

# Применение метода начальных параметров к анализу связанных гидромеханических колебаний трубопроводных систем. Сообщение 3. Анализ вынужденных вибраций паропроводов энергоблока ВВЭР-1000

И. В. Орыняк, А. С. Батура, С. А. Радченко, С. М. Агеев

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Проанализированы вынужденные колебания трубопроводных подсистем, вызванные образованием и отрывом в движущемся потоке транспортируемой среды турбулентных вихрей. Частота возбуждения при этом не является некоторым постоянным числом, а может принимать значения из определенного диапазона, что приводит к сложностям и неопределенствам при анализе вибрации трубопроводов. Для решения данной проблемы предложен так называемый энергетический подход, позволяющий определять наиболее физически обусловленные частоты вынужденных колебаний. Суть подхода заключается в поиске таких значений собственных частот и форм гидродинамических колебаний среды, при которых за пределы исследуемой трубопроводной подсистемы выходит минимальная доля энергии, а максимальная остается внутри нее. На тестовых примерах проверена достоверность предложенного подхода. Представленные методы применяются для анализа вынужденных колебаний паропроводов второго контура энергоблока АЭС с реактором ВВЭР-1000, возникших из-за турбулентных вихрей в потоке пара. Найдены собственные частоты и формы механических, гидродинамических и связанных гидромеханических колебаний, выработан ряд рекомендаций по уменьшению уровня вибраций.

**Ключевые слова:** вибрации трубопроводных систем, колебания транспортируемой среды, связанные гидромеханические колебания, турбулентные вихри, паропровод АЭС, энергетический подход.

**Введение.** С практической точки зрения основной целью исследований колебаний трубопроводов на этапе эксплуатации является выявление причин вибрации с последующей разработкой мер по уменьшению ее интенсивности. Известно большое количество литературных источников (например, [1]), посвященных рассмотрению влияния вибрации механической природы (колебания от вращения турбин, насосов и т.п.) на трубопроводные системы. Также разработан ряд эффективных методов моделирования таких колебаний и оценки действующих при этом сил и напряжений.

Однако часто трубопроводные системы изолированы от механических источников вибрации и тем не менее в них наблюдаются значительные амплитуды колебаний. При этом вибрации имеют зачастую локальный характер, т.е. колебания совершают не весь трубопровод, а некая подсистема, а именно: ограниченный участок трубопровода.

Основная причина таких колебаний, как отмечается в ряде литературных источников [2, 3], заключается в возбуждении колебаний в потоке среды, переносимой трубопроводом (жидкость, газ, пар под давлением). На кромках тройниковых элементов, в местах изменения поперечного сечения труб, на неровностях внутренней поверхности трубы в потоке среды образуются турбулентные процессы, отрывные зоны, турбулентные вихри и вихревые жгути.

Вихри вызывают пульсации давления и скорости потока транспортируемой среды, т.е. ее вынужденные гидродинамические колебания, которые могут быть усилены, если частота возбуждения близка к одной из собственных гидродинамических частот колебаний трубопроводной подсистемы. Кроме того, гидродинамические колебания приводят к высвобождению энергии из потока среды [2] и тем самым к дополнительному их усилию. Пульсации давления, обусловленные турбулентными вихрями, воздействуют на трубопроводные элементы как гармонические сосредоточенные силы и вызывают механические колебания трубопровода.

Частота возбуждения гидродинамической вибрации зависит от скорости потока следующим образом:

$$f_h = \frac{SV_m}{D}, \quad (1)$$

где  $V_m$  – скорость потока жидкости;  $D$  – диаметр трубы;  $S$  – число Струхала, характеризующее образование вихрей в потоке жидкости или газа.

На рис. 1 показана зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса [4]. Видно, что число Струхала принимает не единственное значение, а может находиться в некотором диапазоне, причем для определенных чисел Рейнольдса он значительно шире (на рис. 1 штриховые линии).

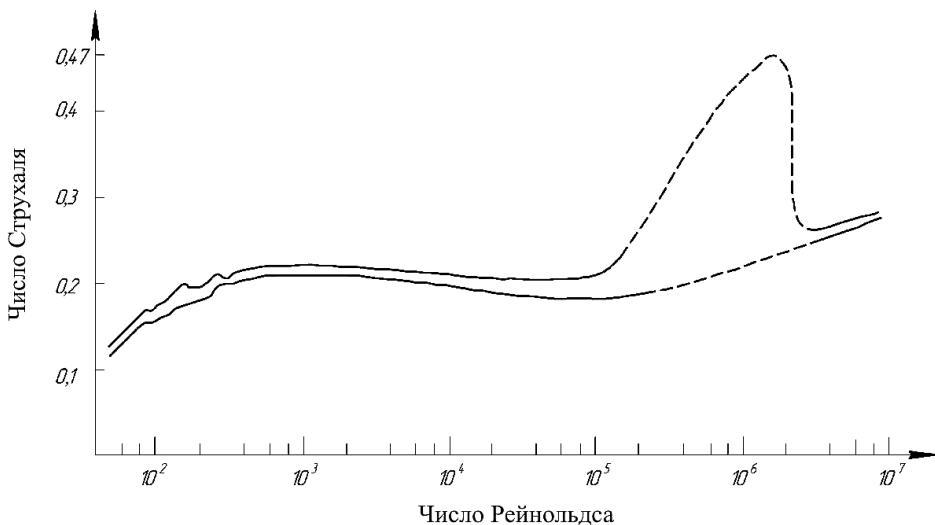


Рис. 1. Зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса.

Таким образом, в потоке среды могут возбуждаться гидродинамические колебания в некотором диапазоне частот, что приводит к неопределенности при анализе вибрации. Поэтому необходимо учитывать не только возможные частоты возбуждения колебаний (например, полученные из (1)), но и конфигурацию трубопроводной подсистемы, которая обуславливает спектр ее собственных гидродинамических частот и отклики на гидродинамическое возбуждение на разных частотах.

Цель данного сообщения заключается в разработке метода поиска частот вынужденных гидродинамических колебаний заданной трубопроводной подсистемы в условиях неопределенности характеристик вынуждающих усилий. Очевидно, что необходимо установить некоторый физический принцип (критерий), с использованием которого можно определить наиболее физически обусловленные частоты колебаний из заданного диапазона.

**Энергетический подход к определению частот гидродинамических колебаний.** При расчетах напряженно-деформированного состояния (НДС) как статических, так и динамических стержневых систем могут использоваться несколько различных вариантов краевых условий, соответствующих свободному концу стержня, концу, опертому на шарнирную опору, жесткому защемлению и т.д. Как было указано в [5], для анализа гидродинамических колебаний также можно использовать следующие краевые условия:

при моделировании сосуда бесконечного объема

$$P_{\text{ср}} = 0, \quad (2)$$

с закрытым концом

$$u_{\text{ср}} = u_{\text{тр}}, \quad (3)$$

где  $P_{\text{ср}}$ ,  $u_{\text{ср}}$  – пульсации давления и смещения среды;  $u_{\text{тр}}$  – параметр продольного смещения трубы.

Для модельных и тестовых задач использование этих условий очевидно, но для реальных трубопроводов краевые условия – сложные и неоднозначные. Например, в [2] исследовались гидродинамические колебания, вызванные турбулентными вихрями в потоке воздуха в подсистеме с двумя прямолинейными ответвлениями, расположенными под разными углами относительно друг друга (рис. 2). При этом подвод и увод воздуха осуществлялись по длинным трубопроводам с кранами, дросселями, глушителями вибрации и прочим оборудованием, т.е. гидродинамические краевые условия подсистемы являются сложными и неоднозначными – неясно, следует ли их описывать выражениями (2) или (3) либо их линейной комбинацией.

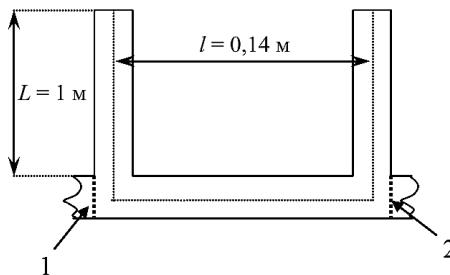


Рис. 2. Тестовая трубопроводная подсистема: 1, 2 – границы модели для расчетов по методу начальных параметров.

На примере показанной на рис. 2 подсистемы сформулируем метод поиска частот вынужденных гидродинамических колебаний для трубопроводных систем с неопределенными краевыми условиями. Здесь граничное сечение 1 можно условно считать “входом” в подсистему, 2 – “выходом”.

Наиболее оптимальным методом поиска частот колебаний, по нашему мнению, является энергетический подход. Его суть заключается в поиске таких форм колебаний и соответствующих им частот, при которых за пределы исследуемой подсистемы выходит минимум энергии, а большая ее часть остается внутри.

Удельная энергия колебания (на единицу длины трубы) в произвольном сечении трубы состоит из двух компонент: кинетической энергии и потенциальной соответственно:

$$W_k = \frac{V^2 \rho_{cp} F}{2} = \frac{u_{cp}^2 \omega^2 \rho_{cp} F}{2}; \quad (4a)$$

$$W_p = \frac{P_{cp}^2 F}{2K_{cp}}, \quad (4b)$$

где  $V$  – амплитуда скорости продольного движения среды в сечении;  $\rho_{cp}$  – плотность среды;  $F$  – внутренняя площадь сечения трубы;  $\omega$  – частота гармонических колебаний;  $K_{cp}$  – объемная упругость.

Выражение для полной удельной энергии в начальном сечении (с индексом 0) трубы будет следующим:

$$W_{cp\ total}^0 = \frac{F}{2} \left( (P_{cp}^0)^2 \frac{1}{K_{cp}} + (u_{cp}^0)^2 \omega^2 \rho_{cp} \right). \quad (5)$$

Из уравнений связи для параметров колебаний среды ((24) в [5]) легко получить, что для произвольного сечения 1 (с индексом 1) трубы значение энергии будет аналогичным. Следовательно, для всех сечений трубы с постоянным внутренним диаметром без ответвлений полная удельная энергия является константой:

$$\begin{aligned} W_{cp\ total} &= \frac{F}{2} \left( (P_{cp}^0)^2 \frac{1}{K_{cp}} + (u_{cp}^0)^2 \omega^2 \rho_{cp} \right) = \\ &= \frac{F}{2} \left( (P_{cp}^1)^2 \frac{1}{K_{cp}} + (u_{cp}^1)^2 \omega^2 \rho_{cp} \right) = \text{const.} \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, можно формализовать задачу нахождения физически обусловленных в соответствии с энергетическим подходом форм и частот колебаний трубопроводной подсистемы. Пусть  $W_{cp}^{b1}$ ,  $W_{cp}^{b2}$ ,  $W_{cp}^{bi}$  – полные энергии на входе в каждое из ответвлений подсистемы (1-, 2-, i-e);  $W_{cp}^1$  и  $W_{cp}^2$  – энергии на входе и выходе в рассматриваемую подсистему. Тогда наиболее физически обусловленными частотами колебаний будут такие, при которых следующий функционал принимает максимальное значение:

$$K = \frac{W_{\text{cp}}^{b1} + W_{\text{cp}}^{b2} + \dots + W_{\text{cp}}^{bi} + \dots}{W_{\text{cp}}^1 + W_{\text{cp}}^2}. \quad (7)$$

На практике можно предложить алгоритм максимизации данного функционала. Строятся формы колебаний (значения смещения среды  $u_{\text{cp}}$  и пульсаций давления  $P_{\text{cp}}$  для каждого сечения) для различных краевых условий и всех частот в исследуемом диапазоне. В нашем примере можно ограничиться двумя формами, которые задаются следующими краевыми условиями:

$$u_{\text{cp}}^1 = 1, \quad u_{\text{cp}}^2 = 0; \quad (8a)$$

$$u_{\text{cp}}^1 = 0, \quad u_{\text{cp}}^2 = 1, \quad (8b)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют входу и выходу рассматриваемой подсистемы (на рис. 2 сечения 1 и 2).

Таким образом, любая форма собственных колебаний будет линейной комбинацией форм (8a) и (8b). Для произвольного  $i$ -го сечения введем понятие “параметризованной энергии”:

$$W_{\text{cp}}^i(\alpha) = F_i^2 \left( (P_i^1 + \alpha P_i^2) \frac{1^2}{K_{\text{cp}}} + (u_{icp}^1 + \alpha u_{icp}^2)^2 \omega^2 \rho_{\text{cp}} \right), \quad (9)$$

где  $\alpha$  – параметр, определяющий результирующую форму колебаний, являющуюся суперпозицией (8a) и (8b).

Подставим выражение (9) в (7) вместо (6) и получим

$$K(\alpha) = \frac{W_{\text{cp}}^{b1}(\alpha) + W_{\text{cp}}^{b2}(\alpha) + \dots + W_{\text{cp}}^{bi}(\alpha) + \dots}{W_{\text{cp}}^1(\alpha) + W_{\text{cp}}^2(\alpha)}. \quad (10)$$

Для каждой частоты  $\omega$  функционал (10) максимизируется по  $\alpha$ , и на основе полученных значений строится график оптимального  $K$  в зависимости от частоты  $\omega$ . Локальные максимумы на этом графике будут соответствовать наиболее физически обусловленным частотам из рассматриваемого диапазона.

Данный алгоритм не является единственным возможным методом максимизации (7). В целом энергетический подход может быть эффективно применен в случаях, когда источник колебаний находится внутри трубопроводной подсистемы, которая колеблется с наибольшей амплитудой.

**Сопоставление результатов расчета по предложенному подходу с экспериментальными данными.** Обоснованность предложенного подхода проверена путем сопоставления полученных данных с приведенными в [2]. Характеристики системы следующие: внутренний диаметр основной трубы  $D = 89$  мм; патрубков  $d = 51$  мм; длина патрубков  $L = 1$  м; расстояние между

центральными осями патрубков  $l = 0,14$  м. Среда – воздух при нормальных условиях.

На рис. 3 представлены соотношение энергий  $K$  такой подсистемы, собственные частоты колебаний, полученные экспериментально, при краевых условиях (2), (3) и с помощью приближенной формулы

$$\omega_m = 2\pi \frac{(2m-1)V_{cp}}{4(L + l/2)}, \quad (11)$$

где  $m$  – номер собственной частоты.

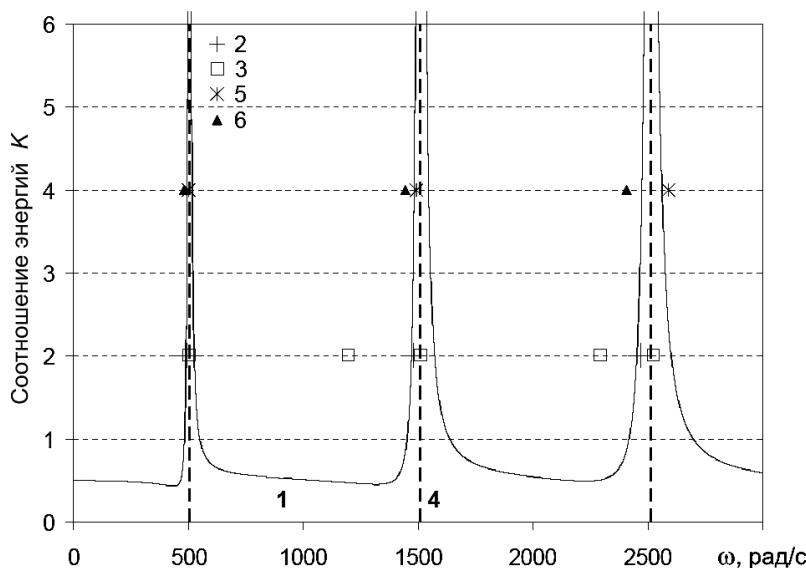


Рис. 3. Результаты расчетов для тестового примера: 1 – соотношение энергий  $K$ ; 2, 3 – собственные частоты колебаний при краевых условиях (2) и (3) соответственно; 4 – частоты на основе энергетического подхода; 5 – экспериментальные данные; 6 – теоретическая оценка по (11).

Полученные с использованием предложенного подхода частоты близки к экспериментальным из [2], а теоретическое приближение (11) дает их заниженные значения. Судя по всему, формула (11) учитывает лишь общую длину  $2L + l$  патрубков и перемычки между ними, а разница поперечного сечения и возможный выход колебаний за данную подсистему не учитываются. Таким образом, (11) можно использовать для приблизительной оценки частот колебаний относительно простых трубопроводных подсистем (см., например, рис. 2).

Как видно из рис. 3, для данной симметричной конфигурации системы “энергетические” частоты близки к нечетным собственным частотам, получаемым при краевых условиях (3).

Ниже показано применение описанных методов моделирования гармонических колебаний трубопроводов на примере анализа колебаний паропроводов АЭС.

**Вибрации паропроводов второго контура реактора ВВЭР-1000.** Система паропроводов АЭС с реактором ВВЭР-1000 расположена в помещении А-820 и включает в себя четыре (TX50, TX60, TX70, TX80) ветки, идущие от парогенераторов (ПГ-1, ПГ-2, ПГ-3, ПГ-4) к турбинам (рис. 4). Каждая ветка содержит участок с тремя вертикальными торообразными ответвлениями, служащими для аварийного сброса давления пара. В верхней части тонов находятся массивные предохранительные клапаны.

Паропроводы закреплены с помощью пружинных подвесок и скользящих опор, предохранительные клапаны жестко крепятся на опорных металлоконструкциях. С механической точки зрения эта система изолирована, так как ее начало и конец жестко зафиксированы в массивных железобетонных стенах.

Тем не менее на ряде энергоблоков наблюдаются существенные вибрации паропроводов, особенно трехтрубовой подсистемы. В связи с этим на одном из энергоблоков ВВЭР-1000 сотрудниками Института проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины проведен следующий комплекс работ.

Измерены виброускорения точек паропроводов, определены спектр частот и выброскорости точек.

Построена математическая модель и проведены расчеты статического НДС трубопроводов.

Определены собственные механические и гидродинамические частоты и формы колебаний паропроводов.

Промоделированы связанные гидромеханические колебания, определены амплитуды пульсаций давления и сил в трубопроводах.

Дан ряд рекомендаций по уменьшению уровня вибраций.

**Результаты замеров амплитуд вибрации.** Амплитуды колебаний измеряли с помощью созданного в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины измерительного комплекса, состоящего из датчиков ускорения, усилителя сигнала, аналого-цифрового преобразователя и ЭВМ для записи результатов измерений.

Одновременно снимая и записывая данные с трех датчиков, можно измерять виброускорения по всем координатным осям.

Создана также компьютерная программа, позволяющая определять вибрационные скорости и перемещения по вибрационным ускорениям, а также спектр частот колебаний. В ее основе лежит разложение полученной зависимости ускорение–время в ряд Фурье с последующим аналитическим интегрированием ряда для построения зависимостей скорость–время и перемещение–время.

Измерения проводили на всех четырех ветках при работе энергоблока на 90 и 100% мощности, при этом получены следующие результаты.

Наибольшие амплитуды колебаний (27 мм/с) зафиксированы на первом “торе” ветки TX60 на частоте 40,33 Гц при работе блока на 90% мощности, при работе на 100% мощности значения уменьшаются до 12,3 мм/с, зафиксированы частоты 44,7 и 32 Гц.

Ветка TX50 имеет основную частоту на уровне 64 Гц, TX70 и TX80 – на уровне 44 Гц, при этом уровень вибрации ветки TX80 (25 мм/с) значительно выше уровня вибраций веток TX50 и TX70 (5 мм/с).

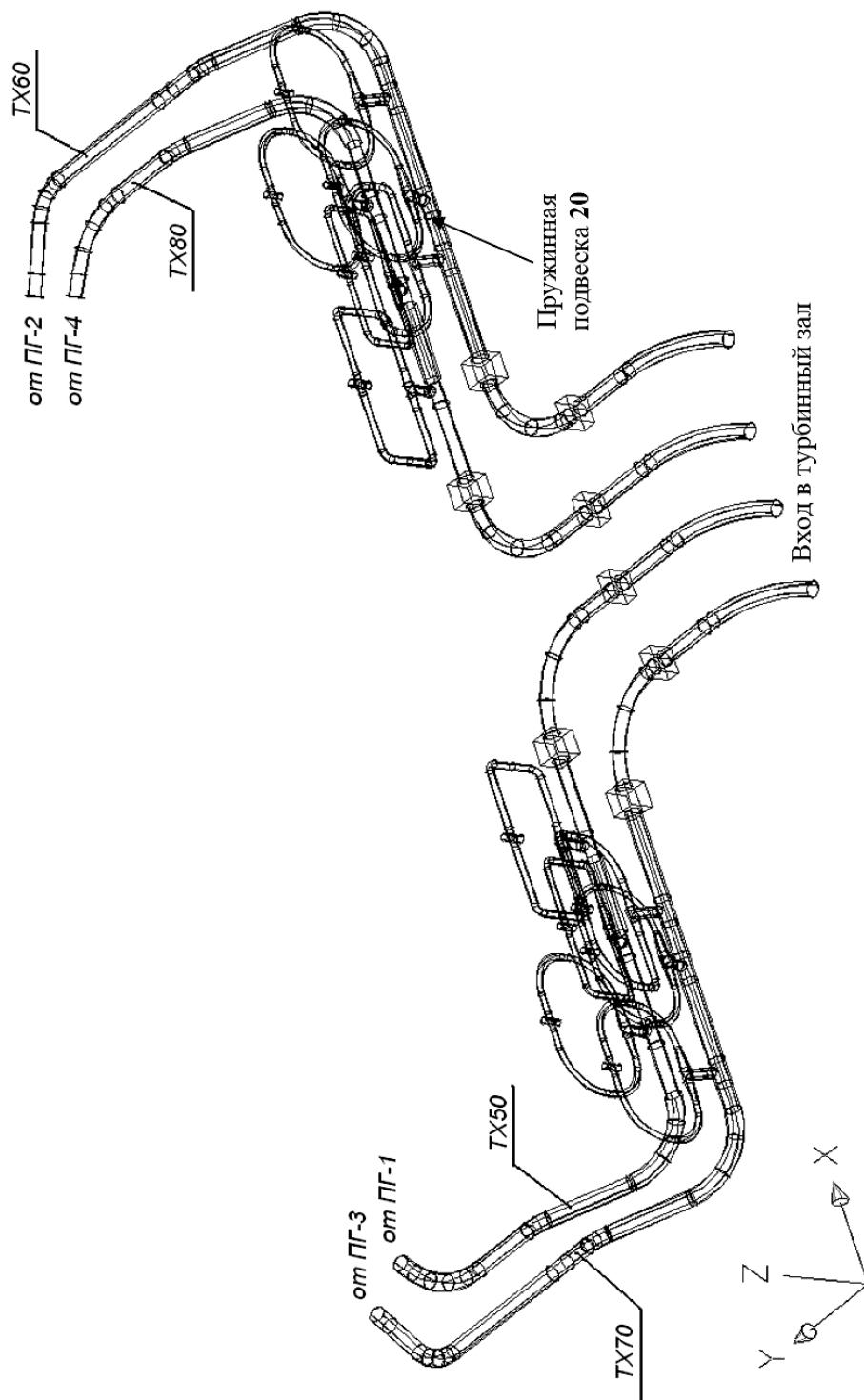


Рис. 4. Система паропроводов АЭС с реактором ВВЭР-1000.

Основные частоты колебаний металлоконструкций, в том числе мест креплений предохранительных клапанов, составляют 44 и 40 Гц.

Полученные данные показывают, что имеет место переход колебаний с ветки на ветку через металлоконструкции, которые также колеблются на частотах торообразных участков. Изменения интенсивности вибраций и частоты с увеличением мощности работы энергоблока свидетельствуют о гидродинамической природе источника колебаний паропроводов.

**Расчет статического НДС трубопровода, собственных частот колебаний трубопровода и пара.** Расчеты проводили с использованием версии метода начальных параметров, реализованного в компьютерном комплексе “3D PipeMaster” [6–8]. В результате статических расчетов напряжений с учетом внутреннего давления, собственного веса и температурного расширения получены значения, которые удовлетворяют условиям прочности в соответствии с [9]:

165 МПа в первом торе и 170 МПа в заделке (на входе в турбинный зал) для ветки TX50;

203 МПа в первом торе и 156 МПа в заделке для TX60;

188 МПа в первом торе и 131 МПа в заделке для TX70;

224 МПа в первом торе и 193 МПа в заделке для TX80.

Установлено, что центральная точка паропроводов не смещается при температурном расширении труб. Это позволяет в случае необходимости заменить пружинную подвеску 20 (рис. 4) на жесткую по перемещению опору.

На рис. 5 представлены результаты поиска собственных частот механических колебаний всех веток паропроводов и измеренные частоты колебаний.

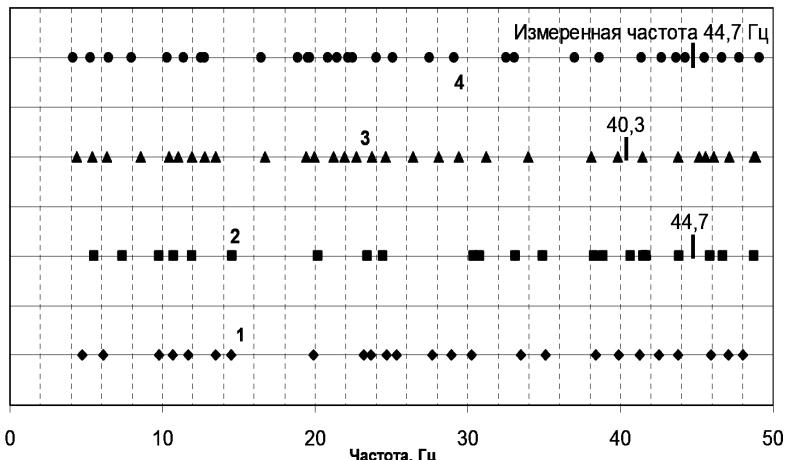


Рис. 5. Собственные частоты механических колебаний веток паропроводов TX50 (1), TX80 (2), TX60 (3) и TX70 (4).

Для определения собственных частот колебаний пара использовали следующие его параметры:  $\rho_{cp} = 34,5 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $K_{cp} = 8,32 \text{ МПа}$ ; значение скорости звука при этом будет 491 м/с. На рис. 6 приведены собственные гидродинамические частоты колебаний пара для веток TX60, TX50, при расчетах использовали краевые условия (2).

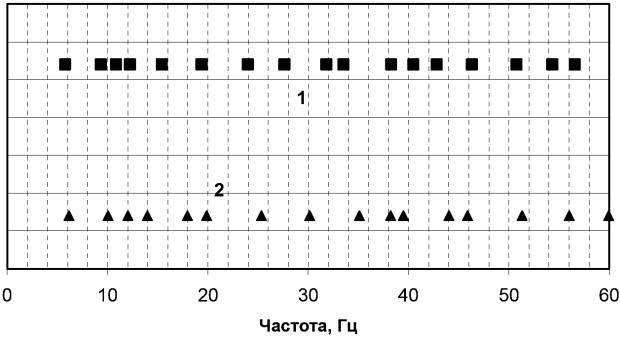


Рис. 6. Гидродинамические частоты колебаний веток паропроводов TX60 (1) и TX50 (2).

Результаты расчетов показывают, что в диапазоне 0...60 Гц существует большое число собственных частот колебаний как механических, так и гидродинамических, причем из анализа собственных форм видно, что они являются физически обоснованными. Это свидетельствует о том, что отстройка от резонанса в соответствии с правилами [9] практически неосуществима.

Поскольку амплитуды колебаний “трехторовых” подучастков существенно выше амплитуд основных труб, целесообразно применить предложенный энергетический подход. Для ветки TX60 на рис. 7 показана зависимость  $K$  от частоты колебаний после оптимизации по  $\alpha$ . Видно, что энергетически обусловленными являются частоты 40,3; 58,7; 66,1; 69,7 Гц, при этом частоте 40,3 Гц соответствует максимальный пик на графике, что согласуется с данными измерений.

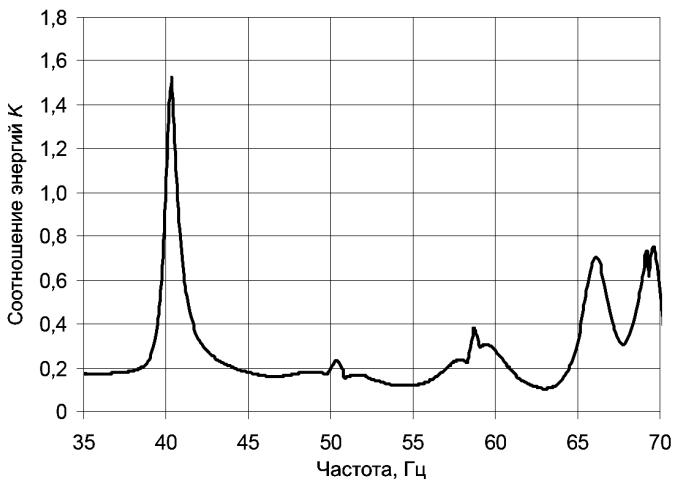


Рис. 7. Энергетическое соотношение энергий  $K$  в зависимости от частоты колебаний для ветки паропровода TX60.

**Моделирование связанных гидромеханических колебаний.** Поскольку частота гидродинамических колебаний 40,3 Гц в соответствии с энергетическим подходом является физически обоснованной для ветки TX60 и отвечает данным измерений, целесообразно проводить моделирование вынужденных связанных гидромеханических колебаний на этой частоте при возбуждении

амплитудой смещения пара. С учетом замеренных амплитуд вибрационных перемещений основной трубы (0,024 мм) получены такие значения амплитуд давления пара:

$$p_{\text{cp}}^1 = 27 \text{ кПа} \text{ (для торообразных участков);}$$

$$p_{\text{cp}}^2 = 12 \text{ кПа} \text{ (для основной трубы).}$$

Определенные по описанной процедуре амплитуды пульсаций давления соответствуют усилию в центрах гибов  $N = 2P_{\text{cp}}\pi R^2 \sin 45^\circ$  и составляют  $N^1 = 460 \text{ кг}$  для торообразных участков и  $N^2 = 180 \text{ кг}$  для основной трубы.

Рассчитанные реальные амплитуды смещений пара в десятки раз больше, чем перемещения трубы:  $u_{\text{cp}}^1 = 7,6 \text{ мм}$  для торообразных участков и  $u_{\text{cp}}^2 = 3 \text{ мм}$  для основной трубы.

Таким образом, для данных паропроводов можно использовать не полную модель связанных колебаний, когда среда и труба оказывают взаимное влияние друг на друга, а частичную, когда смещение трубы не оказывает влияния на колебания среды.

Проведенный анализ подтвердил гипотезу о турбулентных вихрях как основной причине вибрации паропроводов, что позволило разработать следующие рекомендации для уменьшения уровня вибрации.

1. После расчетов на сейсмопрочность заменить пружинную подвеску 20 направляющей опорой.
2. Повысить жесткость пружинных подвесок.
3. Увеличить жесткость крепления предохранительных клапанов и всех металлоконструкций.

К настоящему времени на исследуемом энергоблоке ВВЭР-1000 осуществлена последняя рекомендация: с помощью конструкций типа "ферма" усилены поддерживающие металлоконструкции, что позволяет снизить виброскорости в три и более раз.

## Выводы

1. Для анализа связанных гидромеханических колебаний, вызванных образованием турбулентных вихрей в потоке жидкости или газа, предложен оригинальный энергетический подход.

2. На примере вибрации паропроводов энергоблока с реактором ВВЭР-1000 показаны возможности методов анализа гармонических механических, гидродинамических и связанных гидромеханических колебаний.

## Резюме

Проаналізовано вимушенні коливання трубопровідних підсистем, що зумовлені утворенням і відривом турбулентних вихорів у потоці речовини, що транспортується. При таких процесах частота збудження не є деяким постійним числом, а може приймати значення з певного діапазону, що призводить до складнощів і невизначеності при аналізі вібрації трубопроводів. Для вирішення цієї проблеми запропоновано так званий енергетичний підхід, що дозволяє визначати найбільш фізично зумовлені частоти вимушених коли-

вань. Суть підходу полягає в пошуку таких значень власних частот і форм гідродинамічних коливань середовища, за яких за межі досліджуваної трубопровідної підсистеми виходить мінімальна доля енергії, а найбільша лишається всередині підсистеми. На тестових прикладах перевірено достовірність такого підходу. Представлені методи використовуються для аналізу вимушених коливань паропроводів другого контуру енергоблоку АЕС з реактором типу ВВЕР-1000, зумовлених утворенням турбулентних вихорів у потоці пара. Визначено власні частоти і форми механічних, гідродинамічних та зв'язаних гідромеханічних коливань, розроблено ряд рекомендацій щодо зменшення рівня вібрацій.

1. Орінняк И. В., Батура А. С., Радченко С. А. Применение метода начальных параметров к анализу связанных гидромеханических колебаний трубопроводных систем. Сообщ. 1. Вибродиагностика трубопроводов при механических колебаниях // Пробл. прочности. – 2011. – № 6. – С. 58 – 70.
2. Ziada S. and Buehlmann E. T. Self-excited resonances of two-side branches in close proximity // J. Fluids Struct. – 1992. – 6. – P. 583 – 601.
3. Seligman D. and Guillou J. Flow induced vibration in a PWR piping system // Trans. 13th SMIRT (August 13–18). – Porto Alegre, Brazil, 1995.
4. Hall S. A. Vortex-Induced Vibrations of Structures: Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy / California Institute of Technology. – California, 1981. – 12 p.
5. Орінняк И. В., Батура А. С., Дубик Я. Р. Применение метода начальных параметров к анализу связанных гидромеханических колебаний трубопроводных систем. Сообщ. 2. Собственные частоты и формы связанных гидромеханических колебаний среды, транспортируемой трубопроводами // Пробл. прочности. – 2012. – № 1. – С. 14 – 29.
6. Орінняк И. В., Тороп В. М., Ромашенко В. А., Жураховский С. В. Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС // Там же. – 1998. – № 2. – С. 87 – 100.
7. Орінняк И. В., Радченко С. А., Батура А. С. Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщ. 1. Анализ колебаний пространственной стержневой системы // Там же. – 2007. – № 1. – С. 79 – 93.
8. Орінняк И. В., Радченко С. А., Батура А. С. Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщ. 2. Динамическая жесткость гиба трубы // Там же. – № 2. – С. 52 – 71.
9. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – Введ. 01.07.87.

Поступила 23. 06. 2011