  $\partial y_0$ . Це визначення аномалій відрізняється від класичного (3), в якому аномалії є *відхиленнями* реального поля сили тяжіння Землі від його *осереднення* — апроксимації поля сфероїда з *невигомим розподілом мас* усередині нього. Відсутність інформації про розподіл нормальних мас ускладнює інтерпретацію гравіаномалій.

До речі, значення величини нормального поля можна отримати і в інший спосіб (немає в [Черный, 1982]), визначаючи косинус кута між нормальними до поверхні Землі і до поверхні рівня в поточній точці у вигляді

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(g, \gamma)}{|g| \cdot |\gamma|} = \sum_{i=1}^3 \cos(x_i, v) \cos(x_i, n) = \\ &= \frac{\gamma(x)}{g(x)} + \frac{1}{g(x)} \frac{\partial T(x)}{\partial v} = \frac{1}{g(x)} \left( \gamma(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

звідки  $\gamma(x) = g(x) \cos \theta - \frac{\partial T(x)}{\partial v}$ . Прикметно, що зображення аномалії (3) не є однозначним; його

альтернативна подача  $\delta g(x) = 2|\gamma(x)| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\partial T(x)}{\partial n}$  аналогічна за точністю, але має інший напрям нормалей  $v$  і  $n$ . Оскільки вектор  $\mathbf{g}(x)$  має унікальний нефіксований напрям у кожній точці поверхні  $\partial y$ , то обчислення за (3) майже завжди відрізняються від визначення істинного поля. Геометрична інтерпретація істинної аномалії очевидна з рис. 2, де  $CF$  — проекція  $\Delta g(x)$  на нормаль  $v$ ,  $CD$  — відхилення класичної аномалії  $\delta g(x)$  від проекції  $CF$ . Отже,  $g = OB = OD$ ,  $\gamma = OF$ ,  $\Delta g = BF = OF = OB = |\gamma - g|$ ,  $\delta g = |\gamma| - |g|$ . Істинна аномалія має ясне аналітичне зображення

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= |g(x) - \gamma(x)| = \\ &= \sqrt{|g(x)|^2 + |\gamma(x)|^2 - 2|g(x)||\gamma(x)| \cos \theta}. \end{aligned}$$



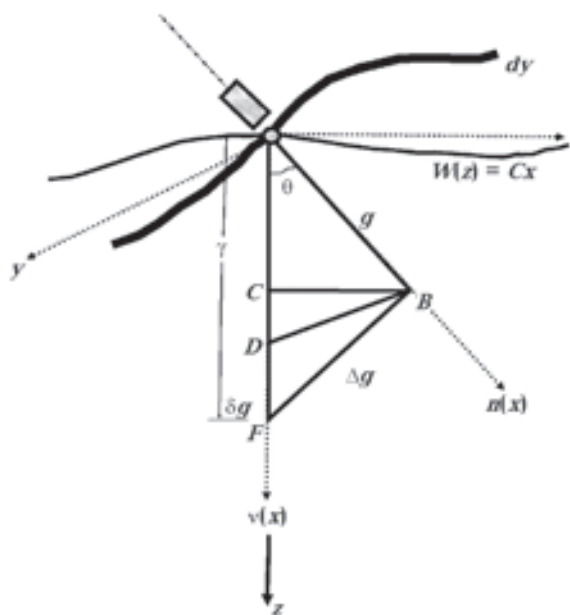


Рис. 2. Геометричне тлумачення аномалій. Пояснення у тексті.

Виразивши величину  $g(x)$  через вираз (3) і підставивши її в останню рівність, отримаємо

$$\Delta g(x) = 2|\gamma(x)| \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\delta g(x)}{\gamma(x)} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{\delta g(x)}{2\gamma(x)}\right)^2} \quad (5)$$

Навіть якщо класична аномалія дорівнює нулю, істинна відрізняється від неї на величину

$$\Delta g_0(x) = 2|\gamma(x)| \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

За відносної зміни нормальної сили тяжіння від полюса до екватора в 3000 мГал і варіації відхилення виска 0—40" така різниця (6) впливає у величину до 200 мГал (див. таблицю),

в якій цілком може «уміститись» аномалія від глибинних неоднорідностей. Це підтверджено тим, що експериментально отримані для деяких районів Землі відхилення виска [Lerch et al., 1979] не можна пояснити лише видимою нерівністю рельєфу, доводиться постулювати їхній зв'язок з аномальною будовою кори і мантії.

Прикметно, що розміри локальних областей чітко визначені і не надто великі; за межами окреслених ними зон закінчується сфера впливу класичних трансформацій і починається сфера впливу нелінійних наближень, отриманих завдяки розв'язанню задачі Алексідзе. Звичайно, результати, наведені у таблиці, приблизні, оскільки врахована лише так звана операторна похибка  $\epsilon_0$ , а на оцінки впливають і похибка вимірювань  $\epsilon_1$ , і похибка округлень  $\epsilon_2$ , які мають кумулятивний ефект.

Відзначено [Алексідзе, 1985], що якби аномалія  $\delta g(x)$  була високоточною, то перерахунок у зовнішньому просторі був би неможливим через істотну залежність рівняння сили тяжіння від швидкості зміни кутів між напрямом аномалії і координатними осями, тобто величини  $a(x)$  [Черный, 1970]. Фіксувати швидкість такого обертання неможливо, а нехтування цим відхиленням істотно спотворює перерахунок (на величину (6)). В такій ситуації доречно припущення К. Юнга, очевидне з рис. 2: класична аномалія з достатньою точністю, що не перевищує величини  $CD=OF-OC$  або  $\epsilon_0 = 2|g(x)| \sin^2 \theta/2$  чисельно збігається з проекцією вектора аномалії на напрям вектора  $\gamma(x)$ , тобто  $\delta g(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial v} + \epsilon_0$  (див. таблицю).

Розглядаючи аномалії  $\delta g(x)$  з точністю до  $\epsilon_0$ , ми відкидаємо величини порядку  $1 - \cos(n, v)$ , де

$$1 - \cos(n, v) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} =$$

**Залежність розмірів  $l$  локальної області (км) від похибки гармонічної апроксимації  $\epsilon_0$  і амплітуд  $\tau_0$  аномалій сили тяжіння**

$\epsilon_0$	$\tau_0$ , мГал								
	10	20	30	40	50	100	150	300	500
0,1	42	22	14						
0,2	84	42	28	22	16				
0,5	212	106	70	54	42	22			
1	424	212	142	106	86	42	28	10	
2				142	170	84	56	28	10
5						212	142	70	42
10						424	284	142	84
20						950	568	284	170

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^3 \cos(n, x_k) [\cos(x_k, n) - \cos(x_k, v)] = \\
 &= \sum_{k=1}^3 \cos(v, x_k) [\cos(x_k, v) - \cos(x_k, n)].
 \end{aligned}$$

Якщо нормальний потенціал вибрано вдало, то в замкнутій необмеженій області  $\partial y^- = R^{(3)} \setminus y^-$  завжди виконується умова

$$\delta = \max_{x \in \partial y^-} |\varepsilon_0(x)| \ll \max_{x \in \partial y^-} \left| \frac{\partial T(x)}{\partial v} \right|,$$

тому можна знехтувати вказаною величиною.

На основі наведених даних доходимо висновку, що з точністю до порядку  $0,001 \leq \varepsilon_0 \leq 0,05$  мГал аномалії сили тяжіння  $\delta g(x)$ ,  $x \in \partial y^-$  є значеннями модуля проекції градієнта збурювального потенціалу  $T(x)$  на напрям нормалі  $v$  до еквіпотенціальної поверхні нормального поля сили тяжіння, тобто

$$\begin{aligned}
 &\max_{x \in \partial y^-} \left| \frac{\partial T(x)}{\partial v} - \delta g(x) \right| = \\
 &= \left\| \text{grad} T(x) \right\| |\cos(v, x_i)| - \delta g(x) \leq \varepsilon_0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

У прийнятій нами системі координат напрям нормалі збігається з віссю  $z$ , тому справедливим буде відношення  $\delta g(x) = \frac{\partial T(P)}{\partial z} + \varepsilon_0$  у будь-якій точці  $P(x)$  деякого околу  $y_i$ . Якщо аномалії визначити з точністю  $\varepsilon_1$ , а складники градієнта по горизонталі  $\left| \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} \right|_{i=1,2} \leq \varepsilon_2 > 0$  не перевищують заданої константи, то за умови, що внески кожного з напрямних косинусів  $\cos(x_i, v)$ ,  $i=1,2$  і  $1 - \cos(x_3, v)$  однакові, легко знайти мажоранту для виразу (7):

$$\begin{aligned}
 &\cos(x_3, v) \approx 1, \quad |\cos(x_3, v) - 1| \leq \delta, \\
 &\left| \cos(x_i, v) \right| \leq \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{3\varepsilon_2} = \delta, \quad i = 1, 2. \quad (8)
 \end{aligned}$$

У визначеній у такий спосіб області аномалії сили тяжіння  $\delta g(x)$  з точністю  $\varepsilon_0 + \varepsilon_1$  можна вважати гармонічними функціями. З геометричної позиції обмеження (8) є умовою обертання нормалі  $v(P)$  навколо осі  $z$ , спрямованій по нормалі  $v(x)$  до еквіпотенціальної поверхні  $U(x) = C$  нормального поля в декартовій системі координат з центром в точці  $x$ . За рухом навколо нормалі  $v(x)$  нормаль  $v(P)$  описує в першому наближенні поверхню кругового конуса.

Якщо вершину цього конуса помістити в точку перетину нормалі  $v(x)$  з еквіпотенціаль-



Рис. 3. Геометричне тлумачення форми і розміру локальної області гармонічності гравітаційних аномалій. Пояснення у тексті.

ною площиною еліпсоїда (рис. 3), то локальна область буде обмежена бічною поверхнею конуса, який містить нескінченно віддалену точку по осі  $z$ , та земним рельєфом. З рис. 3 очевидно, що радіус вирізаної на поверхні Землі області  $\partial y_i$  не перевищує величини  $l = R\delta$ , де  $\delta = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{3\varepsilon_2}$ ,  $R$  — радіус Землі у поточній точці  $P$ . Згідно з правилами диференціальної геометрії, конус, зорієнтований, як на рис. 3, матиме вершину в центрі середньої кривизни нормальних перетинів еквіпотенціальної поверхні  $U(x) = C$  у точці  $0$ , тому у виразі  $l = R\delta$  радіус  $R$  характеризуватиме середній радіус кривизни нормальних перетинів поверхні  $U(x_0)$ .

Виходячи з (7) і (8), робимо висновок, що діаметр основи локальної області не перевищує величини

$$d(x) \leq 2l = 2R(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) / 3 \max_{x \in \partial y_i} \left| \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right|,$$

тобто діаметр плоского околу  $\partial y_i$  області вимірювань за відомих точності вимірювань  $\varepsilon_1$  та апроксимації  $\varepsilon_0$  (ці апріорі відомі величини визначають за методикою спостережень) тим більший, чим менша амплітуда  $\max_{x \in \partial y_i} \left| \frac{\partial T(x)}{\partial x_3} \right|$  спостереженої аномалії, а за фіксованої амплітуди росте разом зі збільшенням похибки вимірювань. Нескладні розрахунки показують, що для того щоб описати аномалію сили тяжіння амплітудою 30 мГал з точністю 0,1—0,5 мГал, не слід виходити за межі зони  $d = 8 \div 3$  км.

Для точної оцінки розмірів локальної області необхідно точно знати аномальні висоти геоїда. Для уточнення фігури Землі за формулою Брунса необхідно з високою точністю визначити збурювальний потенціал  $T(x)$ ; це можна зробити,

наприклад, за алгоритмом [Черный, Якимчик, 1999] у вигляді розв'язання послідовності задач Неймана із спеціальними граничними умовами. У першому наближенні можна скористатись способом, наведеним у статті [Дубовенко, 2008а, б].

**Зауваження 2.** Якщо для перетворення аномалій  $\delta g(x)$  використовують конструкції з нескінченними межами по осях  $(x_i)$ ,  $i=1,2$  (типу інтегралів Пуассона), то розміри локального колу уздовж осі  $z$  різко скорочуються до  $0,2l$ .

**5. Похибка трансформацій.** Якщо нормальний сфероїд і розподіл мас у ньому вибрані вдало, відхилення виска у районах зі «спокійним» рельєфом не перевищує  $60''$  і оцінка зверху останнього доданка у (4) не більша

$2g(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2} < 0,05$  мГал,  $x \in \partial U$ . Зв'язок геометрії локальної області з кривизною еквіпотенціальних поверхонь знайдемо через різницю у околі точки  $x \in y^+$  функцій  $u(y)$  і  $v(y)$  продовження аномалій  $\tau(y)$ ,  $y \in \partial U(x)$ , розв'язавши відповідні задачі Діріхле для рівнянь аномалій сили тяжіння і Лапласа [Черный, Якимчик, 1999]:

$$\Delta u(y) - a^2(y) u(y) = 0, \quad y \in y(x) \cup y^+,$$

$$u(y) = \tau(y), \quad y \in \partial y(x), \quad (9)$$

$$\Delta v(y) = 0, \quad y \in y(x) \cup y^+,$$

$$v(y) = \tau(y), \quad y \in \partial y(x). \quad (10)$$

Задачі (9) і (10) збігаються при  $a^2(y)=0$ ,  $y \in y(x)$  (вектори одиничних нормалей  $\mathbf{n}(x)$  у довільних точках  $x$  паралельні, наближення до такої ідеалізації є в областях малої міри — в них напрям «повного» вектора сили тяжіння незмінний, а відносні флуктуації сили тяжіння від середнього її значення невеликі). В іншому разі оцінка точності трансформацій гравіаномалій як гармонічних функцій

$$\varepsilon = \max_{y \in G(x)} |\varepsilon_1(y)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{y \in \partial G(x)} \left| \int_{G(x)} \frac{a^2(\eta)u(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \right|, \quad (11)$$

$$\varepsilon = \max_{y \in G(x)} \left| (\nabla T(y), (\text{grad } v(x)) \delta x \right| \leq$$

$$\leq \frac{\tau_0}{a} \sqrt{1 + \frac{a^4}{b^4}} \|\delta x\|_c, \quad (12)$$

( $a, b$  — велика і мала півосі сфероїда  $\partial U_x$ ). Похибки продовжених аномалій сили тяжіння внаслідок заміни субгармонічної функції гармонічною функцією залежать від кривизни еквіпотенціальних поверхонь поля, величини аномалій і міри локальної області, у яку здійснюють продовження.

Похибка трансформації аномалії  $\tau(y)$ ,  $y \in \partial U(x)$  за (11) для обчислення параметрів будови шару Землі завтовшки 200 км в обмеженій області  $\tilde{y}(x)$  (усічений конусферичними поверхнями круглий конус із вершиною у центрі Землі, основи якого віддалені від центра на  $R$  і  $R_1$ , верхня основа збігається з поверхнею  $\partial U$  і має діаметр  $0-2200$  км,  $|x|+200=R_1=6371,1$  км — середній радіус Землі) дорівнює

$$\frac{\varepsilon}{\tau_0} \leq 2 \left| 1 - \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} - r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} + \right.$$

$$\left. + \ln \frac{r(\sqrt{1 - \cos \varphi} + \sqrt{r})}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} \frac{r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} - 1}{r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} + 1} - \cos \varphi \ln \frac{r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} - \cos \varphi}{1 + \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} - \cos \varphi} \right|,$$

де  $\tau_0 = \left| \max_{y \in y(x)} \tau(y) - \min_{y \in y(x)} \tau(y) \right|$  — амплітуда аномалії,  $r=R_1/R$ .

Для локальної області  $\tilde{y}(x)$   $\varepsilon/\tau_0=0,5 \cdot 10^{-3} \div \div 0,3 \cdot 10^{-1}$ , і за відомої амплітуди аномалії легко знайти похибку відхилень субгармонічної функції від гармонічної, але амплітуди аномалій невідомі. Нехай у локальних областях типу  $\tilde{y}(x)$   $\tau_0 \geq 10000$  мГал, тоді  $5 \leq \varepsilon \leq 290$  мГал.

Похибка продовжених аномалій  $\tau(x)$ ,  $x \in \partial U$ , як гармонічних функцій в область  $y(x) \cap y^+$ , за умови, що амплітуди продовжених аномалій  $\tau_0 \leq 150$  мГал, а локальні області  $\tilde{y}(x)$  — усічені конуси ( $0^\circ 30' \leq \varphi \leq 10^\circ$ ;  $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ ;  $6371,1 \leq \rho \leq \leq 6571,1$  км), нижні основи яких збігаються із земним рельєфом, — за виразом (11) становить  $0,07 \leq \varepsilon \leq 6,3$  мГал. За (12), якщо діаметри нижніх основ сім'ї усічених конусів  $110 \leq \|\delta x\| \leq 2200$  км сфероїда  $\partial U$ :  $a=6378,2$  км,  $b=6356,9$  км, то  $3,7 \leq \varepsilon \leq 73,4$  мГал. Оцінки (11) і (12) різні в області  $y(x) \cap y^+$  через те, що в них замість кривизни  $a^2(\eta)$  гравіполя в точках  $\eta \in \tilde{y}(x)$  (залежної від особливостей регіонального поля і поточної аномалії) використані її наближення  $a_0^2(\eta)$ ,  $a_1^2(\eta)$  у вигляді концентричних сфер і конфокальних еліпсоїдів.

Область малої міри  $\tilde{y}(x)$  перебуває поблизу локальних і на достатній віддалі від регіональних особливостей поля, тому  $\max_{\eta \in y(x)} a_1^2(\eta) < \max_{\eta \in y(x)} a_2^2(\eta)$ ,  $i=0,1$ , тобто обидві оцінки похибки є заниженими. Похибка (11)  $a_0^2(\eta) \leq a_1^2(\eta) \leq 0,5 \cdot 10^{-7}$  істотно менша за оцінку (12)  $\sqrt{a_0^2(\eta)} < \sqrt{a_1^2(a, 0, 0)}$

$=0,22 \cdot 10^{-3}$ ; у першій формулі застосовано наближення  $a_i^2(\eta)$ , а у другій —  $\sqrt{a_i^2(\eta)}$ .

Оцінки похибок трансформації в кожній локальній області  $\tilde{y}(x)$  і  $y(y)$ , навіть перетнутих між собою, не дають змоги оцінити загальну похибку трансформації в об'єднанні  $y(x) \cup y(y)$ ,  $x \neq y \in R^{(3)}$ . Якщо у точці  $x$  відхилення виска  $\vartheta(x) = 60''$ , а в точці  $y$  —  $\vartheta(y) = 0$ , то «істинна» аномалія  $\delta g(x)$  у точці  $x$ , у вигляді модуля різниці градієнтів реального й нормального потенціалів, дорівнює

$$\delta g(x) = |g(x) - \gamma(x)| = \sqrt{4\gamma^2(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2} + 4\gamma(x)\tau(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2} + \tau^2(x)},$$

а у точці  $y$   $\delta g(y) = \tau(y)$ . У переході з локальної області  $\tilde{y}(x)$  до області  $y(y)$  істинна аномалія відрізнятиметься від класичної на

$$\delta g(x) = 2\gamma(x) \sin \frac{\vartheta(x)}{2} \approx 285 \text{ мГал, навіть якщо}$$

класична аномалія  $\tau(x) = 0$  в точках  $x$  і  $y$ . Трансформація поля  $\tau(\eta)$  ( $\Delta u(\eta) \neq 0$ ) у кожній з областей  $\tilde{y}(x)$  і  $y(y)$  при  $\tau(x) = \tau(y) = 0$  і  $x \neq 0$  як гармонічних функцій  $v(\eta)$  не дозволяє виявити істинну аномалію, яка сягає величин, порівняних зі зна-

ченнями трансформованих аномалій, навіть у районах зі спокійним рельєфом.

Отже, перетворення поля аномалій сили тяжіння в різних локальних областях за правилами трансформації гармонічних функцій не дає можливості виявити істинну аномалію, яка навіть у районах із незбуреним рельєфом може бути зіставною з редукованою. Саме тому область застосування методів інтерпретації аномалій сили тяжіння, розвинутих на основі теорії гармонічних функцій, обмежується межами розвідувальної геофізики; їх не можна застосувати без додаткових обмежень і вдосконалень для вивчення глибинної регіональної структури Землі. У зв'язку з цим риторичним є питання, враховувати чи ні природу аномалій під час глибинного вивчення Землі, і не має альтернативи задача Алексідзе [Дубовенко, 2009а]. У світлі зазначеного вона є однією з найактуальніших проблем гравіметрії в ХХІ ст. і повністю вкладається в схему розвитку геофізики (аналітичні апроксимації середовища і поля, нелінійні задачі, дискретні постановки, великорозмірні системи рівнянь) [Страхов и др., 2001].

*Автор висловлює глибоку вдячність академіку НАН України В. І. Старостенку за цінні зауваження.*

### Список літератури

- Алексидзе М. А. Редукция силы тяжести. — Тбилиси: Мецниереба, 1965. — 256 с.
- Алексидзе М. А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 412 с.
- Балк П. И. Детерминистские модели интерпретации гравитационных полей: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1989. — 34 с.
- Булах Е. Г., Ржаницын В. А., Маркова М. Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиметрии. — Киев: Наук. думка, 1976. — 218 с.
- Веселов К. Е., Сагитов М. У. Гравиметрическая разведка. — Москва: Недра, 1968. — 256 с.
- Гравиразведка: Справочник геофизика / Под. ред. Е. А. Мудрецовою, К. Е. Веселова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Недра, 1990. — 607 с.
- Дубовенко Ю. І. Деякі особливості уточнення рельєфу геоїда за даними супутникової гравіметрії // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія. — 2008б. — Вип. 44. — С. 30—36.
- Дубовенко Ю. І. До уточнення аномалій геоїда // Геофиз. журн. — 2008а. — 30, № 4. — С. 112—122.
- Дубовенко Ю. І. Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофиз. журн. — 2009а. — 31, № 6. — С. 132—139.
- Дубовенко Ю. І. Редукція задачі Алексідзе для рівняння сили тяжіння // Доп. НАН України. — 2009б. — № 12. — С. 112—119.
- Дубовенко Ю. І. Розв'язність задачі Алексідзе // Доп. НАН України. — 2010. — № 1. — С. 115—122.
- Интерпретация гравитационных и магнитных полей: Сб. науч. тр. / Отв. ред. В. И. Старостенко. — Киев: Наук. думка, 1992. — 248 с.
- Картвелишвили К. М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. — Москва: Наука, 1983. — 94 с.
- Левенков Я. Б. О решении полной задачи Коши для уравнения Лапласа в произвольной двумерной области // Геофиз. журн. — 1987. — 9, № 4. — С. 76—81.
- Оганесян С. М. Регулярные методы решения трехмерных задач гравиметрии / Отв. ред. Старостенко В. И. — Ереван: «Гитутюн» НАН РА, 2004. — 381 с.



- Серкеров С. А.* Теория гравитационного и магнитного потенциалов. — Москва: Наука, 1990. — 304 с.
- Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. — Ленинград: ОГИЗ Гостехиздат, 1946. — 318 с.
- Старостенко В. И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев: Наук. думка, 1978. — 228 с.
- Страхов В. Н.* О корректном применении аналитического продолжения // Геология и геофизика. — 1964. — № 8. — С. 1061—1066.
- Страхов В. Н.* Об устойчивых методах решения линейных задач геофизики. Постановки и основные конструктивные идеи // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1990. — № 7. — С. 3—27.
- Страхов В. Н., Шефер У., Страхов А. В., Опитуц К.* К новой парадигме гравиметрии // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Матер. 28-й сес. Междунар. семинара им. Д. Г. Успенского, г. Киев, 29 янв.—2 февр. 2001 г. — Москва, ОИФЗ РАН, 2001. — С. 125—128.
- Черный А. В.* Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1992. — 34 с.
- Черный А. В.* О редуцировании значений силы тяжести: Автореф. дис. ... канд. геол.-минерал. наук. — Киев, 1969. — 19 с.
- Черный А. В.* Об уравнении силы тяжести // Докл. АН УССР. Сер. Б. — 1970. — № 2. — С. 145—148.
- Черный А. В.* Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. — 1982. — № 4. — С. 18—21.
- Черный А. В., Якимчик А. И.* Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. Ч. 1 // Геофиз. журн. — 1999. — **21**, № 3. — С. 55—72.
- Юнг К.* Гравиметрические методы прикладной геофизики // Прикл. геофизика. — Москва; Ленинград: ОНТИ, 1936. — Вып. 1. — С. 53—204.
- Lerch F. J., Klosko S. M., Laubseher R. E., Wagner C. A.* Gravity model improvement using Geos3 (GEM 9 & 10) // J. Geophys. Res. — 1979. — **84**, B8. — P. 3897—3916.