

Т. В. Сорокіна¹, С. І. Азаров²,
Г. А. Сорокін²

¹ Інститут технічної теплофізики НАН України

² Інститут ядерних досліджень НАН України

Порівняння розрахункових методів для визначення теплофізичного стану твела ядерного реактора

Наведено розрахунок теплофізичного стану тепловидільної збірки ядерного реактора кількома аналітичними і числовими методами. Визначено найбільш оптимальний метод розрахунку енерговиділення та температур у тепловидільному елементі для його подальшого застосування в теплофізичних моделях прогнозування працездатності активної зони ядерного реактора.

Т. В. Сорокіна, С. І. Азаров, Г. А. Сорокін

Сравнение расчетных методов для определения теплофизического состояния твела ядерного реактора

Приведен расчет теплофизического состояния тепловыделяющей сборки ядерного реактора несколькими аналитическими и численными методами. Определен наиболее оптимальный метод расчета энергосвечения и температур в тепловыделяющем элементе для его последующего применения в теплофизических моделях прогнозирования работоспособности активной зоны ядерного реактора.

Останніми роками на АЕС України триває процес переходу на нове ядерне паливо. Наприклад, модернізовані тепловидільні збірки альтернативної конструкції (ТВЗа), які поставляються з Росії та мають значно кращі показники ефективності тепловикористання, дозволили збільшити паливну кампанію на Запорізькій АЕС до 360 дб. Водночас на трьох енергоблоках Южно-Української АЕС експлуатуються встановлені фірмою-виробником (компанія “Вестінгауз” США) альтернативні ТВЗ разом зі штатними.

Під час запуску, зупинки, у перехідних та аварійних режимах температурні поля в найбільш відповідальному елементі ядерного реактора — тепловидільному елементі (твел) — змінюватимуться за часом. Проблема достовірного визначення температурного стану ТВЗ в атомній енергетиці є однією з найважливіших, від її успішного вирішення залежать можливості підвищення надійності, ефективності та ресурсу роботи ядерного реактора.

Оцінка теплотехнічного стану твелів у процесі експлуатації ядерної установки — частина проблеми ядерної і радіаційної безпеки АЕС, оскільки оболонка твела є одним з головних бар’єрів, що забезпечують локалізацію продуктів поділу в межах активної зони реактора.

Існуючі аналітичні методи визначення розподілу температур у твелах ядерного реактора засновані на розв’язанні рівняння теплопровідності в необмеженому циліндрі і, в загальному випадку, для рухомого тепловидільного середовища [1, 2]. Але питання про можливість їх використання на практиці для вирішення нелінійних задач і нестационарних теплових процесів тіл складної форми майже не знайшло відображення в роботах [1, 2], а наведені результати розрахунку насилу піддаються узагальненню. З іншого боку, якщо теплофізичні властивості конструкційних матеріалів та теплоносія ядерного реактора суттєво змінюються з часом, то проводити тепловий розрахунок аналітичним методом не можна через великі похибки розрахунку. Розрахунок слід вести числовими методами.

Для розв’язання задач теплопровідності в ядерному реакторі застосовуються такі числові методи [3]:

- варіаційно-різницеви;
- метод прямих;
- статистичні (ймовірнісні);
- метод скінченних різниць (сіток).

Застосування числових методів для вирішення крайових задач теплопровідності завжди призводить до наближеного розв’язку, оскільки вони засновані на заміні безперервної математичної моделі процесу наближеною дискретною моделлю. Проте числові методи дають змогу вирішувати складні крайові задачі, недоступні для розв’язання аналітичними методами.

Метою роботи є вирішення задачі теплопровідності кількома методами, в тому числі аналітичним методом, методом скінченних різниць і методом скінченних елементів для визначення найбільш оптимального методу для його подальшого застосування у прогнозуванні теплотехнічної надійності ТВЗ.

Постановка задачі

В ядерному реакторі твел — це стержень (або набір таблеток) з подільного матеріалу, що знаходиться в герметичній захисній циліндричній оболонці. Між таблетками і захисною оболонкою є контактний шар, заповнений інертним газом. Захисна оболонка твела омивається теплоносієм.

Розглянемо метод розрахунку нестационарного температурного поля для циліндричного твела із захисною оболонкою. У циліндричному твелі скінченної довжини L , радіусом R в умовний моменті часу $\tau < 0$ діють внутрішні джерела тепла потужністю $q_V(R)$; на поверхні твела задані граничні умови третього роду; відомі коефіцієнти тепловіддачі a_r і температура теплоносія T_3 . Починаючи з моменту часу $\tau = 0$ потужність тепловиділення $q_V(R)$ і температура теплоносія T_3 починають змінюватися в часі.

Запишемо диференціальне рівняння збереження енергії в циліндричних координатах у вигляді [4]:

1) для матеріалу, що ділиться:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial R_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial R_1} \right) + a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial L^2} + a_1 \lambda_1^{-1} q_{V_1}(\tau) \quad (1)$$

з початковою умовою

$$T_1(R, 0) = T_1(R) \quad (2)$$

і граничними умовами по радіусу

$$\frac{\partial T_1(0, r)}{\partial R_1} = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial R_1} \right) = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial R_2} \right), \quad (4)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \tau)}{\partial R_1} = a_1 [T_1(R, \tau) - T_2], \quad (5)$$

де

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{C_1 \rho_1}; \quad (6)$$

2) для захисної оболонки:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial R_2^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial T_2}{\partial R_2} \right) + a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial L^2} + a_2 \lambda_2^{-1} q_{V_2}(\tau) \quad (7)$$

з початковою умовою

$$T_2(R, 0) = T_2(R) \quad (8)$$

і граничними умовами

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(R_2, \tau)}{\partial R_2} = a_3 [T_2(R_2, \tau) - T_3(\tau)]. \quad (9)$$

Граничні умови за координатою z виглядатимуть так:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial L} \Big|_{L=0} = -f_0, \quad (10)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial L} + a_3 (T_1 - T_2) \Big|_{L=\delta} = 0. \quad (11)$$

Для коефіцієнта тепловіддачі зазору між матеріалом, що ділиться, і захисною оболонкою було використано співвідношення [5]:

$$\alpha_r = \frac{\alpha_r}{0,5\bar{h} + B(R_1 + R_2) + (q_{V_1} + q_{V_2})} + \frac{\alpha_K P_K}{D(R_1^2 + R_2^2)^{1/4}}. \quad (12)$$

У рівняннях (1) – (12) введено такі позначення: 1, 2, 3, r – індекси при коефіцієнтах величин, що відносяться до палива (1), оболонки (2), теплоносія (3) і зазору газу (r) відповідно; ρ – густина; C – питома теплоємність; λ – теплопровідність; q_V – густина тепловиділення палива; a – коефіцієнт теплопровідності; T_1 – температура поверхні палива; T_2 – температура зовнішньої поверхні оболонки; L – ефективна довжина твела; R_1 – радіус таблетки; R_2 – внутрішній

радіус оболонки; B та D – сталі; \bar{h} – середній зазор між матеріалом, що ділиться, і захисною оболонкою за робочих умов; P_K – тиск при контакті; τ – час.

У тепловидільній збірці, розташованій в i -му кільці, розподіл густини тепловиділення за висотою твела описується формулою [5]:

$$q_V^i(t, R_i, z) = \frac{4}{\pi d^2 l N_{rod}} W(t) K_V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{H} z\right) I_0(\chi, R_i), \quad (13)$$

де $I_0(\chi, R_i)$ – функція Бесселя нульового порядку; $L = L_0 + 2l$ – екстрапольована висота реактора; l – ефективна довжина твела; $H = L + 2\delta$ – екстрапольована довжина реактора; $\delta = 0,171\lambda_{trans}$ – ефективна компенсація; λ_{trans} – транспортна довжина нейтронів; K_V – коефіцієнт нерівномірності тепловиділення в активній зоні; d – діаметр палива (UO_2); N_{rod} – число твелів в активній зоні; $W(t)$ – середня теплова потужність реактора; z – координата.

Коефіцієнт тепловіддачі α_r від поверхні захисної оболонки твела до теплоносія визначається із співвідношення [6]:

$$Nu = \frac{\alpha_r d_r}{\lambda_3} = 0,21 Re^{0,80} Pr_T^{0,43} (Pr_T / Pr_{3,0})^{0,25}. \quad (14)$$

де Nu – число Нуссельта; $Pr = \frac{v}{\alpha_3}$ – число Прандтля; $Re = \frac{Vd}{\nu}$ – число Рейнольдса; d_r – гідравлічний діаметр каналу ТВЗ; v – швидкість теплоносія.

Швидкість потоку теплоносія через ТВЗ [7]

$$v = \sqrt{\frac{2\omega d_r}{f_{тр} \rho_T l}}, \quad (15)$$

де ω – потужність насоса, витрачена на прокачування теплоносія через ТВЗ; ρ_1 – густина теплоносія; $f_{тр}$ – коефіцієнт тертя (шорсткість твела).

Аналітичний метод

Рівняння (1) – (15) є системою нелінійних диференціальних рівнянь. Нелінійність цієї системи виражається головним чином у тому, що густина тепловиділення q , коефіцієнти теплопровідності τ і коефіцієнт тепловіддачі зазору α_r що входять до рівняння, змінюються із зміною температури.

Введемо безрозмірні величини:

$$r_1 = \frac{\bar{R}}{R_1}; \quad z = \frac{Z}{R_1}; \quad \bar{r}_1 = \frac{R_1}{R_L}; \quad r_2 = \frac{R_2}{R_L}; \quad l = \frac{L}{R_1}; \quad \theta_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_2};$$

$$\theta_2 = \frac{T_2 - T_3}{T_3}; \quad \delta = \frac{\bar{\sigma}}{R_L}; \quad t = \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Тоді задача (1)–(15) з використанням послідовного інтегрального перетворення Лапласа за координатою і косинус перетворення Фур'є за часом запишуться таким чином [8]:

$$\begin{cases} \theta(\bar{r}_1, \tau) = A_1 J_0(\mu_1^{1/2} \bar{r}_1) + A_2 K_1(\mu_1^{1/2} \bar{r}_1) + \frac{1}{\mu_1} P_1(\beta, S), \\ \theta(\bar{r}_2, \tau) = A_3 J_0(\mu_2^{1/2} \bar{r}_2) + A_4 K_2(\mu_2^{1/2} \bar{r}_2) + \frac{1}{\mu_2} P_2(\beta, S), \end{cases} \quad (16)$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 – невідомі коефіцієнти; $\theta(\bar{r}, t)$, $J_0(\mu_1^{1/2} \bar{r}_1)$, $J_0(\mu_2^{1/2} \bar{r}_2)$, $K_1(\mu_1^{1/2} \bar{r}_1)$, $K_2(\mu_2^{1/2} \bar{r}_2)$ – циліндричні функції уявного аргументу (функції Бесселя); β, S – комплексні змінні перетворення Лапласа.

У рівнянні (16)

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= \beta^2 + \frac{S}{K_1}; & K_1 &= \frac{a_1 \tau_0}{r_1^2}; \\ \mu_2 &= \beta^2 + \frac{S}{K_2}; & K_2 &= \frac{a_2 \tau_0}{r_2^2}; \\ P_1(\beta, S) &= \frac{r_1^{-2}}{T_1 \lambda_1} \frac{\sin(\beta, l)}{\beta} \frac{q_{V_1}}{S}; \\ P_2(\beta, S) &= \frac{r_2^{-2}}{T_2 \lambda_2} \frac{\sin(\beta, l)}{\beta} \frac{q_{V_2}}{S}; \\ M &= \beta \cdot \operatorname{tg}(\beta \cdot l). \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Для спрощення системи (16) розкладемо функцію Бесселя в ряд Тейлора [9] відносно координати \bar{r}_1 , обмежившись другим порядком малості σ , і за правилом Крамера [10] у системі (16) знайдемо невідомі коефіцієнти.

Для здобуття оригіналу в системі рівнянь (16) скористаємося формулою обернення [11]:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\theta}(\bar{r}, t) &= T(\bar{r}, t) - T_3(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{A-ico}^{A+ico} [\hat{\theta}(\bar{r}_1, t) - \hat{\theta}(\bar{r}_2, t)] \cdot \exp(S \cdot t) dS, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$S = a + ib, \quad i = (-1)^{1/2}; \quad (19)$$

$\Delta \hat{\theta}(\bar{r}, t)$ — перетворення Фур'є, виражене для безрозмірної температури.

Перехід від безрозмірної температури до надлишкової температури здійснювався за допомогою формули обернення для інтегрального косинус-перетворення Фур'є [12]:

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}(t) \Big|_{r=R_2} - \bar{\theta}(t) \Big|_{r=R_1} = \\ &= 2 \times \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\rho_j^2 + \eta_2^2}{L(\beta_j^2 + \eta_2^2) + \eta_2} \left[\hat{\theta}(\tau) \Big|_{r=R_2} - \hat{\theta}(\tau) \Big|_{r=R_1} \right] \cdot \cos(\beta_j \delta) \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\eta_2 = \frac{a_T R_1}{\lambda_2}. \quad (21)$$

Якщо потужність внутрішніх джерел тепла не міняється ($q_{V_1} = \text{const}$, $q_{V_2} = \text{const}$), а температура теплоносія у момент часу τ_0 міняється стрибком на деяку величину, то

$$\begin{aligned} &\theta(\bar{r}, t) = T(\bar{r}, t) - T_3(t) = \\ &= \frac{2}{r^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_i \cdot \bar{r}/R)}{J_1^2(\mu_i)} \exp(-a_T \mu_i^2 t/R^2) \int_0^R r \cdot f_0(t) J_0(\mu_i \cdot \bar{r}/R) d\bar{r}. \end{aligned} \quad (22)$$

Метод скінченних різниць

Різницеві рівняння для диференціальних рівнянь (1) — (12) можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{a_{f,i,j}^n}{R_j} R_{j+1/2} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - R_{j-1/2} (T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n) + \frac{q_{i,j}^n}{\rho_{f,i,j}^n c_p^n f_{i,j}}, \\ 0 &< R < R_1; \\ \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{a_{cl,i,j}^n}{R_j} R_{j+1/2} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - R_{j-1/2} (T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n), \\ R_2 &< R < R_3; \\ \frac{T_{i,1}^n - T_{i,0}^n}{\Delta R} &= 0, \quad R = 0; \\ \frac{T_{i,j}^{n(fw)} - T_{i,j}^{n(fw)-1}}{\Delta R} &= \frac{\alpha_{G,j}^n}{\lambda_{f,i,j}^n(fw)} (T_{i,j}^{n(fw)} - T_{i,j}^{n(cw0)}), \quad R = R_1; \\ \frac{T_{i,j}^{n(cw0)+1} - T_{i,j}^{n(cw0)}}{\Delta R} &= \frac{\alpha_{G,j}^n}{\lambda_{cl,i,j}^n(cw0)} (T_{i,j}^{n(fw)} - T_{i,j}^{n(cw0)}), \quad R = R_2; \\ \frac{T_{i,j}^{n(cw1)} - T_{i,j}^{n(cw1)-1}}{\Delta R} &= \frac{\alpha_{cl}^n}{\lambda_{cl,i,j}^n(cw1)} (T_{i,j}^{n(cw1)} - T_{cool,i}^n), \quad R = R_3; \\ \frac{T_{cool,i}^{n+1} - T_{cool,i}^n}{\Delta t} &= \alpha_{0,j}^n (T_{i,j}^{n(cw1)} - T_{cool,i}^n) - V_T^n \frac{T_{cool,i+1}^n - T_{cool,i}^n}{\Delta Z}, \end{aligned} \right. \quad (23)$$

де n, i, j — відповідно вузли координати часу, аксіальної і радіальної координат; $j(cw0), j(cw1)$ — вузли радіальної координати на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки; $j(0)$ — вузол у центрі таблетки; $cool$ — вузол, що відноситься до теплоносія.

Згадана вище система різницевих рівнянь є повною математично закритою системою і розв'язується послідовно.

Схема явної різниці наведена на рис. 1.

Якщо перетворити різницеві рівняння так, щоб визначити значення в усіх різницевих вузлах послідовно, починаючи з вихідних умов, то вони набудуть такого вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} &= \frac{a_{f,i,j}^n}{R_j} R_{j+1/2} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - R_{j-1/2} (T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n) \Delta t + \frac{q_{i,j}^n}{\rho_{f,i,j}^n c_p^n f_{i,j}} \Delta t + T_{i,j}^n, \\ 0 &< R < R_1; \\ T_{i,j}^{n+1} &= \frac{a_{cl,i,j}^n}{R_j} R_{j+1/2} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - R_{j-1/2} (T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n) \Delta t - T_{i,j}^n, \\ R_2 &< R < R_3; \\ T_{i,1}^n &= T_{i,0}^n, \quad R = 0; \\ T_{i,j}^{n(fw)} &= \frac{T_{i,j}^{n(fw)-1} + \frac{\Delta R (\alpha_{G,j}^n / \lambda_{f,i,j}^n(fw)) T_{i,j}^{n(cw0)+1}}{1 + \Delta R \alpha_{G,j}^n / \lambda_{cl,i,j}^n(cw0)}}{1 + \Delta R \alpha_{G,j}^n / \lambda_{f,i,j}^n(fw) - \frac{(\Delta R)^2 (\alpha_{G,j}^n)^2}{1 + \Delta R \alpha_{G,j}^n / \lambda_{cl,i,j}^n(cw0)}}, \quad R = R_1; \\ T_{i,j}^{n(cw0)} &= \frac{\Delta R (\alpha_{G,j}^n / \lambda_{f,i,j}^n(cw0)) T_{i,j}^{n(fw)} + T_{i,j}^{n(cw0)+1}}{1 + \Delta R \alpha_{G,j}^n / \lambda_{cl,i,j}^n(cw0)}, \quad R = R_2; \\ T_{i,j}^{n(cw1)} &= \frac{T_{i,j}^{n(cw1)-1} + \Delta R (\alpha_{G,j}^n / \lambda_{cl,i,j}^n(cw1)) T_{cool,i}^n}{1 + \Delta R \alpha_{G,j}^n / \lambda_{cl,i,j}^n(cw1)}, \quad R = R_3; \\ T_{cool,i}^{n+1} &= \alpha_{0,j}^n \Delta t (T_{i,j}^{n(cw1)} - T_{cool,i}^n) - V_T^n \Delta t \frac{T_{cool,i+1}^n - T_{cool,i}^n}{\Delta Z} + T_{cool,i}^n, \end{aligned} \right. \quad (24)$$

де f, cl — вузли відповідно таблетки і оболонки.

Отримане рівняння (24) дало змогу по відомих значеннях $T_{i,j}^n, a_f, \lambda_f, q_{i,j}^n, c_p$ на часовому шарі $(j-1, n)$ ($j=0, 1, 2, \dots, n-1$) методом прогону визначити шукані параметри (T_1, T_2, q_1) на шарі $(j+1)$ шляхом повторного застосування методу прогону. При цьому крок за часом задовольняв умові Кузанта [8]

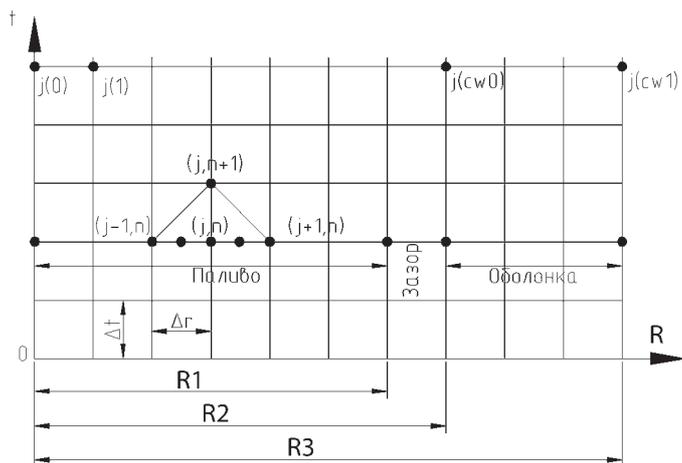


Рис.1. Схема різниці

$$\Delta t < \frac{(\Delta R)^3}{2} \left\{ \frac{1}{a_{f,i,0}^n} + \frac{\Delta R [j(cw0) - 1]}{a_{cl,i,j(cw0)}^n} \right\}. \quad (25)$$

Умова стійкості для системи рівнянь (23) визначалася, головним чином, двовимірними різницевиими рівняннями:

$$\begin{cases} A_0(R, t) = \frac{a_{f,i,j}^n}{R_j}, & 0 < R < R_1; \\ A_0(R, t) = \frac{a_{cl,i,j}^n}{R_j}, & R_2 < R < R_3. \end{cases} \quad (26)$$

Ітераційний процес закінчується при виконанні наступних умов:

$$\left| \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \right| \leq \delta. \quad (27)$$

Точність апроксимації на сітках (рис. 1), що згущуються, перевірена за правилом Рунге [11].

Метод скінченних елементів

Розрахуємо відповідну варіаційну постановку для системи (1)–(15). Шукатимемо розв'язання задачі у слабій формі (метод Гальоркіна) [3].

Проведемо апроксимацію за часом. Будемо використовувати неявну тришарову схему за Лагранжем:

$$\begin{cases} \partial T_1 / \partial \tau = \eta_0(\tau) T_1^j - \eta_1(\tau) T_1^{j-1} + \eta_2(\tau) T_1^{j-2}; \\ \partial T_2 / \partial \tau = \eta_0(\tau) T_2^j - \eta_1(\tau) T_2^{j-1} + \eta_2(\tau) T_2^{j-2}, \end{cases} \quad (28)$$

де функції T_1^{j-2} , T_2^{j-2} , T_1^{j-1} , T_2^{j-1} , T_1^j , T_2^j — значення шуканої функції T_1 та T_2 в моменти часу $t = t_{j-2}$, $t = t_{j-1}$, $t = t_j$ відповідно.

Проведемо скінченно-вимірну апроксимацію задачі. Перейдемо до скінченного підпростору R простору H . Базисний простір R_i^n — від ψ_1 до ψ_n . Для $T_1 \in R_i^n$, $T_2 \in R_i^n$ маємо $T_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i$, $T_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i \psi_i$.

За скінченні елементи візьмемо чотирипросторову сітку структуровану, однорідну та рівномірну (шаблон показаний на рис. 2). Максимальна кількість вузлів у розрахун-

ковій області дорівнює 2300. Такий тип сітки полегшує дослідження теплофізичного процесу, отримання просторових похідних, розрахунок температур.

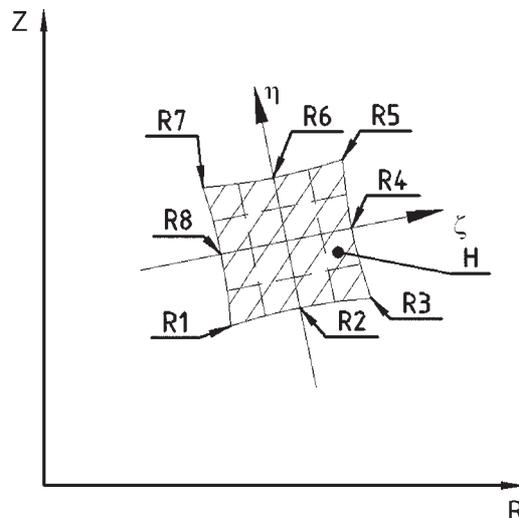


Рис. 2. Локальні координати в базовій області у рівномірній локальній сітці

Векторний вираз для простору R має такий вигляд:

$$\vec{R}(\zeta_j, \eta_j) = \sum_{i=1}^8 \psi_i(\zeta_i, \eta_i) \vec{R}_i, \quad (29)$$

де $\vec{R}_i \in (\zeta_i, \eta_i)$ — координати вузлів на сторонах базової області; ζ_i, η_i — координати вузла сітки в локальній системі координат (рис. 3);

$$\begin{cases} \psi_1(\zeta, \eta) = \frac{1}{4}(\zeta-1)(1-\eta)(\zeta+\eta+1); \\ \psi_2(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1-\eta); \\ \psi_3(\zeta, \eta) = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)(\zeta-\eta-1); \\ \psi_4(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\eta^2); \\ \psi_5(\zeta, \eta) = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)(\zeta+\eta-1); \\ \psi_6(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1+\eta); \\ \psi_7(\zeta, \eta) = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)(\eta-\zeta-1); \\ \psi_9(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(1-\zeta)(1-\eta^2). \end{cases} \quad (30)$$

Метод Гальоркіна з апроксимацією розв'язання скінченними елементами зводить процес знаходження невідомих параметрів до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (28). Використовуючи неявну тришарову схему на інтервалі (t_{j-2}, t_j) , враховуючи (1)–(3), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} \left(\frac{dt_{02} + dt_{01}}{dt_{02} dt_{01}} \hat{G} \right) T_1^j = \frac{dt_{02}}{dt_{12} dt_{01}} \hat{G} T_1^{j-1} + \frac{dt_{01}}{dt_{12} dt_{02}} \hat{G} T_1^{j-2}; \\ \left(\frac{dt_{02} + dt_{01}}{dt_{02} dt_{01}} \hat{C}_5 \right) \hat{G} T_2^j = \frac{dt_{02}}{dt_{12} dt_{01}} \hat{G} T_2^{j-1} + \frac{dt_{01}}{dt_{12} dt_{02}} \hat{G} T_2^{j-2}, \end{cases} \quad (31)$$

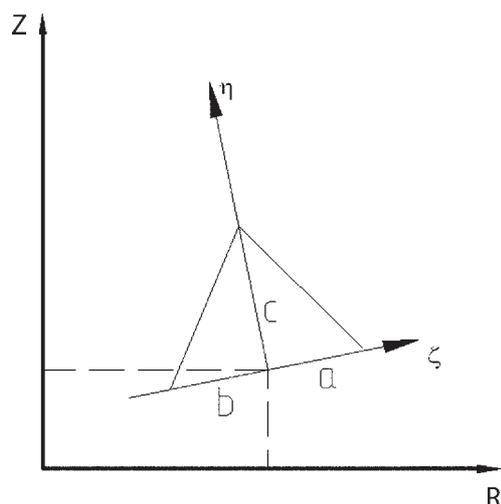


Рис. 3. Локальні координати ζ, η у скінченному елементі

де \hat{C}_5 — локальна матриця, котра пов'язує локальні номери вузлів у скінченному елементі з глобальними номерами вузлів на сітці;

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow j, \quad (32)$$

де i — локальний номер вузла; j — глобальний номер вузла.

Глобальні базисні функції $\psi_i(\vec{R})$, $i=1, \dots, n$, пов'язані з локальними базисними функціями співвідношенням

$$\psi_i(\vec{R}) = \sum_k G_i^k \psi^k(\vec{R}) = \sum_k \sum_{j=1}^N G_i^k \psi_j^k(\vec{R}), \quad (33)$$

де $\psi^k(\vec{R}) = [\psi_1^k(\vec{R}), \dots, \psi_N^k(\vec{R})]$.

$$\begin{cases} dt_{02} = t^j - t^{j-2}; \\ dt_{01} = t^j - t^{j-1}; \\ dt_{12} = t^{j-1} - t^{j-2}. \end{cases} \quad (34)$$

На першому кроці за часом для знаходження T_1^1 , T_2^1 використовуватимемо двошарову неявну схему $[T_1^0, T_2^0]$ відомі з початкових умов (3) — (6), (8) — (11).

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \hat{G} \cdot T_1^j = \frac{1}{\Delta t} \hat{G} \cdot T_1^{j-1}; \\ \frac{1}{\Delta t} \hat{G} \cdot T_2^j = \frac{1}{\Delta t} \hat{G} \cdot T_2^{j-1}, \end{cases} \quad (34)$$

де $\Delta t = t^j - t^{j-1}$.

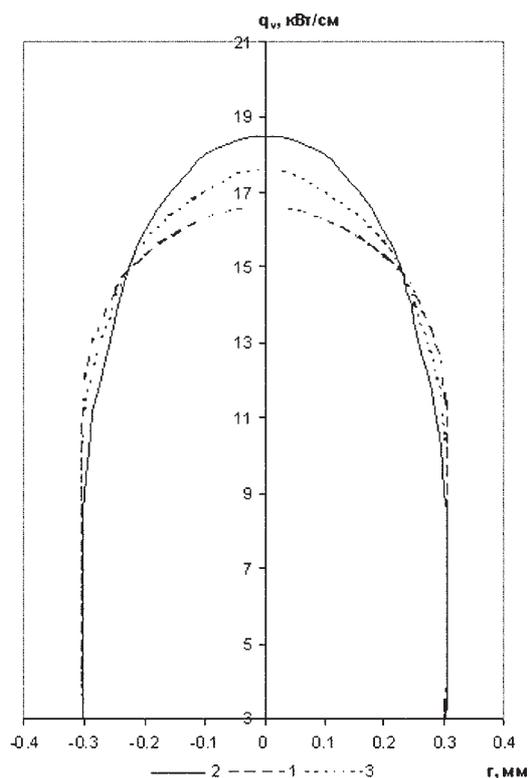


Рис. 4. Розподіл тепловиділення по радіусу ядерного палива

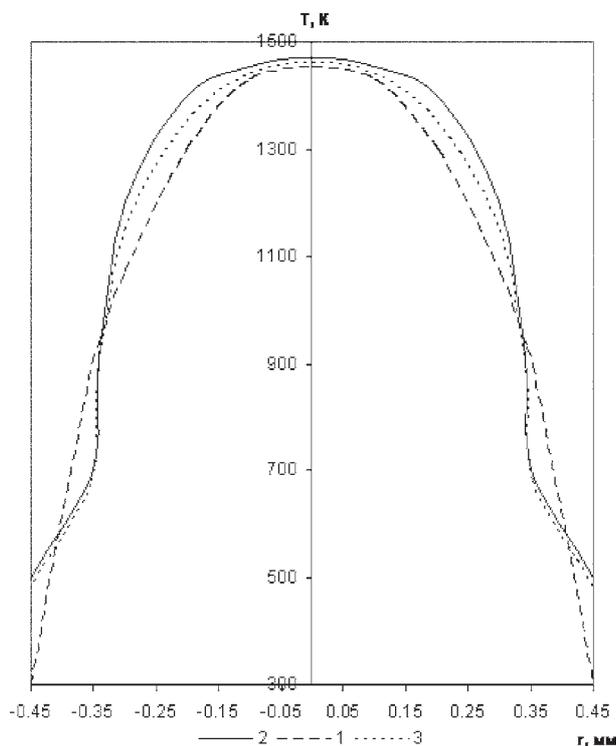


Рис. 5. Розподіл температурного поля в твелі

В усіх теплофізичних розрахунках методом скінченних елементів використані лінійні інтерполювальні поліноми. Системи лінійних рівнянь в МКЕ розв'язувалися методом зв'язаних градієнтів. Ітерації в методі градієнтів закінчувалися в момент, починаючи з якого норма незбіжності досягає рівня помилок округлення. Всі розрахунки проводилися з подвійною точністю.

Результати обговорення

Розрахунок проводився для ТВЗ ядерного реактора типу ВВЕР-1000 (В-320). Оболонка твєлу виготовлена зі сплаву (Zr+1%Nb), її розмір $9,1 \times 0,65$ мм, довжина 3500 мм. Теплофізичні характеристики палива та оболонки бралися з [15–17]. Тиск на виході з активної зони реактора — 15,7 МПа, температура теплоносія на вході в ТВЗ — 563,7 °С, на виході — 593 °С, витрата теплоносія через реактор — 60 м³/год. Розрахунок проводився при роботі реакторної установки на номінальній потужності. Досліджуваний твєл знаходився в центрі активної зони ядерного реактора.

На рис. 4 представлено результати порівняння розрахованого аналітичним методом (1), методом скінченних різниць (2) і методом скінченних елементів (3) розподілу тепловиділення по радіусу ядерного палива.

На рис. 5 наведено порівняльні результати розрахунку температурного поля в ТВЗ, отримані різними методами (умовні позначення такі самі, як на рис. 4). З рис. 5 видно, що основні перепади температури існують у паливній таблетці та в контактному шарі.

На рис. 6 наведено порівняння залежності відносної помилки розрахунку максимальної температури палива різними числовими методами від числа вузлів у сітці.

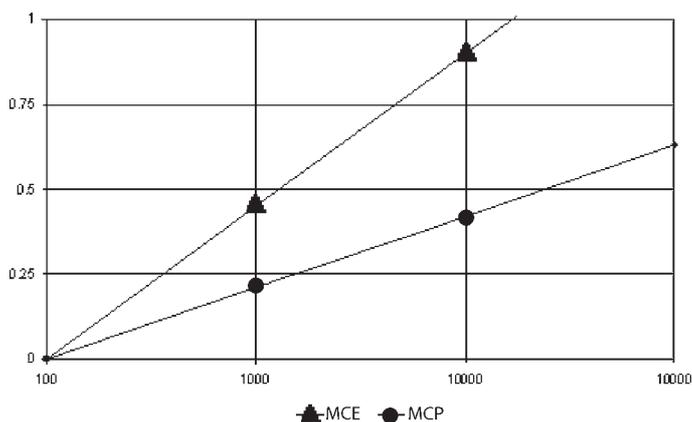


Рис. 6. Залежність відносної помилки розрахунку максимальної температури палива методом скінченних елементів (MCE) та методом скінченних різниць (MCR) від числа вузлів у сітці

Висновки

Проведено дослідження теплофізичних процесів, які мають місце в ТВЗ ядерного реактора, аналітичними та числовими методами (MCE, MCR).

Виконано порівняльний аналіз різних методів розрахунку. Показано, що аналітичний метод є найефективнішим

при незначних змінах теплофізичних параметрів, а при перехідних процесах доцільно застосовувати MCE та MCR.

З розрахункової точки зору числовим методам (MCE та MCR) властиві загальні операції та техніка розбиття границь, представлення апроксимації, техніка перерахунку та розв'язання лінійних рівнянь, розрахункові процедури всередині границь.

Кожен з розглянутих числових методів дозволяє вирішувати вузький клас теплофізичних задач, а в цілому MCE та MCR охоплюють весь спектр розрахунку нестационарних температурних полів.

Простота проектування програмного продукту на базі MCE та MCR засновується на модульному принципі організації побудови програм. Для теплофізичних розрахунків можна використовувати програмні продукти Matlab та Mathcad.

Література

1. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 328 с.
2. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1982. — Ч.1. — 327 с; Ч.2. — 304 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
4. Азаров С. И., Сорокин Г. А., Сорокина Т. В. Расчёт температуры в ТВЭЛе ядерного реактора // Пром. теплотехника. — 2005. — Т.27. — № 5. — С.70–75.
5. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Под ред. Б. С. Петухова. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 412 с.
6. Галин Н. М., Кириллов П. Л. Теплообмен (в ядерной энергетике). — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 378 с.
7. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 472 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 293 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. — Т. 1. — 608 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970. — 720 с.
11. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974. — 544 с.
12. Грантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Госиздат техн.-теор. лит.-ры, 1966. — 204 с.
13. Suzuki M. FEMFXI-III. A computer code for analysis of LWR fuel rod by finite element method, JAERI-M-89. — 1991. — 130 p.
14. Калиткин Н. И. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 360 с.
15. Фрост Б. Твэлы ядерных реакторов: Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 248 с.
16. Ма Б. М. Материалы ядерных энергетических установок: Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 408 с.
17. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. — М.: Атомиздат, 1968. — 130 с.