Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

Т. М. Засадко

Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою для двовимірного випадку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Прокласифіковано інтеграли руху першого роду для рівняння Шрьодінгера зі змінною масою. Вказано вісім класів рівнянь з нееквівалентною симетрією. Вони включають в себе інтегровні, суперінтегровні та максимально суперінтегровні системи. Повний набір розв'язків однієї з цих систем наведений в явному вигляді.

Ключові слова: рівняння Шрьодінгера, гамільтоніани, інтеграли руху, інтегровні системи, суперінтегровні системи, максимально суперінтегровні системи, алгебра Лі.

Дослідження симетрії та інтегралів руху рівняння Шрьодінгера знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників (див., наприклад, [1]). В той же час рівняння Шрьодінгера зі змінною масою до останнього часу залишалося не дослідженим попри те, що вони широко використовуються у фізиці твердого тіла. У роботах [2, 3] були вперше систематично досліджені інтеграли руху та симетрії тривимірних рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою.

У даній роботі вивчаються двовимірні рівняння Шрьодінгера зі змінною масою. Такі рівняння природно виникають після розділення змінних у рівняннях вищої розмірності, причому їх симетрії не можна отримати редукцією симетрій тривимірних рівнянь. Іншими словами, дослідження симетрії двовимірних рівнянь Шрьодінгера є самостійною задачею.

Визначальні рівняння. Розглянемо стаціонарне рівняння Шрьодінгера

$$\widehat{H}\psi = E\psi, \tag{1}$$

де

$$\widehat{H} = p_a f(\mathbf{x}) p_a - V(\mathbf{x}) = -\partial_a f(\mathbf{x})\partial_a - V(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x^1, x^2). \tag{2}$$

Тут $p_a = -i\partial_a$, $V(\mathbf{x})$ і $f(\mathbf{x}) = 1/m(\mathbf{x})$ — довільні функції.

Наша задача — знайти всі гамільтоніани (2), які допускають інтеграли руху, що належать до диференціальних операторів першого порядку. Такі інтеграли руху можна подати у вигляді

$$Q = \frac{1}{2}(\xi^a p_a + p_a \xi^a) + \widetilde{\eta} = -i(\xi_a \partial_a + \eta), \tag{3}$$

де $\eta = \dfrac{1}{2}\partial_a \xi^a + i\widetilde{\eta}$, ξ^i та η — невідомі функції від $\mathbf{x}$.

Згідно з визначенням, диференціальні вирази (2) та (3) повинні комутувати:

$$[\widehat{H}, Q] \equiv \widehat{H}Q - Q\widehat{H} = 0. \tag{4}$$

Обраховуючи комутатор і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при різних похідних, дістаємо таку систему визначальних рівнянь:

$$\xi^b_a + \xi^a_b - \delta_{ab}\xi^i_i = 0, \tag{5}$$

$$\xi^i f_i = f\xi^i_i, \tag{6}$$

$$-\xi^i f_{ai} + f_i \xi^a_i + f\xi^a_{cc} + 2f\eta_a = 0, \tag{7}$$

$$f_a \eta_a + f\eta_{aa} - \xi^i V_i = 0, \tag{8}$$

де δ_{ab} — символ Кронекера, і нижні індекси позначають похідні за відповідними змінними. Наприклад, $\xi^a_c = \partial\xi^a/\partial x_c$ і т. п. У тексті під індексами, що повторюються, розуміємо підсумовування за значеннями 1 і 2.

Формула (5) визначає рівняння для конформного вектора Кіллінга. Розв'язок цього рівняння може бути вибраний у такому вигляді (див., наприклад, [5]):

$$\xi^a = \lambda^a x^n x^n - 2x^a \lambda^n x^n + \mu^c \varepsilon^{ac} x^b + \omega x^a + \nu^a, \tag{9}$$

де ε^{ac} — одиничний антисиметричний тензор, грецькими літерами позначено константи інтегрування.

Згідно з (3), (9), загальний вигляд інтеграла руху першого порядку для гамільтоніана (2) задається такою формулою:

$$Q = \lambda^i K^i + \mu^i J^i + \omega D + \nu^i P^i + b, \tag{10}$$

де

$$P^i = p^i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad J^i = \varepsilon^{ijk} x^j p^k, \quad D = x^n p^n - i, \qquad K^i = 2x^i D - x^n x^n p^i, \tag{11}$$

а b — невідома функція від $\mathbf{x}$. Ці рівняння характеризують алгебру Лі конформної групи у двовимірному евклідовому просторі. Іншими словами, з точністю до останнього доданка, пропорційного одиничному оператору, шуканий інтеграл руху є лінійною комбінацією генераторів конформної групи у двовимірному евклідовому просторі $E(2)$, яка виявляється максимально можливою групою симетрії досліджуваних рівнянь.

Алгоритм інтегрування визначальних рівнянь. Для знаходження розв'язків системи визначальних рівнянь (8), (7) і (6) треба перебрати усі нееквівалентні набори довільних параметрів λ^a, μ^c, ν^a та ω, що визначають функції ξ^a згідно з формулою (9). З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів групи C(2), такі набори визначаються оптимальною системою підалгебр алгебри $\mathfrak{c}(2)$, базисні елементи якої задані формулами (11). Для знаходження цих підалгебр скористаємося таким твердженням (див. [6]).

Твердження 1. *Алгебра* $\mathfrak{c}(2)$ *ізоморфна алгебрі Лі псевдоортогональної групи* SO(1, 2).

Сформульований вище автоморфізм може бути заданий явно за допомогою таких співвідношень:

$$J^{ab} = \varepsilon^{abc} J^c, \qquad K^a = J^{0a} - J^{3a}, \qquad P^a = J^{0a} + J^{3a}, \qquad D = J^{30}, \tag{12}$$

де P^a, J^a, K^a та D — оператори (11). Ці співвідношення визначають алгебру $\mathfrak{so}(1,2)$.

Згідно з наведеними твердженнями, оптимальна система підалгебр алгебри $\mathfrak{c}(2)$ збігається з оптимальною системою підалгебр алгебри $\mathfrak{so}(1,3)$. Остання була знайдена в роботі [7], результатами якої ми і скористаємося.

Твердження 2. *Нееквівалентні підалгебри алгебри* $\mathfrak{so}(1,3)$ *визначаються такими наборами базисних елементів.*

Одновимірні підалгебри:

$$\langle J_{12}\rangle, \qquad \langle G_1\rangle, \qquad \langle J_{03}\rangle, \qquad \langle J_{12} + \alpha J_{03}\rangle;$$

двовимірні підалгебри:

$$\langle G_1, G_2\rangle, \qquad \langle G_1, J_{03}\rangle, \qquad \langle J_{12}, J_{03}\rangle;$$

тривимірні підалгебри:

$$\langle G_1, G_2, J_{03}\rangle, \quad \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle, \quad \langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha J_{03}\rangle, \quad \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle, \quad \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle;$$

чотиривимірна підалгебра:

$$\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{03}\rangle;$$

шестивимірна підалгебра:

$$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle;$$

де $G_1 = J_{01} - J_{13}$, $G_2 = J_{02} - J_{23}$, $\alpha > 0$.

Таким чином, задача групової класифікації рівняння (1) зводиться до пошуку нееквівалентних розв'язків рівнянь (8), (7), (6), де ξ^a — функції, задані рівнянням (9). При цьому досить обмежитись такими наборами значень числових параметрів λ^i, μ^i, ν^i та ω, що відповідають підалгебрам, перерахованим вище.

Продиференціювавши (6) за a і підставивши в отримане рівняння $\xi^i f_{ai}$, виражене з (7), одержимо, що

$$\eta = -2\lambda^a x^a + c, \tag{13}$$

де λ^a — константи, що входять у загальний вираз (10) для операторів симетрії, а c — довільна константа, яка є несуттєвою і може бути опущена.

Результати класифікації. Для завершення групової класифікації рівнянь залишилося проінтегрувати визначальні рівняння (8), (7) та (6) для випадків, що відповідають підалгебрам, перерахованим у твердженні 2.

Нехай оптимальна підалгебра одновимірна і включає єдиний базисний елемент J_{03}. Відповідні функції ξ^1, ξ^2 мають такий вигляд:

$$\xi^1 = -x_1, \qquad \xi^2 = -x_2.$$

Підставивши ці функції в (6), отримаємо рівняння для невідомої функції f:

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = 2f,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$f(x) = F\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1^2, \tag{14}$$

де $F(\cdot)$ — довільна функція своїх аргументів.

Пряма перевірка показує, що функції (14) тотожно задовольняють також рівняння (7).

Залишилося розв'язати останнє визначальне рівняння (8), яке набуває вигляду

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 = 0. \tag{15}$$

Це лінійне однорідне рівняння, загальний розв'язок якого має такий вигляд:

$$V = \widetilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1^2. \tag{16}$$

Розглянемо рівняння, що допускають симетрію відносно більш широких алгебр, які включають J_{03} і інші базисні елементи. Згідно з твердженням 2, достатньо розглянути дві двовимірні алгебри: $\langle G_1, J_{03}\rangle$ та $\langle J_{12}, J_{03}\rangle$. При цьому виникають додаткові умови інваріантності відносно дії операторів G_1 та J_{12} відповідно.

Розглянемо підалгебру $\langle G_1, J_{03}\rangle$. Підставивши відповідні значення функції ξ^a у рівняння (6) та (8), отримаємо додаткову систему визначальних рівнянь для f і V:

$$f_1 = 0, \qquad V_1 = 0.$$

Ці умови забороняють залежність функцій $F(\cdot)$ та $\widetilde{F}(\cdot)$ від x_1, і допустимі функції f і V набувають вигляду

$$f(x) = \mu x_2^2, \qquad V(x) = \nu x_2^2. \tag{17}$$

Для рівнянь, інваріантних відносно підалгебри $\langle J_{12}, J_{03}\rangle$, функції (14) та (16) повинні задовольняти такі додаткові умови:

$$x_2 f_1 - x_1 f_2 = 0, \qquad x_2 V_1 - x_1 V_2 = 0,$$

які отримуються при підстановці у (7) та (6) відповідних виразів для ξ^a та η. Ці умови сумісні з (14) та (16) тільки тоді, коли

$$f(x) = \mu x_2^2, \qquad V = \nu x_2^2. \tag{18}$$

Аналогічно, стартуючи з інших одновимірних алгебр, наведених у згаданому твердженні, і послідовно розв'язуючи відповідні визначальні рівняння, знаходимо всі інші рівняння Шрьодінгера та їх алгебри симетрії. Ця процедура є алгоритмічною для всіх розв'язних оптимальних підалгебр. У нашому випадку нерозв'язними є тільки такі алгебри, що включають підалгебру $\mathfrak{so}(2)$. Результати щодо розв'язків визначальних рівнянь наведено в табл. 1.

Інтегрування системи, інваріантної відносно алгебри $\mathfrak{o}(3)$. Кожне з рівнянь (1), що відповідають функціям f і V, які наведені у рядках 7 і 8 табл. 1, допускає по два інтеграли руху, що комутують між собою, тобто є суперінтегровними. Це дає можливість відносно просто знайти їх точні розв'язки. Ми знайдемо такі розв'язки для гамільтоніана (2) з функціями f і V, наведеними в рядку 7 табл. 1:

$$H = \mu(p_a(1+r^2)^2 p_a - 4r^2) + \nu. \tag{19}$$

Задачу на знаходження власних значень для даного гамільтоніана можна записати у вигляді

$$\widetilde{H}\psi = -(\partial_a(1+r^2)^2\partial_a + 4r^2)\mu = \widetilde{E}\psi, \tag{20}$$

де

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\mu}(H-\nu) \qquad \text{і} \qquad \widetilde{E} = \frac{E}{\mu} - \frac{\nu}{\mu}. \tag{21}$$

Рівняння (20) має такі інтеграли руху:

$$M^3 = x^1p^2 - x^2p^1, \tag{22}$$

$$M^a = \frac{1}{2}(r^2-1)p^a - x^ax^bp^b + ix^a, \qquad a, b = 1, 2, \tag{23}$$

які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[M^a, M^b] = i\varepsilon^{abc}M^c. \tag{24}$$

Таблиця 1. Алгебри інваріантності рівнянь (2) та відповідні функції f та V, що визначають ці рівняння

N_0	Підалгебра	f	V
1	J_{12}	$F(r^2)$	$\widetilde{F}(r^2)$
2	G_1	$F(x_2)$	$\widetilde{F}(x_2)$
3	$J_{12} + \alpha J_{03}$	$F\left(-\ln(r) + \alpha\dfrac{x_2}{x_1}\right)r^2$	$\widetilde{F}\left(-\ln(r) + \alpha\dfrac{x_2}{x_1}\right)r^2$
4	J_{03}	$F\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)x_1^2$	$\widetilde{F}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)x_1^2$
5	$\langle G_1, J_{03}\rangle$	μx_2^2	νx_2^2
6	$\langle J_{12}, J_{03}\rangle$	μr^2	νr^2
7	$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$	$\mu(r^2+1)^2$	$4\mu r^2 + \nu$
8	$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle$	$\mu(r^2-1)^2$	$4\mu r^2 + \nu$

Використовуючи згадану симетрію, можна алгебраїчно знайти власні значення $\widetilde{E}$ до розв'язання рівняння (20). Для цього обчислимо оператор Казіміра алгебри $\mathfrak{o}(3)$ для виразу (20):

$$C = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \frac{1}{4}(\widetilde{H} - 4). \tag{25}$$

Згідно з (25) власні значення гамільтоніана можуть бути виражені через власні значення оператора C, які мають вигляд

$$C = q(q+1) = \frac{n^2 - 1}{4}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots. \tag{26}$$

Звідки отримуємо:

$$E = \mu(n^2 + 3) + c \qquad \text{і} \qquad \widetilde{E} = n^2 + 3. \tag{27}$$

Наступним кроком буде знайти власні вектори, які відповідають власним значенням (27). Ввівши полярні координати і розклавши розв'язки за радіальними функціями

$$\psi = \sum_k \phi_k(r) \exp^{ik\varphi}, \tag{28}$$

отримаємо такі рівняння для радіальних функцій:

$$\left(-(r^2+1)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{k^2}{r^2} - \frac{(1+5r^2)}{r(1+r^2)}\frac{\partial}{\partial r}\right) - 4r^2\right)\phi_k = (n^2+3)\phi_k, \tag{29}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$ — спектральні параметри, які відповідають власним векторам квадрата орбітального моменту. В даному випадку гамільтоніан інваріантний відносно просторового відображення $x^1 \to x^1$, $x^2 \to -x^2$, яке трансформує ψ, ϕ таким чином:

$$\psi(x^1, x^2) \to \psi(x^1, -x^2), \qquad \phi_k(r) \to \phi_{-k}(r). \tag{30}$$

Тому нам достатньо розглянути лише позитивні k.

Інтегровними в квадратурах розв'язками рівнянь (29) є

$$\phi_k = C_k^n r^k (r^2+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n} \mathcal{F}\left(\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}n\right], [1+k], -r^2\right), \tag{31}$$

де $F(\cdot)$ — гіпергеометрична функція, а C_k^n — константи інтегрування. Для того щоб розв'язки зникали на нескінченності потрібно, щоб $k \leqslant n - 1$.

Таким чином, максимально суперінтегровна система (20) є розв'язною. Точні розв'язки і спектр гамільтоніана задаються рівняннями (31) і (27).

Отже, в роботі проведена класифікація рівняння Шрьодінгера зі змінною масою для двовимірного випадку, що допускають інтеграли руху першого порядку. Деякі з цих рівнянь мають несподівані симетрії, наприклад, рівняння з лінії 7 табл. 1 інваріантне відносно алгебри Лі групи обертань у тривимірному просторі SO(3). Нагадаємо що геометрична симетрія цих систем задається групою SO(2).

Наведено список рівнянь, що допускають інтеграли руху першого порядку. Оскільки такі інтеграли руху є генераторами неперервних груп симетрій, то наведені результати можна інтерпретувати як групову класифікацію рівнянь (1), які містять два довільні елементи, тобто функції f і V. Ця класифікація може розглядатись як попередня, оскільки ми не розглядали додаткові перетворення еквівалентності, що не належать до групи C(2).

Автор висловлює подяку проф. А. Г. Нікітіну за цінні зауваження до роботи.

Цитована література

1. *Miller Jr. W., Post S., Winternitz P.* Classical and quantum superintegrability with applications // J. Phys. A: Math. Theor. – 2013. – **46**, No 42. – 423001.
2. *Нікітін А. Г., Засадко Т. М.* Групова класифікація рівнянь Шродінгера зі змінною масою // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 1. – P. 228–240.
3. *Nikitin A. G., Zasadko T. N.* Superintegrable systems with position dependent mass // J. Math. Phys. – 2015. – **56**. – 042101.
4. *Nikitin A. G.* New exactly solvable systems with Fock symmetry // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – **45**. – 485204.
5. *Нікітін А. Г.* Узагальнені тензори Кілінга довільного рангу та порядку // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – P. 786–795.
6. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли. – Москва: Наука, 1983. – 360 с.
7. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.

References

1. *Miller Jr. W., Post S., Winternitz P.* J. Phys. A: Math. Theor., 2013, **46**: 423001.
2. *Nikitin A. G., Zasadko T. N.* Zbirnyk prats' Institutu Matematyky NAN Ukrainy, 2014, **11**: 228–240 (in Ukrainian).
3. *Nikitin A. G., Zasadko T. N.* J. Math. Phys., 2015, **56**: 042101.
4. *Nikitin A. G.* J. Phys. A: Math. Theor., 2012, **45**: 485204.
5. *Nikitin A. G.* Ukr. Math. J., 1991, **43**: 734–743.
6. *Zhelubenko D. P., Shtern A. I.* Representation of Lie groups, Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
7. *Fushchich V. I., Barannik L. F., Barannik A. F.* Subgroup analysis of Galilei and Poincaré groups and reduction of nonlinear equations, Kiev: Naukova Dumka, 1991 (in Russian).

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 02.12.2014

Т. М. Засадко

Групповая классификация уравнений Шредингера с переменной массой для двухмерного случая

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Проклассифицированы интегралы движения первого порядка для уравнений Шредингера с переменной массой. Указано восемь классов уравнений с неэквивалентной симметрией. Они включают в себя интегрируемые, суперинтегрируемые и максимально суперинтегрируемые системы. Полный набор решений одной из этих систем представлен в явном виде.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, гамильтонианы, интегралы движения, интегрируемые системы, суперинтегрируемые системы, максимально суперинтегрируемые системы, алгебра Ли.

T. M. Zasadko

Group analysis of two-dimensional Schrödinger equations with variable mass

Taras Shevchenko National University of Kiev

The first-order integrals of motion for Schrödinger equations with variable mass are classified. Eight classes of such equations with non-equivalent symmetries are specified. They include integrable, superintegrable, and maximally superintegrable systems. A complete set of solutions for one of these systems is presented explicitly.

Keywords: Schrödinger equation, Hamiltonians, integrals of motion, integrated systems, superintegrable systems, maximally superintegrable systems, Lie algebra.