

УДК 539.3:534.1:621.3.084

# МЕТОД П'ЄЗОТРАНСФОРМАТОРНОГО ДАТЧИКА В ЗАДАЧАХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ДИСКІВ

В. Л. КАРЛАШ

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Одержано 20.01.2004 ◊ Переглянуто 10.03.2004

Роботу присвячено аналітичному та експериментальному дослідженню компонентів динамічних механічних напружень при резонансних коливаннях тонких п'єзокерамічних дисків з товщиною поляризацією. Запропоновано прямий метод експериментального визначення планарного коефіцієнта електромеханічного зв'язку.

Работа посвящена аналитическому и экспериментальному исследованию компонент динамических механических напряжений при резонансных колебаниях тонких пьезокерамических дисков с толщиной поляризации. Предложен прямой метод экспериментального определения планарного коэффициента электромеханической связи.

The paper is devoted to analytical and experimental study of dynamical mechanical stress components at resonant vibrations of thin piezoceramic disks with thickness polarizations. A direct method for experimental determination of planar electromechanical coupling factor is proposed.

## ВСТУП

Тонкі п'єзокерамічні пластини з електродним покриттям на головних поверхнях і товщиною поляризацією широко використовуються у різних пристроях електроакустики [1–17]. Радіальні резонансні коливання тонких п'єзокерамічних круглих дисків досліджувалися багатьма авторами, зокрема в [3, 4, 7–9, 14, 16, 18–29]. Такі коливання характеризуються моночастотністю – обертони віддалені по частоті від основного резонансу в кілька разів. Окрім того, спостерігаються велика інтенсивність електромеханічних коливань на основному резонансі та добре виражена залежність характеристичних частот від коефіцієнта Пуассона. Завдяки цьому значення резонансних частот радіальних коливань та їхні відношення широко використовуються для експериментального визначення кількох важливих параметрів п'єзокераміки згідно зі стандартами [1, 30].

У більшості випадків експериментальні дослідження електромеханічних резонансних коливань п'єзокерамічних елементів зводяться до вимірювання резонансних і антирезонансних частот, відповідних до них повних провідностей. На основі одержаних даних розраховуються так звані динамічні коефіцієнти електромеханічного зв'язку, які характеризують здатність перетворювати енергію з електричної форми в механічну і навпаки. Безпосереднє вимірювання амплітуд коливань точок поверхні п'єзокерамічних елементів при резонансних коливаннях пов'язане зі значними труднощами. Так, у статті [31] для спостереження електро-

механічних полів у кварцових пластинках застосовували електронний мікроскоп. У монографії [6], де видовження п'єзокерамічних зразків під впливом статичних електричних полів вимірювалося з використанням інтерферометра Майкельсона, відзначено, що до напруги 1 кВ одержані результати були дуже нестабільними. Автори робіт [10, 32, 33] користувалися методом ємнісного зонду, вимірюючи за його допомогою амплітуду зміщень торця закріпленої у вузлових точках п'єзокерамічної пластини при її резонансних коливаннях. За одержаною амплітудою зміщень торця аналітично розраховувалися рівні механічних напружень у місцях їхніх концентрацій.

Зауважимо, що малість лінійних розмірів серійних п'єзокерамічних елементів (діаметри круглих пластин лежать у межах  $100 \div 2$  мм) практично унеможливує застосування відомого апарату резистивних тензодатчиків [2].

Оригінальний ефективний метод експериментальних досліджень напруженого стану п'єзокерамічних елементів конструкцій при резонансних коливаннях було запропоновано у статті [21] і розвинуто в роботах [2, 34–37]. Його суть зводиться до того, що в електродному покритті однієї з головних поверхонь п'єзокерамічної пластини відділяється один або кілька ізолюваних один від одного і від основного електродного покриття електродів-датчиків, розміри яких є малими у порівнянні з довжиною хвилі механічних деформацій. При резонансних коливаннях п'єзокерамічної пластинки або оболонки, які збуджуються прикладеним до основних електродів зовнішнім електричним по-

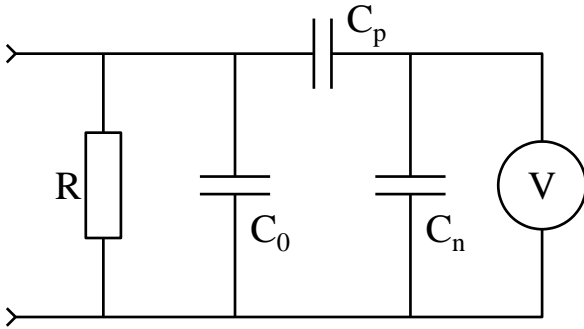


Рис. 1. Еквівалентна електрична схема п'єзотрансформаторного датчика

лем, на відділених електродах завдяки прямому п'єзоелектричному ефектові наводяться певні електричні заряди, амплітуди яких прямо пропорційні до суми головних механічних напружень, усереднених по їхній площі. Між основним електродним покриттям та відділеними електродами виникає різниця електричних потенціалів. Кожний відділений електрод виконує роль своєрідного мініатюрного п'єзотрансформатора. Саме цим пояснюється назва методу – метод п'єзотрансформаторного датчика.

При аналітичному дослідженні радіальних коливань п'єзокерамічних дисків із суцільними та розділеними електродами у більшості публікацій втрати енергії до уваги не беруться, а за умови резонансу й антирезонансу приймається рівність повної провідності безмежності або нулевій відповідно. Уперше спробу врахувати механічні втрати енергії для розрахунку динамічних напружень у центрі п'єзокерамічного диска здійснено в роботі [25]. На жаль, її автор припустився прикрої помилки при розкладі в ряди функцій Бесселя, обмежившись першими членами. Результатом цього стало зростання розрахованих динамічних напружень на обертонах радіальних коливань, чого не спостерігається в експерименті. Точніший розв'язок був використаний у статті [23] при опрацюванні методики визначення параметрів механічних та п'єзоелектричних втрат енергії.

Цю роботу присвячено аналітичному й експериментальному дослідженню компонентів динамічних механічних напружень при резонансних коливаннях тонких п'єзокерамічних дисків з товщиною поляризацією. Також пропонується прямий метод експериментального визначення планарного коефіцієнта електромеханічного зв'язку.

### 1. ЗВ'ЯЗОК ВИМІРЯНОГО ПОТЕНЦІАЛУ П'ЄЗОТРАНСФОРМАТОРНОГО ДАТЧИКА З МЕХАНІЧНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

У роботах [2,34] відзначено, що кожний відділений від основного електродного покриття датчик можна розглядати, як електричний конденсатор, який має по відношенню до оточуючого і протилежного основних електродів ємності  $C_p$  і  $C_n$ , котрі додаються до вхідної ємності вольтметра  $C_V$  і становлять сумарну ємність вимірювального кола. Еквівалентна електрична схема (рис. 1) ілюструє цей підхід. Ємність між основними електродами  $C_0$  у сотні разів більша від сумарної ємності  $C_p + C_n + C_V$  вимірювального кола, а резистор  $R$  позначає резонансний імпеданс п'єзокерамічного зразка.

Електричний потенціал п'єзотрансформаторного датчика, який вимірюється приєднаним до нього вольтметром, є комплексною сумою двох складових – ємнісного наведення від оточуючого електродного покриття через ємність  $C_p$  та потенціалу прямого п'єзо ефекту внаслідок внутрішніх механічних деформацій. Якби не було механічних коливань, або ці коливання були незначними (низькі частоти), то потенціал датчика  $U_c$  визначався б коефіцієнтом передачі ємнісного діляника:

$$U_c = \frac{C_p}{C_p + C_n + C_V} U_1. \quad (1)$$

З іншого боку, якби не було ємнісного наведення ( $C_p = 0$ ), то потенціал датчика визначався б лише зарядом прямого п'єзо ефекту. Для тонкостінних п'єзо елементів розподіл механічних напружень по товщині підкоряється гіпотезам Кіргофа – Лява, що дозволяє записати рівняння стану для електричної індукції [24, 38]:

$$D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2)$$

Інтегруючи це рівняння по площі плями  $S_t$ , одержимо вираз для повного п'єзозаряду датчика  $Q_t$ :

$$Q_t = \int_{S_t} D_z ds = d_{31}(\sigma_x + \sigma_y) S_t + \varepsilon_{33}^T \int_{S_t} E_z ds. \quad (3)$$

Вважаючи, що активна складова вхідної провідності вольтметра набагато нижча від ємнісної, можна визначити струм у колі п'єзотрансформаторного датчика. Він дорівнює першій похідній у часі від повного п'єзозаряду:

$$j\omega d_{31}(\sigma_x + \sigma_y) S_t + j\omega(C_p + C_n + C_V) V_2 = 0. \quad (4)$$

Таким чином, між виміряною різницею потенціалів  $V_2$  та сумою головних напружень  $\sigma_x + \sigma_y$  існує

простий зв'язок:

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{V_2}{d_{31}S_t} (C_p + C_n + C_\nu). \quad (5)$$

Багаторічний досвід автора показує, що рівень ємнісного наведення становить від 20 до 50 % від напруги збудження, тоді як сумарний потенціал п'єзотрансформаторного датчика на резонансних частотах перевищує напругу збудження від кількох до кільканадцяти разів. Це означає, що на практиці у багатьох випадках ємнісними наведеннями можна нехтувати.

У роботі [37] одержані більш загальні співвідношення, які враховують фазові зсуви між сумою головних напружень і вимірним потенціалом датчика. Позначивши через  $\eta$  зсув фаз між сумою головних напружень ( $\sigma_r + \sigma_\theta$ ) і вхідним потенціалом  $\phi_1$ , а через  $\xi$  – між вимірним потенціалом  $\phi_3$  та підведеним  $\phi_1$ ,

$$(\sigma_r + \sigma_\theta) = |\sigma_r + \sigma_\theta| e^{j\eta}, \quad \phi_3 = |\phi_3| e^{j\xi}, \quad (6)$$

одержуємо

$$|\phi_3| = \frac{d_{31}\pi b^2 |\sigma_r + \sigma_\theta|}{C_\Sigma} \times \left[ 1 + \frac{C_p \phi_1}{d_{31}\pi b^2 |\sigma_r + \sigma_\theta|} \times \left( 2 \cos \eta + \frac{C_p \phi_1}{d_{31}\pi b^2 |\sigma_r + \sigma_\theta|} \right) \right]^{1/2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\sin \eta}{\cos \eta + C_p \phi_1 / d_{31}\pi b^2 |\sigma_r + \sigma_\theta|},$$

$$|\sigma_r + \sigma_\theta| = \frac{C_\Sigma |\phi_3|}{d_{31}\pi b^2} \times \left[ 1 - \frac{C_p \phi_1}{C_\Sigma |\phi_3|} \left( 2 \cos \xi - \frac{C_p \phi_1}{C_\Sigma |\phi_3|} \right) \right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\sin \xi}{\cos \xi - C_p \phi_1 / C_\Sigma |\phi_3|}.$$

Виміривши амплітуду й фазу потенціалу п'єзотрансформаторного датчика, можна по формулах (8) вирахувати амплітуду й фазу суми головних механічних напружень. У прикладі такої процедури, наведеному в роботі [21], кругла пластинка із п'єзокераміки ЦТС-19 мала діаметр 6 мм при товщині 2.4 мм. Вздовж радіуса пластинки рівномірно наносились п'єзотрансформаторні датчики по 1.5 мм в діаметрі кожний. Перед відділенням датчиків від основного електрода

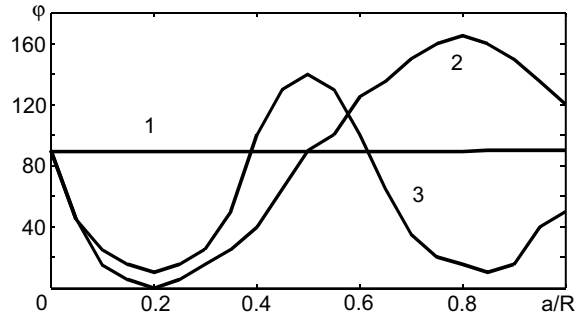


Рис. 2. Фазові зсуви між сумою головних напружень і вимірним потенціалом датчика

за стандартною методикою [1, 30] визначався п'єзомодуль  $d_{31} = 120 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н. Ємність вимірювального кола була  $C_\Sigma = 50 \cdot 10^{-12}$  Ф, а радіальна ємність –  $C_p = 10 \cdot 10^{-12}$  Ф. У табл. 1 дано вимірні значення амплітуди  $|\phi_3|$  і фази  $\xi$  потенціалу для відповідних ділянок пластинки, а також розраховані за формулами (8) амплітуди  $|\sigma_r + \sigma_\theta|$  і фази  $\eta$  суми головних напружень для основної радіальної моди.

Фазові зсуви вимірювалися з використанням методу фігур Ліссажу. До основних електродів пластинки через резисторний дільник напруги підводилася змінна електрична напруга 0.1 В від генератора ГЗ-56/1. Одночасно ця напруга подавалася на X-вхід електронного осцилоскопа С1-5, на Y-вхід якого живився вимірною напругою одного з датчиків. Підсилення в каналах осцилоскопа підбиралося так, щоб на його екрані з'являлося зображення найпростішої з фігур Ліссажу – еліпса. За відношенням його осей і визначалися фазові зсуви. Той факт, що на основному радіальному резонансі ці зсуви дещо перевищують  $90^\circ$ , вочевидь, є наслідком того, що дослідження велися на частоті максимальної амплітуди вимірюного потенціалу центрального датчика, яка є векторною сумою наведення і прямого п'єзоефекту. Більш ретельне настроювання генератора на резонанс усунуло цю розбіжність і фазові зсуви на основній радіальній моді наблизилися до  $90^\circ$  (рис. 2, крива 1). На обертонах фаза вимірюного потенціалу змінюється вздовж радіуса від точки до точки. Фаза коливань на першому обертоні (крива 2) поступово зменшується від  $90^\circ$  у центрі пластини до  $0^\circ$  на чверті радіуса, знову досягає  $90^\circ$  посередині, зростає майже до  $180^\circ$  на трьох чвертях радіуса і прямує до  $90^\circ$  при наближенні до краю.

Подібні зміни фазових зсувів мають місце й на другому обертоні (крива 3). Водночас, у центрі пластинки фазові зсуви між підведеним та вимі-

Табл. 1. Амплітуди і фази потенціалів та суми головних напружень у кількох точках круглої пластинки на основному радіальному резонансі

$r/R$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$ \phi_3 , \text{В}$	0.3	0.28	0.25	0.18	0.12	0.05
$\xi, ^\circ$	115	115	115	115	110	90
$ \sigma_r + \sigma_\theta  \cdot 10^{-4} \text{Па}$	8.5	8.0	7.2	5.2	3.5	1.5
$\eta, ^\circ$	114	114	114	116	119	86

ряним потенціалами для всіх трьох мод однакові де й дорівнюють  $90^\circ$ .

## 2. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ П'ЄЗО-ТРАНСФОРМАТОРНОГО ДАТЧИКА ПРИ ВИЗНАЧЕННІ СКЛАДОВИХ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ З РАДІАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

У роботі [23] для повної провідності тонкої круглої в'язкопружної п'єзопластинки (тут і далі всі позначення запозичені з неї) з урахуванням тангенсів механічних  $s_{11m}$ , діелектричних  $\epsilon_{33m}$  і п'єзоелектричних  $d_{31m}$  втрат [11, 15] одержано такий вираз:

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{j\omega C_0(1 - j\epsilon_{33M})}{\Delta^2(\kappa_0) + 0.25\kappa_0^2 s_{11M}^2 \beta^2} \times \\
 &\times \left\{ [\Delta(\kappa_0)\Delta_a(\kappa_0) + 0.25s_{11M}^2 \beta \kappa_0^2 \delta + \right. \\
 &+ \kappa_0 s_{11M} d_{31M} \beta \Delta_a(\kappa_0) + 0.5s_{11M} \times \\
 &\times (s_{11M} + \epsilon_{33M} - 2d_{31M}) \kappa_0 \beta \Delta(\kappa_0)] - \\
 &- j[(s_{11M} + \epsilon_{33M} - 2d_{31M}) \Delta^2(\kappa_0) + \\
 &+ 2d_{31M} \Delta(\kappa_0)\Delta_a(\kappa_0) + 0.5s_{11M} \kappa_0 \times \\
 &\times (\delta \Delta(\kappa_0) - \beta \Delta_a(\kappa_0))] \left. \right\} = \frac{\omega C_0}{D_0} \times \\
 &\times [(A_1 + \epsilon_{33M} A_2) + j(A_2 - \epsilon_{33M} A_1)] = \\
 &= \omega C_0 (B_1 + jB_2),
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta_a(\kappa_0) = (1 - k_{p0}^2) \Delta(\kappa_0) + k_{p0}^2 (1 + \nu) J_1(\kappa_0);$$

$$\gamma = [\kappa_0 J_0(\kappa_0) - J_1(\kappa_0)] / \kappa_0;$$

$$\delta = (1 + k_{p0}^2) \beta + k_{p0}^2 (1 + \nu) \gamma; \tag{10}$$

$$B_1 = (A_1 + \epsilon_{33M} A_2) / D_0;$$

$$B_2 = (A_2 - \epsilon_{33M} A_1) / D_0;$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (s_{11M} + \epsilon_{33M} - 2d_{31M}) \Delta^2(\kappa_0) + \\
 &+ 2d_{31M} \Delta(\kappa_0) \Delta_a(\kappa_0) + 0.5s_{11M} \kappa_0 \times \\
 &\times [\delta \Delta(\kappa_0) - \beta \Delta_a(\kappa_0)];
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \Delta(\kappa_0) \Delta_a(\kappa_0) + 0.25s_{11M}^2 \beta \kappa_0^2 \delta + \\
 &+ \kappa_0 s_{11M} d_{31M} \beta \Delta_a(\kappa_0) + 0.5s_{11M} \times \\
 &\times (s_{11M} + \epsilon_{33M} - 2d_{31M}) \kappa_0 \beta \Delta(\kappa_0);
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$D_0 = \Delta^2(\kappa_0) + 0.25\kappa_0^2 s_{11M}^2 \beta^2; \tag{13}$$

$$\kappa = \kappa_0 - j\kappa_1; \quad \kappa_1 = 0.5\kappa_0 s_{11m};$$

$$(1 - \nu^E) J_1(\kappa) - \kappa J_0(\kappa) = \Delta(\kappa);$$

$$\kappa^2 = \omega^2 \rho s_{11}^E (1 - \nu) R^2; \quad C = \frac{\epsilon_{33}^T \pi R^2}{h}. \tag{14}$$

Зауважимо, що механічні, діелектричні та п'єзоелектричні втрати в сучасній п'єзокераміці низькі – вони лежать у межах  $0.001 \div 0.02$ . Зміни характеристик частот під впливом таких втрат мають бути незначними, тому можна вважати, що умови резонансу

$$\Delta(\kappa_r) = 0 \tag{15}$$

і антирезонансу

$$\Delta_a(\kappa_a) = 0, \quad (16)$$

введені при розв'язанні задач про радіальні коливання тонкого п'єзокерамічного диска без втрат [19, 22, 24, 28], на практиці зберігаються. Вплив коефіцієнта Пуассона на множники провідності поблизу першого радіального резонансу можна простежити за табл. 2. Тут індекс  $m$  відповідає максимальним, а  $n$  – мінімальним величинам. Розрахунки проводилися при таких вихідних даних:  $k_{p0}^2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_{33M} = 0.012$ ,  $s_{11M} = 0.084$ . Ці параметри були виміряні на диску з діаметром 60 мм і товщиною 2.4 мм, виготовленому з п'єзокераміки ЦТС-19. Для п'єзоелектричних втрат було прийнято  $d_{31M} = 0.0096$  (літературні дані для стержня з такої ж кераміки). У двох нижніх рядках таблиці наведені осереднені дані та відповідні максимальні відхилення (у відсотках). “Найчутливішим” до зміни  $\nu$  виявився множник  $\gamma$ , тоді як відхилення від середнього у решти не перевищує кількох процентів. Оскільки діапазон зміни коефіцієнта Пуассона для більшості п'єзокерамік не виходить за межі  $0.31 \div 0.37$ , то його вплив на складові провідності порівняно невеликий.

Величини функцій  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $F = |(B_1^2 + B_2^2)^{1/2}|$ , які характеризують компоненти активної, реактивної і повної провідності пластини, визначались чисельним способом. Для порівняння обчислених значень повної провідності з дослідними можна скористатися простими формулами зв'язку [23]:

$$Y_m = 2\pi f_m C_0 F_m, \quad Y_n = 2\pi f_n C_0 F_n. \quad (17)$$

Ці формули можна використати для експериментального визначення параметрів дисипації енергії при коливаннях п'єзокерамічних тіл. Спершу потрібно визначити механічні втрати на резонансних частотах (окремо для кожного резонансу) з використанням методу п'єзотрансформаторного датчика. Для цього в центрі досліджуваного диска відділяється п'єзотрансформаторний датчик діаметром  $2 \div 3$  мм і знімається крива залежності його потенціалу від частоти в околі того чи іншого радіального резонансу. На рівні  $-3$  дБ (тобто  $0.707$ ) від максимального значення потенціалу вимірюються відповідні частоти  $f_1$  і  $f_2$ . Відношення частоти  $f_0$  максимального значення до їхньої різниці і є механічною добротністю, яка обернена до тангенса механічних втрат  $s_{11M}$ :

$$Q_M = \frac{f_0}{f_2 - f_1}, \quad s_{11M} = \frac{1}{Q_M}. \quad (18)$$

Повернемося до співвідношень (10)–(14) і проаналізуємо їх з урахуванням формул (15), (16) на

частотах резонансу й антирезонансу відповідно, додаючи в позначеннях додаткові індекси  $p$  і  $a$ :

$$\begin{aligned} A_{1p} &= -0.5s_{11M}\kappa_{0p}\beta_p\Delta_{ap}(\kappa_{0p}), \\ A_{2p} &= 0.25s_{11M}^2\beta_p\delta_p + \\ &+ d_{31M}s_{11M}\kappa_{0p}\beta_p\Delta_{ap}(\kappa_{0p}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_{1a} &= s_{\Sigma}\Delta_{pa}^2(\kappa_{0a}) + 0.5s_{11M}\kappa_{0a}\delta_a\Delta_{pa}, \\ A_{2a} &= 0.25s_{11M}^2\beta_a\delta_a + \\ &+ 0.5s_{11M}s_{\Sigma}\kappa_{0a}\beta_a\Delta_{ra}(\kappa_{0a}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$s_{\Sigma} = s_{11M} + \varepsilon_{33M} - 2d_{31M},$$

$$D_{0p} = 0.25\kappa_{0p}^2s_{11M}^2\beta_p^2, \quad (21)$$

$$D_{0a} = \Delta_{pa}^2 + 0.25\kappa_{0a}^2s_{11M}^2\beta_a^2.$$

Вибравши для першої радіальної моди  $\kappa_{0m1} = 2.06$ ,  $\nu = 0.35$ ,  $\beta_m = -0.94$ , маємо

$$Y_{m1} \cong \frac{4.9f_{m1}C_0k_{p0}^2}{s_{11M}} \cong 4.9f_{m1}C_0k_{p0}^2Q_M. \quad (22)$$

Ця формула дає прямий метод визначення дуже важливого для аналізу планарного КЕМЗ по виміряних максимальній провідності  $Y_{m1}$ , відповідній до неї частоті  $f_{m1}$ , статичній ємності  $C_0$  і механічній добротності  $Q_M$ :

$$k_{p0}^2 = \frac{Y_{m1}}{4.9f_{m1}C_0Q_M}. \quad (23)$$

Похибка, яка виникає при користуванні спрощеною формулою (23), складається з похибок вимірювання частоти максимальної провідності  $f_{m1}$ , статичної ємності  $C_0$ , а також із похибок визначення механічної добротності  $Q_M$  і максимальної провідності  $Y_{m1}$ . У роботі [6] показано, що похибка вимірювання частоти електронними частотомірами дорівнює  $\pm 0.01$  %. Приблизно з такою ж похибкою вимірюється і статична ємність п'єзокерамічного зразка. Оскільки при визначенні повної провідності треба ділити струм через п'єзоелемент на спад напруги на ньому, то похибки вимірювання цих величин додаються і загальна похибка визначення повної провідності сягає  $\pm(3 \div 7)$  %. Похибка визначення механічної добротності по амплітудно-частотній характеристиці п'єзотрансформаторного датчика є  $\pm(0.5 \div 1)$  %. Отже загальна похибка формули (23) становить  $\pm(3.5 \div 8)$  % при  $\nu = 0.35$ ,

Табл. 2. Залежність множників повної провідності від коефіцієнта Пуассона

$\nu$	$\gamma_m$	$\beta_m$	$\delta_m$	$ F_m $	$\gamma_n$	$\beta_n$	$\delta_n$	$ F_n $
0.29	-0.080	-0.913	-0.751	18.473	-0.131	10.995	-0.830	0.0718
0.31	-0.086	-0.925	-0.763	18.815	-0.135	-1.004	-0.838	0.0730
0.33	-0.090	-0.934	-0.771	18.443	-0.141	-1.015	-0.849	0.0721
0.35	-0.096	-0.946	-0.782	18.556	-0.144	-1.023	-0.857	0.0735
0.37	-0.100	-0.955	-0.791	18.562	-0.150	-1.034	-0.868	0.0734
0.39	-0.106	-0.977	-0.803	17.947	-0.154	-1.042	-0.977	0.0727
$a_{cp}$	-0.093	-0.942	-0.777	19.466	-0.143	-1.019	-0.853	0.0727
$\Delta a_{cp}/a_{cp}, \%$	14	3.7	3.3	2.8	8.4	2.4	2.8	1.2

збільшуючись до  $\pm(5 \div 10) \%$  для  $\nu=0.30$  і  $\nu=0.39$  (див. табл. 2).

Знаючи  $f_m$  і  $k_{p0}^2$ , за формулами

$$k_{31}^2 = \frac{(1 - \nu^E)}{2} k_p^2, \quad \frac{1}{s_{11}^E} = \frac{\pi^2 d^2 f_m^2 (1 - \nu^{E2}) \rho}{\eta_1^2},$$

$$d_{31} = k_{31} \sqrt{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E}, \quad g_{31} = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T} \tag{24}$$

можна визначити поперечний КЕМЗ  $k_{31}$ , п'єзомодуль  $d_{31}$ , пружну податливість  $s_{11}$  і п'єзоконстанту  $g_{31}$ . Тут  $d$  – діаметр пластини;  $\rho$  – її густина;  $\eta_1$  – найменший позитивний корінь рівняння [30]

$$(1 - \nu^E) J_1(\eta) - \eta J_0(\eta) = 0. \tag{25}$$

Діелектрична стала  $\varepsilon_{33}^T$  визначається через вимірювану статичну ємність  $C_0$  із формули плоского конденсатора (13):

$$\varepsilon_{33}^T = 4hC_0/\pi d^2 = 130.2 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м} = 1471\varepsilon_0.$$

Одночасно з вимірюванням ємності на частоті 1000 Гц визначаються і діелектричні втрати  $\varepsilon_{33M}$ .

На частоті мінімальної провідності маємо наближене співвідношення

$$\frac{Y_n}{2\pi f_n C_0} = F_n \cong \frac{1}{D_{0n}} (s_{\Sigma} \Delta_{pn}^2 + 0.5 s_{11M} \kappa_{0n} \delta_n \Delta_{pn}), \tag{26}$$

з якого одержуємо формулу для експериментального визначення тангенса п'єзоелектричних втрат:

$$d_{31M} \approx \frac{s_{11M} + \varepsilon_{33M}}{2} - \frac{Y_n D_{0n}}{4\pi f_n C_0 \Delta_{pn}^2} + \frac{s_{11M} \kappa_{0n} \delta_n}{4\Delta_{pn}}. \tag{27}$$

У нашому прикладі  $\Delta_{pn} = 0.128$ ,  $D_{0n} = 0.0165$ ,  $\kappa_{0n} = 2.2$ ,  $\delta_n = -0.868$ . За формулою (27) маємо  $d_{31M} = 0.0094$ . Відношення  $D_{0n}/\Delta_{pn}^2$  без помітної похибки можна замінити одиницею.

### 3. ГОЛОВНІ МЕХАНІЧНІ НАПРУЖЕННЯ В ТОНКОМУ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОМУ ДИСКУ ПРИ РАДІАЛЬНИХ КОЛИВАННЯХ

При радіальних коливаннях тонкого п'єзокерамічного диска із суцільними електродами радіальні та окружні механічні напруження можна визначити за формулами [24]

$$\sigma_r = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \times \left[ \frac{\kappa r_1 J_0(\kappa r_1) - (1 - \nu) J_1(\kappa r_1)}{r_1 \Delta(\kappa)} - 1 \right], \tag{28}$$

$$\sigma_\theta = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \times \left[ \frac{\nu \kappa r_1 J_0(\kappa r_1) + (1 - \nu) J_1(\kappa r_1)}{r_1 \Delta(\kappa)} - 1 \right]. \tag{29}$$

При цьому їхня сума та різниця становлять

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left[ \frac{(1 + \nu) \kappa J_0(\kappa r_1)}{\Delta(\kappa)} - 2 \right], \tag{30}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E} \left[ \frac{r_1 \kappa J_0(\kappa r_1) - J_1(\kappa r)}{r_1 \Delta(\kappa)} \right], \tag{31}$$

де  $r_1 = r/R$ .

Усі ці формули комплексні, оскільки комплексною є безрозмірна частота  $\kappa$ . На рис. 3 зображені розподіли вздовж радіуса пластини абсолютних

значень компонентів механічних напружень (28) – (31), пронормованих на коефіцієнт, що стоїть перед квадратними дужками. Абсолютні значення фізичних величин були розраховані для порівняння з експериментальними даними, оскільки у методі п'єзотрансформаторного датчика серійні електронні вольтметри на фазу різниці потенціалів не реагують, а вимірюють лише їхні ефективні або пікові значення. Криві на графіку побудовані для перших трьох радіальних резонансів.

Порівнюючи графіки між собою, зауважимо, що радіальні й кутові компоненти механічних напружень у тонкому п'єзокерамічному диску при радіальних коливаннях відрізняються, насамперед, положеннями своїх мінімумів на обертонах, а також відмінними від нуля амплітудами азимутальних (окружних) напружень на ободі. Поблизу від центра пластини радіальні й окружні напруження збігаються. В міру віддалення від центра, аж до точки мінімуму, радіальні напруження спадають швидше від окружних, а після них – значно переважають окружні напруження.

#### 4. ПОРІВНЯННЯ З ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ

При виведенні формул, які зв'язують вимірні потенціали п'єзотрансформаторних датчиків із внутрішніми механічними напруженнями під ними, геометрична форма самих датчиків до уваги не бралася. В експериментах вони були круглими, бо наносилися металевим вістрям через металеву маску з круглими отворами. Щоб з'ясувати, наскільки геометрична форма та просторова орієнтація п'єзотрансформаторного датчика впливають на його потенціал, були проведені спеціальні експериментальні дослідження. В електродному покритті однієї з головних поверхонь диска діаметром 50 мм і товщиною 1.25 мм, виготовленого з кераміки ЦТС-19, уздовж радіусів від центру до країв наносилися прямокутні п'єзотрансформаторні датчики з розмірами  $4 \times 1$  і  $2.6 \times 0.6$  мм, орієнтовані своїми поздовжніми осями перпендикулярно до радіусів. Центри датчиків  $4 \times 1$  мм розміщувалися на таких відстанях від центра пластини: 1; 2.1; 4; 5.1; 6.3; 8; 9; 10.2; 12; 13; 14.4; 16; 17.5; 18.5; 19.5; 20.5; 22; 23.5; 24.5 мм, тоді як центри датчиків  $2.6 \times 0.6$  мм розташувалися інакше: 2.3; 4; 5.2; 6.1; 7; 7.8; 8.9; 9.5; 10.3; 11.7; 13; 14.2; 15.5; 17; 18.3; 19.7; 20.7; 21.8; 22.4; 24; 24.7 мм. Зауважимо, що деякі датчики виявилися дуже близькими один до одного – їх відділяла лише лінія розділення.

Довжина прямокутних датчиків щонайменше в чотири рази перевищує їхню ширину, а орієтова-

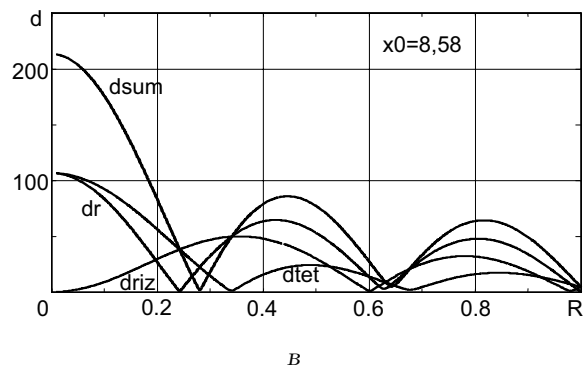
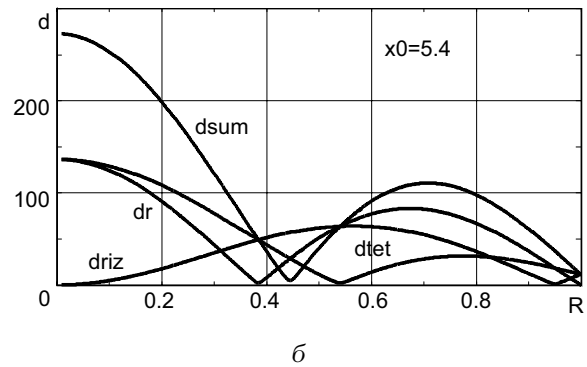
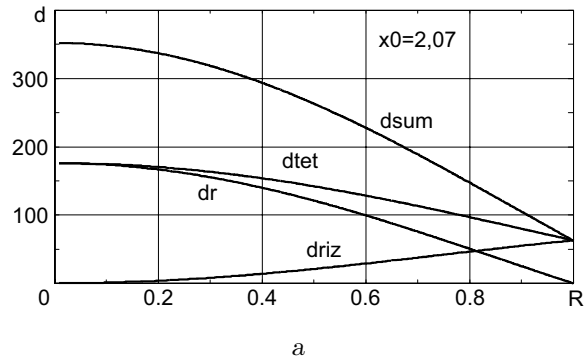


Рис. 3. Розподіли абсолютних значень компонентів механічних напружень вздовж радіуса пластини

ні вони були перпендикулярно до радіусів. Тому можна було сподіватися, що такі датчики мають реагувати перш за все на азимутальні напруження, які не залежать при радіальних коливаннях від азимута. Внесок радіальних напружень у вимірюваний потенціал прямокутного п'єзотрансформаторного датчика, орієнтованого перпендикулярно до радіуса, мусить бути набагато меншим від внеску азимутальних напружень.

На рис. 4 наведені графіки розподілу вздовж радіуса коефіцієнтів трансформації для п'єзотрансформаторних датчиків  $2.6 \times 0.6$  мм на трьох перших радіальних модах. Під час вимірювань було виявлено значний вплив сусідніх датчиків один на

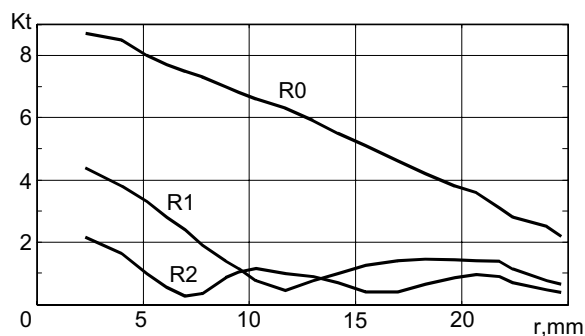


Рис. 4. Розподіл коефіцієнтів трансформації для датчиків з  $2.6 \times 0.6$  мм на трьох перших радіальних модах

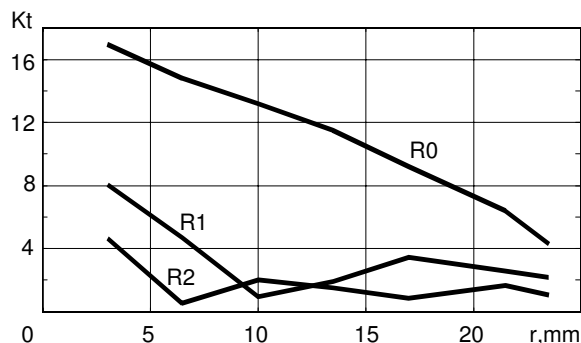


Рис. 6. Розподіл коефіцієнтів трансформації для круглих датчиків діаметром 3 мм на трьох перших радіальних модах

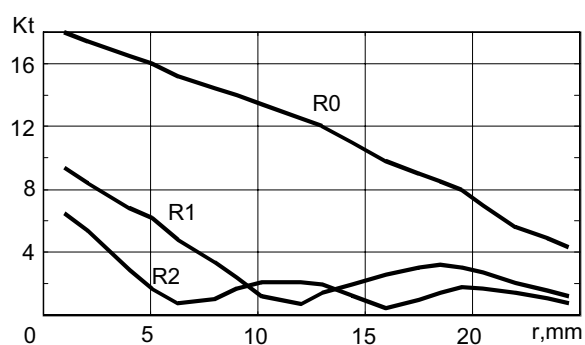


Рис. 5. Розподіл коефіцієнтів трансформації для датчиків з  $4 \times 1$  мм на трьох перших радіальних модах

одного через взаємну ємність – потенціали близьких датчиків були на  $15 \div 25$  % вищі від очікуваних. Позбутися вказаного недоліку вдалося шляхом “закорочування” найближчих сусідніх датчиків при вимірюванні відповідних потенціалів.

У випадку прямокутних датчиків  $4 \times 1$  мм коефіцієнти трансформації підвищуються, а характер їхніх радіальних залежностей зберігається (рис. 5).

Для круглих датчиків діаметром 3 мм одержані залежності рис. 6 (7 датчиків), які в цілому схожі на попередні.

Порівнюючи експериментальні дані з теоретичними, можна помітити тенденцію до зміни положення мінімуму на азимутальних датчиках. Проте прямої відповіді на питання про можливість розділення компонентів механічних напружень за допомогою підбору форми й орієнтації п'єзотрансформаторних датчиків дати не можна.

## ВИСНОВКИ

1. Проведено аналітичне й експериментальне дослідження компонентів динамічних механічних напружень при резонансних коливаннях тонких п'єзокерамічних дисків із товщиною поляризацією. Встановлено, що радіальні й азимутальні механічні напруження у центрі пластини збігаються, а біля краю присутні тільки азимутальні напруження. Різниця радіальних і азимутальних напружень у тонкому п'єзокерамічному диску є менш інформативною, ніж їхня сума.
2. Запропоновано прямий метод експериментального визначення планарного коефіцієнта електромеханічного зв'язку за вимірюною резонансною провідністю і визначеною з використанням методу п'єзотрансформаторного датчика механічною добротністю.
3. Питання про можливість розділення компонентів механічних напружень при радіальних коливаннях п'єзопластини за допомогою певним чином орієнтованих п'єзотрансформаторних датчиків прямокутної форми залишається відкритим. Використання п'єзотрансформаторних датчиків не круглої форми може підвищити роздільну здатність методу, проте супроводжується їх помітним взаємним впливом.

1. ГОСТ 12370–72 Материалы пьезокерамические, методы испытаний. – М.: Изд-во стандартов, 1973. – 28 с.
2. Карлаш В. Л., Улитко А. Т. Исследование колебаний пьезокерамических элементов методом пьезотрансформаторного датчика // Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций /



- Под ред. А. Н. Гузя, В. А. Заруцкого.– К.: Наук. думка, 1984.– С. 178–196.
3. Карлаш В. Л. Вынужденные высокочастотные колебания тонких пьезокерамических круговых дисков // Прикл. мех.– 1995.– **31**, N 5.– С. 75–80.
  4. Карлаш В. Л. Планарно-толщинные колебания пьезокерамических колец и дисков // Прикл. мех.– 1997.– **33**, N 7.– С. 72–78.
  5. Карлаш В. Л. Влияние потерь энергии на характеристики плоского пластинчатого пьезотрансформатора // Прикл. мех.– 2003.– **39**, N 8.– С. 134–139.
  6. Писаренко Г. Г. Прочность пьезокерамики.– К.: Наук. думка, 1987.– 232 с.
  7. Пятраускас А., Приалгаускас С., Мажонас А. Исследование колебаний составных круглых пьезообразователей // Ультразвук (Науч. тр. вузов ЛитССР).– 1987.– **19**.– С. 107–113.
  8. Черных Г. Г., Соболева Л. С., Харитонов В. В. К вопросу о радиальных колебаниях тонких пьезокерамических дисков и колец // Электронная техника.– 1972.– N 1.– С. 67–84.
  9. Blanguernon A., Lene F., and Bernadou M. Active control of a beam using a piezoceramic element // Smart Mater. Struct.– 1999.– **8**.– P. 116–124.
  10. Litvin A. F., Pikalev M. M., Doroshenko V. A., Borodin V. Z. Electromechanical nonlinearity of polycrystalline ferroelectrics under resonant excitation // Ferroelectrics.– 1984.– **51**, N 3–4.– P. 159–172.
  11. Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. Son. Ultrason.– 1967.– **SU-14**.– P. 18–20.
  12. Hu J., Fuda Y., Katsuno M., and Yoshida T. A Study on the rectangular-bar shaped multilayer piezoelectric transformer using length extensional vibration mode // Jpn. J. Appl. Phys.– 1999.– **38**.– P. 3208–3212.
  13. Karlash V. L. The stress state of a rectangular piezoceramic plate with transverse-longitudinal polarization // Int. Appl. Mech.– 2001.– **37**, N 3.– P. 386–392.
  14. Karnaukhov V. G., Kirichok I. F., Kozlov V. I. Electromechanical vibrations and dissipative heating of viscoelastic thin-walled elements with allowance for piezoelectric effect // Int. Appl. Mech.– 2001.– **37**, N 2.– P. 182–212.
  15. Martin G. E. Dielectric, elastic and piezoelectric losses in piezoelectric materials // Ultrason. Symp. Proc.– Milwaukee, 1974.– P. 613–617.
  16. Mason W. P. Electrostrictive effect in barium titanate ceramics // Phys. Rev.– 1948.– **74**.– P. 1134–1147.
  17. Yamamoto M., Sasaki Y., Ochi A., Inoue T., Namamura S. Step-down piezoelectric transformer for AC-DC converters // Jpn. J. Appl. Phys.– 2001.– **40**, N 5B.– P. 3637–3642.
  18. Вовкодав І. П., Улітко А. Т. Радіальні коливання тонкої п'єзокерамічної пластинки // Доповіді АН УРСР. Сер. А.– 1973.– N 9.– С. 830–833.
  19. Андрущенко В. А., Вовкодав І. Ф., Карлаш В. Л., Улітко А. Ф. Исследование коэффициента электромеханической связи в круглых пьезокерамических пластинах // Прикл. мех.– 1975.– **11**, N 4.– С. 42–48.
  20. Карлаш В. Л., Ключниченко В. А., Крамаров Ю. А., Улітко А. Ф. Исследование радиальных колебаний тонких пьезокерамических дисков при неравномерном электрическом нагружении // Прикл. мех.– 1977.– **13**, N 3.– С. 56–62.
  21. Карлаш В. Л., Улітко А. Т. Про один спосіб дослідження радіальних коливань тонкої п'єзокерамічної пластинки // Доповіді АН УРСР, сер. А.– 1974.– N 9.– С. 804–807.
  22. Карлаш В. Л. Влияние диссипации энергии на амплитудно-частотную характеристику полной проводимости тонкого пьезокерамического диска // Электричество.– 1984.– N 4.– С. 59–61.
  23. Карлаш В. Л. Диссипация энергии при колебаниях тонких пьезокерамических круглых пластин // Прикл. мех.– 1984.– **20**, N 5.– С. 77–82.
  24. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел.– Киев: Наук. думка, 1990.– 228 с.
  25. Крамарова Л. П., Тарасова Г. Б., Крамаров Ю. А. Динамические механические напряжения в пьезокерамическом диске // Прикл. акуст. (Таганрог).– 1971.– N 4.– С. 54.
  26. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Эквивалентные схемы радиально колеблющихся дисков // Акуст. ж.– 1972.– **18**, N 1.– С. 58–62.
  27. Karagiozova D., Jones N. Dynamic elastic-plastic buckling of circular cylindrical shells under axial impact // Int. J. Solids Struct.– 2000.– **37**.– P. 2005–2034.
  28. Munk E. C. The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes // Phillips Resch Rept.– 1965.– **20**.– P. 170–189.
  29. Zharii Yu. O. Normal mode expansions in dynamic electroelasticity and their application to electromechanical energy conversion // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– **92**.– P. 57–68.
  30. IRE standards on piezoelectric crystals: Measurements of piezoelectric ceramics // Proc. IRE.– 1961.– **49**.– P. 1161–1169.
  31. Гвоздовер Р. С., Лукьянов А. Е., Спивак Г. В., Лямов В. Е., Рау Э. И., Бутыркин А. И. Наблюдение пьезоэлектрических полей в стробоскопическом электронном зеркальном микроскопе // Радиотехн. и электрон.– 1968.– **13**, N 12.– С. 2276–2278.
  32. Бородин В. З., Литвин А. Ф., Пикалев М. М. Релаксационные явления в пьезокерамике при изменении температуры и амплитуды внешнего воздействия // Изв. АН СССР. Сер. физ.– 1984.– **48**, N 6.– С. 1090–1093.
  33. Гавриляченко В. Г., Данцигер А. Я., Дорошенко В. А., Житомирский Г. А., Пикалев М. М., Ревенко Л. Г., Фесенко Е. Г. К вопросу о повышении циклической прочности пьезокерамических материалов // Докл. II всесоюз. семин. "Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых

- и ультразвуковых частотах нагружения”.– К.: Наук. Думка, 1980.– С. 194–198.
34. Карлаш В. Л., Улитко А. Т. Метод исследования механических напряжений в колеблющихся пьезокерамических телах // Электричество.– 1976.– N 11.– С. 82–83.
35. Карлаш В. Л. К определению добротности пьезокерамических элементов методом пьезотрансформаторного датчика // Тепловые напряжения в элементах конструкций.– 1978.– 18.– С. 95–97.
36. Карлаш В. Л. К определению параметров пьезокерамики методом пьезотрансформаторного датчика // Тепловые напряжения в элементах конструкций.– 1980.– 20.– С. 110–112.
37. Карлаш В. Л. Амплитудно–фазовые соотношения в методе пьезотрансформаторного датчика // Прикл. мех.– 1983.– 19, N 10.– С. 95–101.
38. Piquette J. C. Quasistatic coupling coefficients for electrostrictive ceramics // J. Acoust. Soc. Amer.– 2001.– 111.– P. 197–207.