

Я.М. Григоренко, А.Я. Григоренко

**ЗАДАЧИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ
ОБОЛОЧЕК С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru*

Abstract. The review of works is given, which are devoted to solving the problems of the static and dynamical deformation of the elastic shell-like bodies of complex shape made of the isotropic and anisotropic materials in the classical and refined statements. To solve the two-dimensional boundary problems and boundary value problems, the nontraditional discrete-continuum approach is utilized, which is based on the spline-approximation of unknown functions of partial differential equations with variable coefficients. This enables to reduce the initial problem to the system of one-dimensional problems, which are solving by the method of discrete orthogonalization. An analysis of numerical results on the distribution of stress and displacement fields as well as the dynamical characteristics is carried out in dependence on the form of loading and boundary conditions, geometrical and mechanical parameters of elastic bodies under consideration. The special attention is drawn to the estimating the accuracy of results in hand.

Key words: shell structures, static and dynamic problems, variable parameters, models, discrete-continuum methods.

Введение.

Многие элементы конструкций современной техники выполнены в виде оболочек различной формы и сложной структуры и находятся под действием распределенных и локальных нагрузок при различных видах закрепления их контуров. Широкое использование оболочечных элементов объясняется стремлением удовлетворить тем требованиям, которые обусловлены сложными условиями работы машин, летательных и транспортных аппаратов, различных промышленных и гражданских сооружений. Усложнение конструктивных форм и структуры оболочечных элементов приводит к необходимости развития теории и разработки методов решения статических и динамических задач для оболочек из анизотропных неоднородных материалов.

Характерной особенностью развития теории пластин и оболочек является взаимосвязь между процессом построения математической модели данного класса задач и разработкой метода решения задач, описываемых этой моделью. Об этом свидетельствуют теория тонких пластин Кирхгофа [101] и теория тонких оболочек Кирхгофа – Лява [97], в которых наряду со стремлением дать адекватное описание деформации пластин и оболочек преследовалась цель сохранить простоту этих моделей настолько, чтобы получить решение ряда задач с учетом имеющихся вычислительных средств. Примером такой взаимосвязи также может служить теория оболочек Муштари – Донелла – Власова [5, 28, 36], в которой внесенные в основные уравнения упрощения позволили построить решения некоторых классов задач в довольно широком диапазоне изменения их характеристик, о чем свидетельствуют следующие названия этой теории: техническая теория оболочек; теория пологих оболочек; теория оболочек с большим показателем изменчивости напряженного состояния [2, 8, 9, 16, 20, 23, 24, 29, 37]. Эта взаимосвязь еще более проявляется в настоящее время, когда для решения задач теории оболочек широко используются компьютеры и при построении математических моделей для определенных классов оболочек следует предусматривать все особенности и возможности, связанные с решением задачи [63].

При решении двумерных краевых задач статики и динамики пластин, оболочек и пространственных тел, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами, возникают большие вычислительные трудности. Для их решения в ряде случаев применяются подходы, основанные на разделении переменных каким-либо способом и сведении исходной задачи к одномерной. Однако в ряде задач этому препятствуют многие факторы, такие как сложность формы и коэффициентов уравнений, граничные условия на контурах оболочек и др.

В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для их решения стали широко использоваться сплайн-функции. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими. К числу основных преимуществ можно отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений, т.е. поведение сплайна в окрестности точки не сказывается на поведении сплайна в целом, как, например, это имеет место при полиномиальном приближении; хорошая сходимости сплайн-интерполяции в отличие от многочленной; простота и удобства в реализации алгоритмов построения и вычисления сплайнов на персональных компьютерах [1, 2, 5]. О возможности применения различных подходов для решения задач теории пластин и оболочек на основе численного анализа свидетельствуют работы [64, 66, 85, 86, 96, 98, 99].

В данном обзоре для решения указанных задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, применяется нетрадиционный подход, основанный на сведении исходных задач к одномерным с применением сплайн-аппроксимации, и решении последней устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [16 – 19]. Некоторые другие численные подходы для решения статического и динамического поведения оболочечных структур были применены авторами в [38, 43, 45, 51 – 54].

Метод дискретной ортогонализации предложен в статье [6] и монографии [3]; в монографии [26] указано, что метод дискретной ортогонализации впервые был применен к решению задач статики оболочек в работах [18, 19]. Особенности применения этого метода в задачах теории оболочек изложены в монографии [16]. Там же показано, что можно существенно сократить объем занимаемой информации за счет некоторой модификации алгоритма. Эффективность использования и высокая точность метода в задачах теории оболочек отмечена в монографиях [4, 26]. Это подтверждено и в последнее время в монографии [7].

Применение сплайн-аппроксимации для сведения двумерных задач о статическом и динамическом деформировании пластин и оболочек к системам обыкновенных дифференциальных уравнений предложено в статьях [10, 17].

§1. О решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с применением сплайн-функций.

Рассмотрим один подход к решению двумерных краевых задач, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами в двух направлениях и характеризуют статическое и динамическое поведение упругих оболочек с переменными параметрами. Подход основан на применении сплайн-аппроксимации для сведения двумерных задач к одномерным и решении последних устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [10, 17, 72, 73].

Основные сведения о сплайн-функциях. Расширим сетку $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ вспомогательными точками $x_{-m} < \dots < x_{-1} < a$, $b < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}$ и рассмотрим сетку $\Delta_1: x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}$.

Рассмотрим функцию $\varphi_m(x, t) = (-1)^{m+1} (m+1)(x-t)_+^m$ и построим разделённую разность $(m+1)$ -го порядка по значениям аргумента $t = x_i, \dots, x_{i+m+1}$. В результате получим функции переменной x в виде

$$\tilde{B}_m^i = \varphi_m[x; x_i, \dots, x_{i+m+1}]; \quad i = -m, \dots, N-1. \quad (1.1)$$

Эти функции называются базисными сплайнами или B -сплайнами степени m и являются сплайнами степени m дефекта 1 на расширенной сетке Δ_1 .

Если использовать тождество $(x-t)_+^m = (x-t)^m + (-1)^{m+1}(t-x)_+^m$, то можно получить другой вид записи (1.1)

$$\tilde{B}_m^i(x) = (m+1) \sum_{p=i}^{i+m+1} \frac{(x_p - x)_+^m}{\omega'_{m+1,i}(x_p)} \quad (i = -m, \dots, N-1) \quad \left(\omega_{m+1,i}(t) = \prod_{j=i}^{i+m+1} (t - x_j) \right). \quad (1.2)$$

При практических вычислениях удобно использовать нормализованные B -сплайны вида

$$B_m^i(x) = \frac{x_{i+m+1} - x_i}{m+1} \tilde{B}_m^i(x). \quad (1.3)$$

Для нормализованных B -сплайнов имеет место рекуррентная формула

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1}^{i+1}(x), \quad (1.4)$$

которая может использоваться как определение B -сплайнов. При этом

$$B_0^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}); \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Функции $B_m^i(x)$ являются сплайнами степени m дефекта 1 с конечными носителями минимальной длины. Кроме этого, система функций $B_m^i(x)$ ($i = -m, \dots, N-1$) является линейно независимой и образует базис в пространстве сплайнов $S_m(\Delta)$. Это означает, что каждый сплайн $S_m(x) \in S_m(\Delta)$ может быть единственным способом записан в виде

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} b_i B_m^i(x), \quad (1.5)$$

где b_i – некоторые постоянные коэффициенты.

Сплайны $B_m^i(x)$ имеют следующие свойства:

а) $B_m^i(x) > 0$ для $x \in [x_i, x_{i+1})$, $B_m^i(x) \equiv 0$ для $x \notin [x_i, x_{i+1})$;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} B_m^i(x) dx = \frac{x_{i+m+1} - x_i}{m+1}$.

Рассмотрим равномерную расширенную сетку

$$\Delta' : x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < \dots < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m} \quad (x_{k+1} - x_k = h = \text{const})$$

и построим первых три B -сплайна нечетной степени. При этом нумеруем их по среднему узлу носителей.

Поэтому B -сплайны нечетной степени будем обозначать через $B_m^i(x)$ вместо $B_m^{i-(m+1)/2}(x)$, т. е. нумерация сплайнов сдвигается на $(m+1)/2$ единиц вправо.

Таким образом, имеем B -сплайны:

первой степени

$$B_1^i(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-1}; \\ t, & x_{i-1} \leq x \leq x_i; \\ 1-t, & x_i \leq x < x_{i+1}; \\ 0, & x_{i+1} \leq x < \infty; \end{cases} \quad (1.6)$$

третьей степени

$$B_3^i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-2}; \\ t^3, & x_{i-2} \leq x < x_{i-1}; \\ -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, & x_{i-1} \leq x < x_i; \\ 3t^3 - 6t^2 + 4, & x_i \leq x < x_{i+1}; \\ (1-t)^3, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}; \\ 0 & x_{i+2} \leq x < \infty; \end{cases} \quad (1.7)$$

B-сплайны пятой степени

$$B_5^i(x) = \frac{1}{120} \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-3}; \\ 0, & x_{i-3} \leq x < x_{i-2}; \\ -5t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1, & x_{i-2} \leq x < x_{i-1}; \\ 10t^5 - 20t^4 - 20t^3 + 20t^2 + 50t + 26, & x_i \leq x < x_{i+1}; \\ -10t^5 + 30t^4 - 60t^2 + 66, & x_i \leq x < x_{i+1}; \\ 5t^5 - 20t^4 + 20t^3 + 20t^2 - 50t + 26, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}; \\ (1-t)^5, & x_{i+2} \leq x < x_{i+3}; \\ 0 & x_{i+3} \leq x < \infty, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $t = (x - x_k) / h$ на интервале

$$[x_k, x_{k+1}], \quad k = i - \frac{m+1}{2}, \quad i + \frac{m+1}{2} - 1; \quad i = -\frac{m+1}{2} + 1, \quad N + \frac{m+1}{2} - 1; \quad m = 1, 3, 5.$$

На рис. 1 – 3 показаны эти *B*-сплайны, а также соответствующие базисы из *B*-сплайнов в пространствах $S_m(\Delta)$ ($m = 1, 3, 5$).

В табл. 1, 2 приведены значения сплайнов $B_3^i(x)$ и $B_5^i(x)$ и их производных в узлах, которые принадлежат их носителям.

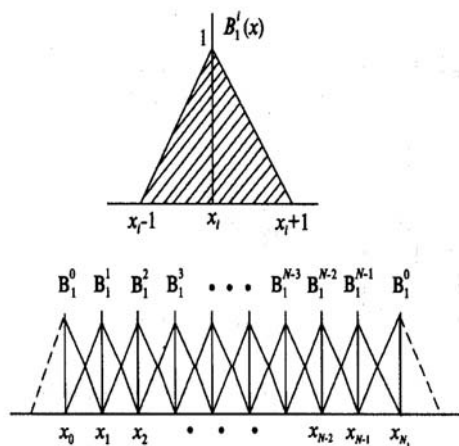


Рис. 1

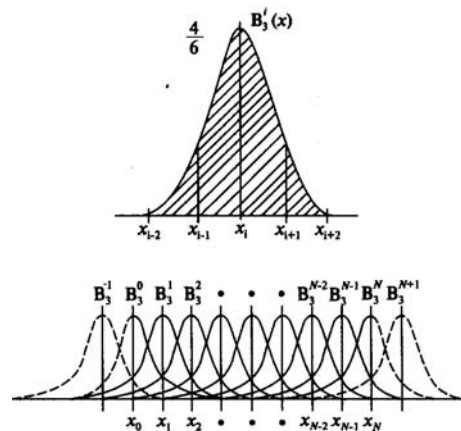


Рис. 2

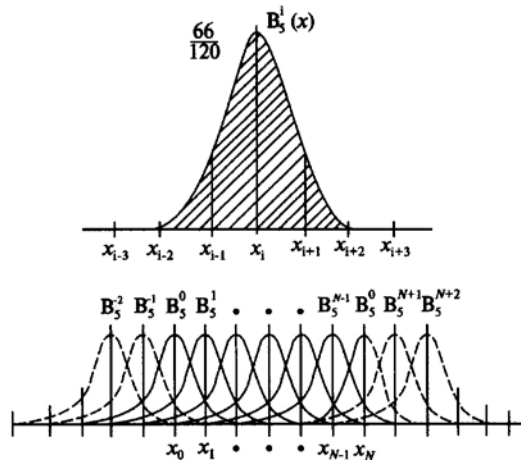


Рис. 3

Таблица 1

x	$B_5^i(x)$	$B_5^{i'}(x)$	$B_5^{i''}(x)$
x_{i-2}	0	0	0
x_{i-1}	$1/6$	$1/2h$	$1/2h$
x_i	$4/6$	0	$-2/h^2$
x_{i+1}	$1/6$	$-1/2h$	$1/h^2$
x_{i+2}	0	0	0

Таблица 2

x	$B_5^i(x)$	$B_5^{i'}(x)$	$B_5^{i''}(x)$	$B_5^{i'''}(x)$	$B_5^{i^{(4)}}(x)$
x_{i-3}	0	0	0	0	0
x_{i-2}	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24h}$	$\frac{1}{6h^2}$	$\frac{1}{2h^3}$	$\frac{1}{h^4}$
x_{i-1}	$\frac{26}{120}$	$\frac{10}{24h}$	$\frac{2}{6h^2}$	$-\frac{1}{h^3}$	$-\frac{4}{h^4}$
x_i	$\frac{66}{120}$	0	$-\frac{1}{h^2}$	0	$\frac{6}{h^4}$
x_{i+1}	$\frac{26}{120}$	$-\frac{10}{24h}$	$\frac{2}{6h^2}$	$\frac{1}{h^3}$	$-\frac{4}{h^4}$
x_{i+2}	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24h}$	$\frac{1}{6h^2}$	$-\frac{1}{2h^3}$	$\frac{1}{h^4}$
x_{i+3}	0	0	0	0	0

Сведение двумерных задач к одномерным с помощью сплайн-аппроксимации.

Пусть в прямоугольной области $R\{x_0 \leq x \leq x_N, y_1 \leq y \leq y_2\}$ требуется получить решение $\bar{u}(x, y)$ системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\bar{F} \left(x, y, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \dots \right) = 0, \quad (1.9)$$

которое удовлетворяет граничным условиям

$$\bar{G} \left(x, y, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (1.10)$$

Здесь \bar{F} и \bar{G} – линейные вектор-функции своих аргументов; Γ – граница области R . Аппроксимацию решения краевой задачи (1.9), (1.10) будем осуществлять в направлении оси Ox . Построим на отрезке $[x_0, x_N]$ сетку $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_N$. Определим решение краевой задачи в виде

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i=0}^N \bar{u}_i(y) * \bar{\psi}_i(x), \quad (1.11)$$

где $\bar{u}_i(y)$ – вектор-функции, подлежащие определению, а компоненты вектор-функций $\bar{\psi}_i(x)$ – линейные комбинации B -сплайнов, удовлетворяющие граничным условиям (1.10) на сторонах $x = x_0$ и $x = x_N$ прямоугольника R .

Символ $\bar{a} * \bar{b}$ обозначает вектор, компоненты которого являются произведением соответствующих компонент векторов \bar{a} и \bar{b} . B -сплайны следует выбирать таким образом, чтобы их степени были больше порядков старших производных компоненты решения \bar{u} в уравнениях системы (1.9).

Подставим решение (1.11) в систему уравнений (1.9) и потребуем, чтобы ее невязка была равна нулю на прямых $x = \xi_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) в прямоугольнике R , которые выходят из точек коллокации (ξ_k, y_1) на стороне $y = y_1$. Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка

$$\begin{aligned} \bar{F} \left(\xi_k, y, \sum_i \bar{u}_i(y) * \bar{\psi}_i(\xi_k), \sum_i \bar{u}_i(y) * \frac{d\bar{\psi}_i(\xi)}{dx}; \right. \\ \left. \sum_i \frac{d\bar{u}_i(y)}{dy} * \bar{\psi}_i(\xi_k), \sum_i \bar{u}_i(y) * \frac{d^2\bar{\psi}_i(\xi_k)}{dx^2}; \right. \\ \left. \sum_i \frac{d\bar{u}_i(y)}{dy} * \frac{d\bar{\psi}_i(\xi_k)}{dx}, \sum_i \frac{d^2\bar{u}_i(y)}{dy^2} * \bar{\psi}_i(\xi_k), \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Граничные условия (1.10) на сторонах $y = y_1$ и $y = y_2$ прямоугольника R в точках $(\xi_k, y_1), (\xi_k, y_2)$ ($k = 0, 1, \dots, N$) с учётом (1.11) запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{G} \left(\xi_k, y_j, \sum_i \bar{u}_i(y_j) * \bar{\psi}_i(\xi_k), \sum_i \bar{u}_i(y_j) * \frac{d\bar{\psi}_i(\xi_k)}{dx}; \right. \\ \left. \sum_i \frac{d\bar{u}_i(y_j)}{dy} * \bar{\psi}_i(\xi_k), \dots \right) = 0 \quad (j = 1, 2; k = 0, 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Одномерную краевую задачу (1.12), (1.13) решаем, например, методом дискретной ортогонализации, для чего предварительно представим ее в нормальной форме Коши. Одним из важных этапов применения аппроксимации является построение комбинации вектор-функций $\bar{\psi}_i(x)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Выше приведены некоторые варианты граничных условий и соответствующих им линейных комбинаций B -сплайнов третьей степени. В дальнейшем будем использовать также B -сплайны пятой степени. Для простоты принимаем, что решение краевой задачи является скалярной функцией $u(x, y)$.

Построим линейные комбинации B -сплайнов пятой степени для некоторых видов граничных условий на сторонах $x = \text{const}$ прямоугольника R . Для этого используем значения $B_5^i(x)$ в узлах сетки Δ из табл. 2 и свойства B -сплайнов. Рассмотрим следующие граничные условия:

$$u(x_0, y_j) = \frac{\partial u(x_0, y_j)}{\partial x} = u(x_N, y_j) = \frac{\partial u(x_N, y_j)}{\partial x} = 0;$$

$$\psi_0(x) = \frac{165}{4} B_5^{-2}(x) - \frac{33}{8} B_5^{-1}(x) + B_5^0(x); \quad \psi_1(x) = B_5^{-1}(x) - \frac{26}{33} B_5^0(x) + B_5^1(x); \quad (1.14)$$

$$\psi_2(x) = B_5^{-2}(x) - \frac{1}{33} B_5^0(x) + B_5^2(x); \quad \psi_i(x) = B_5^i(x) \quad (i = 3, 4, \dots, N-3);$$

$$\psi_{N-2}(x) = B_5^{N-2}(x) - \frac{1}{33} B_5^N(x) + B_5^{N+2}(x); \quad \psi_{N-1}(x) = B_5^{N-1}(x) - \frac{26}{33} B_5^N(x) + B_5^{N+1}(x);$$

$$\psi_N(x) = B_5^N(x) - \frac{33}{8} B_5^{N+1}(x) + \frac{164}{4} B_5^{N+2}(x);$$

$$u_0(x_0, y_j) = \frac{\partial^2 u(x_0, y_j)}{\partial x^2} = u(x_N, y_j) = \frac{\partial^2 u(x_N, y_j)}{\partial x^2} = 0;$$

$$\psi_0(x) = 12B_5^{-2}(x) - 3B_5^{-1}(x) + B_5^0(x); \quad \psi_1(x) = -B_5^{-1}(x) + B_5^1(x); \quad \psi_2(x) = -B_5^{-2}(x) + B_5^2(x);$$

$$\psi_i(x) = B_5^i(x) \quad (i = 3, 4, \dots, N-3); \quad \psi_{N-2}(x) = B_5^{N-2}(x) - B_5^{N+2}(x); \quad (1.15)$$

$$\psi_{N-1}(x) = B_5^{N-1}(x) - B_5^{N+1}(x); \quad \psi_N(x) = B_5^N(x) - 3B_5^{N+1}(x) + 12B_5^{N+2}(x);$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_j)}{\partial x} = \frac{\partial^3 u(x_0, y_j)}{\partial x^3} = \frac{\partial u(x_N, y_j)}{\partial x} = \frac{\partial^3 u(x_N, y_j)}{\partial x^3} = 0;$$

$$\psi_0(x) = B_5^0(x); \quad \psi_1(x) = B_5^{-1}(x) + B_5^1(x);$$

$$\psi_2(x) = B_5^{-2}(x) + B_5^2(x); \quad \psi_i(x) = B_5^i(x) \quad (i = 3, 4, \dots, N-3); \quad (1.16)$$

$$\psi_{N-2}(x) = B_5^{N-2}(x) + B_5^{N+2}(x); \quad \psi_{N-1}(x) = B_5^{N-1}(x) + B_5^{N+1}(x); \quad \psi_N(x) = B_5^N(x).$$

Комбинируя приведенные условия на разных сторонах $x = \text{const}$ прямоугольника, можно расширить число вариантов граничных условий.

Метод дискретной ортогонализации. Изложим суть метода дискретной ортогонализации. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = A(t)\bar{g}(t) + \bar{f}(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (1.17)$$

с граничными условиями

$$B_1 \bar{g}(a) = \bar{b}_1; \quad (1.18)$$

$$B_2 \bar{g}(b) = \bar{b}_2, \quad (1.19)$$

где $\bar{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}^T$ – вектор-столбец; \bar{f} – вектор-столбец правой части; $A(t)$ – заданная квадратная матрица порядка n ; B_1, B_2 – заданные прямоугольные матрицы, соответственно, порядков $k \times n$ и $(n-k) \times n$ ($k < n$); \bar{b}_1, \bar{b}_2 – заданные векторы.

Изложим суть метода.

Решение краевой задачи (1.17) – (1.19) представим в виде

$$\bar{g}(t) = \sum_{j=1}^m C_j \bar{g}_j(t) + \bar{g}_{m+1}(t), \quad (1.20)$$

где $m = \min\{k, n-k\}$ (для определённости принимаем $m = n-k$); \bar{g}_j – решения задач Коши для системы уравнений (1.17) при $\bar{f} = 0$ с начальными условиями, удовлетворяющими граничным условиям на левом конце интервала (1.18) при $\bar{b}_1 = 0$; \bar{g}_{m+1} – решение задачи Коши для системы (1.17) с начальными условиями, удовлетворяющими граничным условиям (1.19); m – число граничных условий на правом конце интервала интегрирования.

Метод дискретной ортогонализации даёт возможность получить устойчивый вычислительный процесс за счёт ортогонализации векторов-решений задачи Коши в конечном числе точек интервала изменения аргумента. Разобьём отрезок $[a, b]$ на части точками интегрирования t_s ($s = 0, 1, \dots, N$) так, чтобы $t_0 = a, t_N = b$. Среди этих точек выберем точки ортогонализации T_i ($i = 0, 1, \dots, M$). Выбор указанных точек обычно обусловлен степенью требуемой точности решения задачи, в остальном он произволен.

Пусть в точке T_i каким-либо численным методом, например, методом Рунге – Кутты, получены решения задач Коши, которые обозначим через $\bar{u}_r(T_i)$ ($r = 1, 2, \dots, m+1$).

Таким образом, в точке T_i до ортогонализации имеем векторы

$$\bar{u}_1(T_i), \bar{u}_2(T_i), \dots, \bar{u}_m(T_i), \bar{u}_{m+1}(T_i). \quad (1.21)$$

Проортонормируем векторы $\bar{u}_j(T_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) в точке T_i и обозначим через

$$\bar{z}_1(T_i), \bar{z}_2(T_i), \dots, \bar{z}_m(T_i).$$

Векторы \bar{z}_i выражаются через векторы \bar{u}_i следующим образом:

$$\bar{z}_r = \frac{1}{w_{rr}} \left(\bar{u}_r - \sum_{j=1}^{r-1} w_{rj} \bar{z}_j \right) \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1.22)$$

$$\left(w_{rj} = (\bar{u}_r, \bar{z}_j) \quad (j < r), \quad w_{rr} = \sqrt{(\bar{u}_r, \bar{z}_r) - \sum_{j=1}^{r-1} w_{rj}^2} \right).$$

Вектор \bar{z}_{m+1} не нормируется и вычисляется по формуле

$$\bar{z}_{m+1} = \bar{u}_{m+1} - \sum_{j=1}^m w_{m+1,j} \bar{z}_j. \quad (1.23)$$

На основании (4.7), (4.8) при $t = T_i$ имеем

$$\begin{aligned} w_{11} \bar{z}_1 &= \bar{u}_1; & w_{22} \bar{z}_2 &= \bar{u}_2 - w_{21} \bar{z}_1; & w_{33} \bar{z}_3 &= \bar{u}_3 - w_{31} \bar{z}_1 - w_{32} \bar{z}_2; \\ &\dots & & & & \\ w_{mm} \bar{z}_m &= \bar{u}_m - w_{m1} \bar{z}_1 - w_{m2} \bar{z}_2 - \dots - w_{m,m-1} \bar{z}_{m-1}; \end{aligned}$$

$$\bar{z}_{m+1} = \bar{u}_{m+1} - w_{m+1,1} \bar{z}_1 - w_{m+1,2} \bar{z}_2 - \dots - w_{m+1,m-1} \bar{z}_{m-1} - w_{m+1,m} \bar{z}_m.$$

После преобразований получаем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1(T_i) \\ \bar{u}_2(T_i) \\ \vdots \\ \bar{u}_m(T_i) \\ \bar{u}_{m+1}(T_i) \end{pmatrix} = \Omega_i \begin{pmatrix} \bar{z}_1(T_i) \\ \bar{z}_2(T_i) \\ \vdots \\ \bar{z}_m(T_i) \\ \bar{z}_{m+1}(T_i) \end{pmatrix}; \quad \Omega_i = \Omega(T_i) = \begin{pmatrix} w_{11}(T_i) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_{21}(T_i) & w_{22}(T_i) & 0 & \dots & 0 \\ w_{31}(T_i) & w_{32}(T_i) & w_{33}(T_i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{m1}(T_i) & w_{m2}(T_i) & w_{m3}(T_i) & \dots & 0 \\ w_{m+1,1}(T_i) & w_{m+1,2}(T_i) & w_{m+1,3}(T_i) & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Векторы $\bar{z}_r(T_i)$ являются начальными значениями задач Коши для однородной ($r = 1, 2, \dots, m$) и неоднородной ($r = m + 1$) систем дифференциальных уравнений (1.17) в интервале $T_i \leq t \leq T_{i+1}$.

В каждой точке ортогонализации T_i решение системы уравнений (1.17), удовлетворяющее граничным условиям на левом конце интервала (1.18), можно записать в виде двух выражений:

$$\text{до ортогонализации} - \bar{g}(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i-1)} \bar{u}_j(T_i) + \bar{u}_{m+1}(T_i);$$

$$\text{после ортогонализации} - \bar{g}(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} \bar{z}_j(T_i) + \bar{z}_{m+1}(T_i).$$

Решение системы уравнений (1.17) в интервале $T_i \leq t \leq T_{i+1}$ можно представить в виде

$$\bar{g}(t) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} \bar{z}_j(t) + \bar{z}_{m+1}(t).$$

После выполнения интегрирования на последнем участке $T_{M-1} \leq t \leq T_M$ и ортогонализации в точке T_M имеем

$$\bar{g}(T_M) = \sum_{j=1}^m C_j^{(M)} \bar{z}_j(T_M) + \bar{z}_{m+1}(T_M). \quad (1.25)$$

Удовлетворяя граничным условиям на правом конце интервала интегрирования, т. е. подставляя (1.25) в (1.19), получаем систему m линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $C_j^{(M)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). После нахождения $C_j^{(M)}$ решение краевой задачи (1.17) – (1.19) в точке $t = T_M$ даётся формулой (1.25). Это завершает прямой ход решения задачи.

При обратном ходе по значениям постоянных $C_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) определяем постоянные $C_j^{(i-1)}$, начиная с $i = M$.

Для этого приравняем

$$\sum_{j=1}^m C_j^{(i-1)} \bar{u}_j(T_i) + \bar{u}_{m+1}(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} \bar{z}_j(T_i) + \bar{z}_{m+1}(T_i). \quad (1.26)$$

Подставляя вместо \bar{u}_j их значения с (1.24) при $t = T_i$, имеем

$$\begin{aligned} & C_1^{(i-1)} w_{11} \bar{z}_1 + C_2^{(i-1)} (w_{21} \bar{z}_1 + w_{22} \bar{z}_2) + C_3^{(i-1)} (w_{31} \bar{z}_1 + w_{32} \bar{z}_2 + w_{33} \bar{z}_3) + \dots \\ & \dots + C_m^{(i-1)} (w_{m1} \bar{z}_1 + w_{m2} \bar{z}_2 + \dots + w_{mm} \bar{z}_m) + \end{aligned}$$

$$+(w_{m+1,1}\bar{z}_1 + w_{m+1,2}\bar{z}_2 + \dots + w_{m+1,m}\bar{z}_m + \bar{z}_{m+1}) = C_1^{(i)}\bar{z}_1 + C_2^{(i)}\bar{z}_2 + \dots + C_m^{(i)}\bar{z}_m + \bar{z}_{m+1}.$$

Приравнявая коэффициенты при векторах \bar{z}_j ($j = 1, 2, \dots, m$), находим

$$\Omega'_i \bar{C}^{(i-1)} = \bar{C}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{или} \quad \bar{C}^{(i-1)} = [\Omega'_i]^{-1} \bar{C}^{(i)}, \quad (1.27)$$

где Ω'_i – транспонированная матрица; $\bar{C}^{(i)}$ – вектор-столбец с компонентами $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \dots, C_m^{(i)}, 1$.

Таким образом, с помощью равенства (1.27) находим значения постоянных $C_j^{(i)}$ во всех точках, начиная с $i = M$. Затем определим решения $\bar{g}(T_i)$ краевой задачи.

§2. Напряженно-деформированное состояние ортотропных пологих оболочек (классическая постановка).

Наряду с изотропными пологими оболочками [5] в связи с использованием композиционных материалов широкое применение в качестве элементов конструкций находят ортотропные оболочки [2].

Ниже изложен подход к решению двумерных задач статики пологих оболочек из ортотропных материалов [27], основанный на сведении двумерной задачи к одномерной с помощью сплайн аппроксимации и численном решении последней методом дискретной ортогонализации. Такой подход к решению задач теории пластин и оболочек применен в работах [81 – 83].

Исходные уравнения деформирования пологих прямоугольных в плане ортотропных оболочек приведем на основе уравнений теории оболочек Муштари – Донелла – Власова в следующем виде:

выражения для деформаций

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (2.1)$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_1; \quad \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_2; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - \frac{1}{R_1} N_1 - \frac{1}{R_2} N_2 + q = 0;$$

соотношения упругости

$$N_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2; \quad N_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2; \quad S = C_{66}\varepsilon_{12};$$

$$M_1 = D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2; \quad M_2 = D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2; \quad H = 2C_{66}\kappa_{12}, \quad (2.3)$$

$$C_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{12} = \frac{\nu_1 E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_2 E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{66} = G_{12} h;$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12} = \frac{\nu_1 E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} = \frac{\nu_2 E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{66} = G_{12} \frac{h^3}{12}. \quad (2.4)$$

В соотношениях (2.1) – (2.4) x, y – координаты ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$), u, v, w – перемещения в плоскости в направлении осей координат и по нормали к ней; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ – тангенциальные и изгибные деформации; $N_1, N_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H$ – усилия и моменты; $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона; R_1, R_2 – радиусы кривизны в двух направлениях; $h = h(x, y)$ – толщина оболочки.

Исключив в уравнениях равновесия (2.2) перерезывающие усилия Q_1 и Q_2 , выразив в соотношениях упругости (2.3) усилия и моменты с помощью выражений (2.1) через перемещения и подставив их в уравнения равновесия (2.2), получим три разрешающих дифференциальных уравнения в перемещениях

$$\begin{aligned}
& C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial C_{11}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial C_{66}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial C_{66}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial C_{12}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_{11}}{R_1} + \frac{C_{12}}{R_2} \right) w + \left(\frac{C_{11}}{R_1} + \frac{C_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\
& C_{22} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial C_{22}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial C_{66}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial C_{66}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial C_{12}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C_{12}}{R_1} + \frac{C_{22}}{R_2} \right) w + \left(\frac{C_{12}}{R_1} + \frac{C_{22}}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad (2.5) \\
& D_{11} = 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\
& + \left(2 \frac{\partial D_{12}}{\partial y} + 4 \frac{\partial D_{66}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(2 \frac{\partial D_{12}}{\partial x} + 4 \frac{\partial D_{66}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{C_{11}}{R_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_{12}}{R_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{C_{11}}{R_1} + \frac{C_{12}}{R_2} \right) w + \\
& \frac{C_{12}}{R_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_{22}}{R_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{C_{12}}{R_1} + \frac{C_{22}}{R_2} \right) w - q_z = 0.
\end{aligned}$$

На контурах оболочки $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ задаются граничные условия, которые могут быть выражены через перемещения. Систему дифференциальных уравнений (2.5) представим в виде разрешенной относительно производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$.

Решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (2.5) представим в виде разложений

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_i(y); \quad (2.6)$$

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_i(y); \quad w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \psi_i(y),$$

где u_i, v_i, w_i ($i = \overline{0, N}$) – неизвестные функции переменной x , а φ_i и $\psi_i(\overline{0, N})$, $N \geq 6$ – функции, построенные с помощью B -сплайнов соответственно третьей и пятой степени, которые позволяют составить их линейные комбинации таким образом, чтобы удовлетворить различным условиям на контурах оболочки $y = 0$ и $y = b$.

После построения линейных комбинаций B -сплайнов в виде функций $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(y)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям на контурах $y = 0$ и $y = b$, подставим выражения (2.6) в разрешающие уравнения (2.5) и потребуем их

удовлетворения в точках коллокации $y_k (k = \overline{0, N})$. Тогда получим систему $3(N+1)$ уравнений. Аналогично поступаем с граничными условиями на контурах $x=0$ и $x=a$. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений вместе с граничными условиями образует двухточечную краевую задачу на интервале $0 \leq x \leq a$.

Если ввести обозначения

$$\bar{Y} = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_8\}^T = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}^T, \quad (2.7)$$

где $\bar{y}_m = \{\bar{y}_{m_0}, \bar{y}_{m_1}, \dots, \bar{y}_{m_N}\}^T (m = \overline{1, 8})$, то полученную краевую задачу можно записать в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x)\bar{Y} + \bar{f}(x) \quad (0 \leq x \leq a); \quad (2.8)$$

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Y}(a) = \bar{b}_2. \quad (2.9)$$

Краевую задачу для системы уравнений (2.8) с граничными условиями (2.9) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Подставляя найденные значения функций $u_i(x), v_i(x)$ и $w_i(x) (i = \overline{0, N})$ в выражения (2.6), получаем решение исходной задачи для перемещений, а по ним вычисляются все факторы напряженно-деформированного состояния оболочки.

Представим результаты решения некоторых задач, полученных на основании данного подхода. Рассмотрим ортотропные пологие оболочки для пяти вариантов упругих постоянных материала. При этом принимаем, что модуль упругости E_x сохраняет постоянное значение $E_x = E = \text{const}$, а изменяются модуль упругости $E_y = \mu E$, модуль сдвига $G_{xy} = \lambda E$ и коэффициент Пуассона ν_x . Рассмотрим следующие варианты значений упругих постоянных материала оболочки [2]:

$$\begin{aligned} 1) \mu = 2; \quad \lambda = 0,3; \quad \nu_x = 0,075; \quad 2) \mu = 1,35; \quad \lambda = 0,215; \quad \nu_x = 0,122; \\ 3) \mu = 1; \quad \lambda = 0,385; \quad \nu_x = 0,3; \quad 4) \mu = 0,741; \quad \lambda = 0,159; \quad \nu_x = 0,165; \quad (2.10) \\ 5) \mu = 0,5; \quad \lambda = 0,125; \quad \nu_x = 0,15. \end{aligned}$$

Значения упругих постоянных варианта 3 соответствуют изотропному случаю. Задачу решаем при следующих исходных данных: $a = 12; b = 10; h = 0,4; R_1 = 22,9; R_2 = 13$.

Рассмотрим задачу о деформации ортотропной оболочки с указанными геометрическими параметрами под действием равномерной поперечной поверхностной нагрузки $q_z = q_0 = \text{const}$. Все четыре стороны оболочки жестко защемлены, т.е. заданы следующие граничные условия:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a; \quad (2.11)$$

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

В табл. 3 приведены распределения прогиба при $x=6$ для $0 \leq y \leq 5$ и при $y=5$ для $0 \leq x \leq 6$ для пяти вариантов ортотропии материала (2.10). Видно, что с уменьшением модуля упругости E_y прогиб в центре оболочки ($x=6; y=5$) возрастает по отношению к прогибу оболочки из материала, соответствующего первому варианту ортотропии, соответственно, в 1,3; 1,4; 2,1; 2,8 раз.

Таблица 3

y	$\omega/E/q_0$				
	1	2	3	4	5
	x = 6				
0	0	0	0	0	0
1	40,0	56,7	65,3	98,2	141,7
2	120,9	169,0	188,0	282,0	394,4
3	202,6	279,7	301,9	452,0	614,9
4	259,9	353,9	376,3	562,7	751,1
5	280,2	382,6	401,6	600,4	795,8
x	y = 5				
0,0	0	0	0	0	0
1,2	89,5	105,1	102,4	133,8	156,6
2,4	201,9	251,2	250,4	344,9	422,4
3,6	259,7	339,3	346,7	398,5	635,6
4,8	277,5	374,6	390,2	577,5	757,6
6,0	200,2	382,6	401,6	600,4	795,8

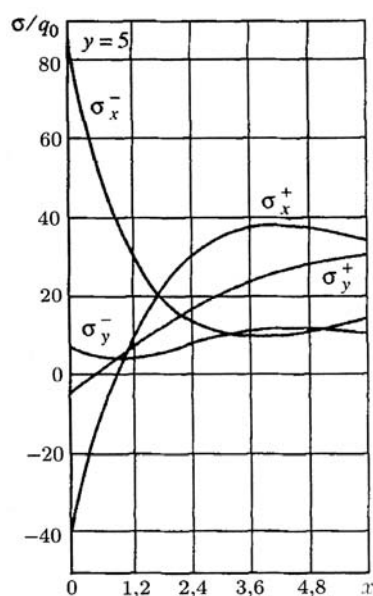


Рис. 4

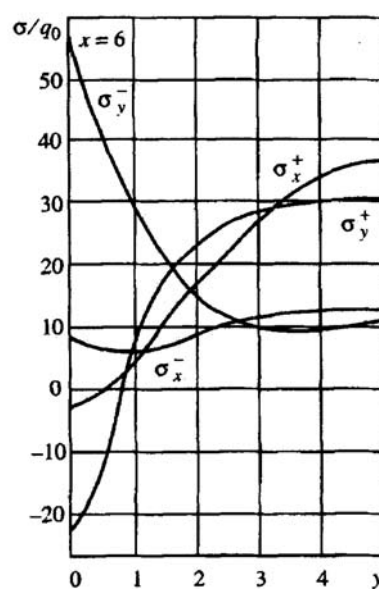


Рис. 5

На рис. 4 и 5 показаны распределения напряжений σ_x^+ , σ_x^- , σ_y^+ , σ_y^- вдоль оси OX при $y = 5$ вдоль оси OY при $x = 6$, соответственно, для пятого варианта ортотропии материала оболочки. Наибольшими напряжениями являются σ_x^- на коротких сторонах оболочки. Влияние ортотропии на характер распределения и величины наибольшего напряжения σ_x^- показаны на рис. 6.

Цифрами обозначены варианты ортотропии материала (см. (2.10)). Максимальное значение напряжения σ_x^- с уменьшением модуля упругости E_y увеличивается соответственно в 1,16; 1,24; 1,44; 1,64 раз.

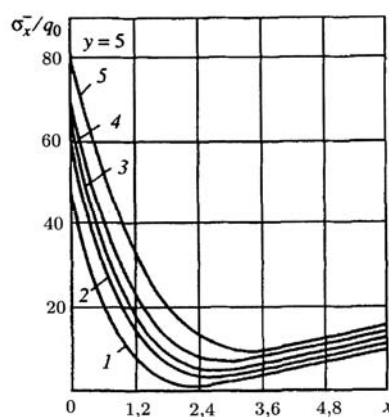


Рис. 6

§3. Статика некруговых цилиндрических оболочек сложной формы (классическая постановка).

Наряду с круговыми цилиндрическими оболочками большой интерес представляет исследование напряженно-деформированного состояния некруговых цилиндрических оболочек малой и большой эксцентрисичности, которые широко используются в аэрокосмических и механических инженерных приложениях [100].

В связи с этим возникает необходимость разработки эффективных методов решения соответствующих краевых задач данного класса, в том числе задач для цилиндрических оболочек, поперечное сечение которых описывается аналитическими выражениями. К таким задачам относятся задачи статики цилиндрических оболочек с эллиптическим и гофрированным поперечными сечениями [77 – 79, 92 – 95].

Ниже предложен подход к решению более сложных задач для некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. В качестве исходных принимаются уравнения теории оболочек Муштари – Доннелла – Власова.

1. Первую квадратичную форму для срединной поверхности некруговой цилиндрической оболочки представим в виде

$$dS^2 = ds^2 + \gamma^2(\theta)d\theta^2, \quad \gamma d\theta = dt, \quad (3.1)$$

где s – длина по образующей; θ – центральный угол в поперечном сечении; t – длина дуги по направляющей; $\gamma(\theta)$ – коэффициент перехода от длины дуги t к углу θ .

В полярной системе координат направляющую срединной поверхности (рис. 7) задаем следующим образом:

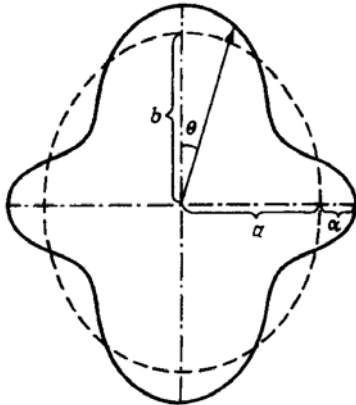


Рис. 7

$$r(\theta) = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} + \alpha \cos k\theta \quad (3.2)$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

$$e = \sqrt{1 - (a/b)^2} = 2\sqrt{\Delta} / (1 + \Delta)$$

$$(\Delta = (b - a) / (b + a)), \quad (3.3)$$

где $(b > a)$, a , b , e – полуоси и эксцентриситет эллипса; α – амплитуда; k – частота гофрировки; точка O ($r = 0$) находится на пересечении осей

эллипса. При $\alpha = 0$ кривая (3.2) описывает эллипс, а при $a = b$ – гофрированную окружность.

В выбранной полярной системе координат радиус кривизны в поперечном сечении запишем в виде

$$R_\theta = R(\theta) = \frac{[r^2 + (r')^2]^{3/2}}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}; \quad r' = - \left[\frac{ae^2 \sin 2\theta}{2(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} + \alpha k \sin k\theta \right]; \quad (3.4)$$

$$r'' = - \left\{ \frac{ae^2}{2} \left[\frac{2 \cos 2\theta}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} - \frac{3e^2 \sin^2 \theta}{2(1 - e^2 \cos^2 \theta)^{5/2}} \right] + \alpha k^2 \cos k\theta \right\}.$$

Разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных в координатах s , θ представим в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{14} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + a_{16} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{17} w + a_{18} \frac{\partial w}{\partial s};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= a_{21} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + a_{24} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{25} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{26} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{27} w + a_{28} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\
\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= a_{31} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{32} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{33} w + a_{34} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{35} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + a_{36} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \\
&+ a_{38} \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} + a_{39} \frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{3,10} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + a_{3,11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} + a_{3,12} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + a_{3,13} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + b_1,
\end{aligned} \quad (3.5)$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности по образующей, направляющей и нормали, а коэффициенты a_{ij} и b_1 приведены в [79].

Торцы оболочки жестко закреплены, т.е. на торцах $s = 0$ и $s = l$ заданы следующие граничные условия:

$$u = v = w = \vartheta_s = 0 \quad \text{при } s = 0, l \quad (\vartheta_s - \text{угол поворота нормали}). \quad (3.6)$$

Решение краевой задачи основано на сплайн-аппроксимации решения в направлении по образующей и сведении двумерной задачи к одномерной, решение которой с координатным направлением по направляющей осуществляется устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Тогда решение краевой задачи (3.5), (3.6) находим в виде

$$u(s, \theta) = \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \psi_{1i}(s); \quad v(s, \theta) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \psi_{2i}(s); \quad w(s, \theta) = \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \psi_{3i}(s), \quad (3.7)$$

где $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta)$ ($i = \overline{0, N}$) – неизвестные функции, а $\psi_{ni}(s)$ ($n = 1, 2, 3$) – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени для $n = 1, 2$ и пятой степени для $n = 3$, с помощью которых можно точно удовлетворить некоторым граничным условиям на торцах. Удовлетворяя граничные условия (3.6), для B -сплайнов в решениях (3.7) строим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\psi_{10}(s) &= -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); \quad \psi_{11}(s) = B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s); \\
\psi_{1j}(s) &= B_3^j(s) \quad (j = \overline{2, N-2}); \quad \psi_{1, N-1}(s) = B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); \\
\psi_{1N}(s) &= -4B_3^{N+1}(s) + B_3^N(s); \quad \psi_{20}(s) = -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); \\
\psi_{21}(s) &= B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s); \quad \psi_{2j}(s) = B_3^j(s) \quad (j = \overline{2, N-2}); \\
\psi_{2, N-1}(s) &= B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); \quad \psi_{2N}(s) = -4B_3^{N+1}(s) + B_3^N(s); \\
\psi_{30}(s) &= \frac{165}{4} B_5^{-2}(s) - \frac{33}{8} B_5^{-1}(s) + B_5^0(s); \quad \psi_{31}(s) = B_5^{-1}(s) - \frac{26}{33} B_5^0(s) + B_5^1(s); \\
\psi_{32}(s) &= B_5^{-2}(s) - \frac{1}{33} B_5^0(s) + B_5^2(s); \quad \psi_{3i}(s) = B_5^i(s), (i = \overline{3, N-3}); \\
\psi_{3, N-2}(s) &= B_5^{N+2}(s) - \frac{1}{33} B_5^N(s) + B_5^{N-2}(s); \quad \psi_{3, N-1}(s) = B_5^{N+1}(s) - \frac{26}{33} B_5^N(s) + B_5^{N-1}(s); \\
\psi_{3, N}(s) &= \frac{165}{4} B_5^{N+2}(s) - \frac{33}{8} B_5^{N+1}(s) + B_5^N(s),
\end{aligned} \quad (3.8)$$

где B_3^j ($j = \overline{-1, N+1}$) – кубические B -сплайны; B_5^j ($j = \overline{-2, N+2}$) – сплайны пятой степени, построенные на равномерной сетке.

Подставляя выражения (3.7) в дифференциальные уравнения системы (3.5) и требуя их удовлетворения в точках коллокации $s = s_m$ ($m = \overline{0, N}$), т.е. в $N+1$ сечении, после некоторых преобразований получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{d\bar{U}}{d\theta} = A(\theta)\bar{U} + \bar{f}(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (3.9)$$

$$(\bar{U} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}^T = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6, \bar{u}_7, \bar{u}_8\}^T; \bar{u}_p = \{u_{p_0}, u_{p_1}, \dots, u_{p_N}\}^T; p = \overline{1, 8}).$$

В случае замкнутой по направляющей оболочки формулируем условия периодичности или симметрии, а для открытой оболочки задаем граничные условия на прямолинейных краях.

Краевую задачу для системы уравнений (3.9) с соответствующими условиями по θ решаем методом дискретной ортогонализации. Подставляя найденные значения функций $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta)$ ($i = \overline{0, N}$) в выражения (3.7), получаем решение исходной краевой задачи для перемещений, а по ним вычисляются все факторы напряженно-деформированного состояния оболочки.

2. На основании данного подхода решены задачи и проведено исследование напряженно-деформированного состояния некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллипсом поперечным сечением в зависимости от степени эллиптичности, гофрировки и толщины.

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии замкнутой оболочки под действием равномерного давления $q_y = q_0$ с жестко закрепленными торцами. Для цилиндрических оболочек, у которых периметр поперечного сечения срединной поверхности равен длине окружности радиуса R имеют место равенства

$$\begin{aligned} \pi(a+b)f &= 2\pi R; \\ f &= 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots; \quad a = \frac{R}{f}(1-\Delta); \\ b &= \frac{R}{f}(1+\Delta). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Задачу решаем при следующих данных: $R = 20$; $l = 30$; $k = 4$ (Δ , α и h принимали значения, указанные на рис. 8 – 10 и в табл. 4). На рис. 8, а, б, в при $\Delta = 0,1$ ($b/a = 11/9$) для $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ и $h = 0,4; 0,5; 0,6$ дано распределение прогиба w в среднем сечении оболочки $s = 15$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Из приведенных на рис. 8, а графиков следует, что при небольшой степени эллиптичности и малой величине амплитуды гофра ($\alpha/R = 0,005$) при $\theta = 0$ (вершина большой оси) оболочка прогибается в направлении, противоположном действию приложенной нагрузки, а при $\theta \approx 0,28\pi$ (в центре данного интервала) прогиб достигает максимума. По абсолютной величине

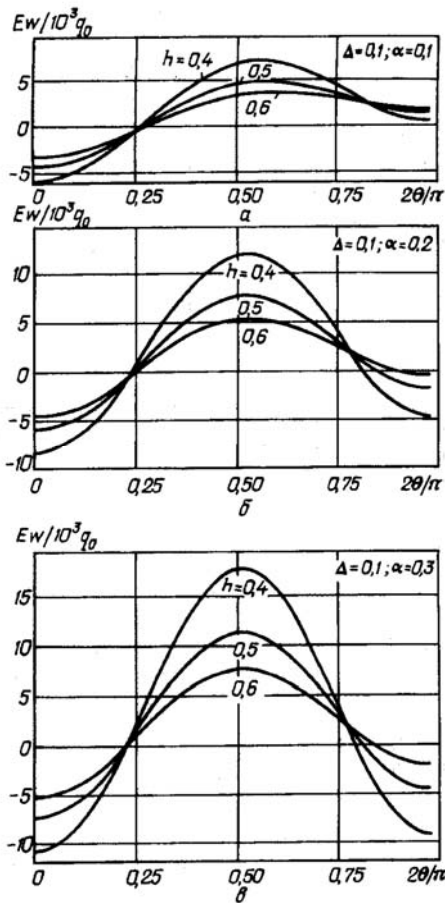


Рис. 8

не прогибы при $\theta = 0$ и $\theta \approx 0,28\pi$ примерно равны. При $\theta = \pi/2$ (вершина малой оси эллипса) за счет эллиптичности прогиб совпадает с направлением действия нагрузки, но по величине очень мал. Из рис. 8, б следует, что с увеличением амплитуды гофра до $\alpha = 0,2$ ($\alpha/R = 0,010$) при тех же значениях Δ и h имеем следующую картину: максимальный прогиб в окрестности $\theta \approx 0,28\pi$ увеличивается почти в два раза по сравнению с прогибом при $\alpha = 0,1$; при $\theta = 0$ прогиб направлен противоположно приложенной нагрузке и по величине несколько меньше, чем при $\theta \approx 0,28\pi$; при $\theta = \pi/2$ прогиб по величине меньше, чем при $\theta = 0$, но уже также направлен в противоположном действии нагрузки направлении. В данном случае увеличивается влияние гофрировки. Из рис. 8, в следует, что при $\alpha = 0,3$ ($\alpha/R = 0,015$) и тех же значениях Δ и h наблюдается увеличение максимального прогиба при $\theta \approx 0,28\pi$, который почти в полтора раза больше по сравнению с прогибом при $\alpha = 0,2$; при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ прогиб направлен в сторону, противоположную действию нагрузки, и по величине в полтора раза меньше максимального (при $\theta \approx 0,28\pi$).

Следовательно, с увеличением амплитуды гофра до $\alpha = 0,3$ гофрировка оказывает большее влияние на деформирование оболочки по сравнению с эллиптичностью, даже при достаточно малой величине α/R .

На рис. 9, а, б, в показаны графики прогиба оболочки в среднем сечении $s = l/2 = 15$ при $\Delta = 0,2$ ($b/a = 3/2$) для $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ и $h = 0,4, 0,5, 0,6$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Из рис. 9, а видно, что при $\alpha = 0,1$ ($\alpha/R = 0,005$) наибольшее значение прогиб принимает при $\theta \approx 0,28\pi$, а при $\theta = 0$ он немного меньше по величине, но с противоположным знаком. При $\theta = \pi/2$ прогиб направлен в сторону действия приложенной нагрузки и вдвое меньше по величине, чем при $\theta = 0$. Здесь оказывает влияние эллиптичность.

Из рис. 9, б следует, что при $\alpha = 0,2$ ($\alpha/R = 0,01$) максимальный при $\theta \approx 0,28\pi$ прогиб увеличивается почти в два раза по сравнению с прогибом при $\alpha = 0,1$, а при $\theta = 0$ — почти вдвое меньше и направлен в противоположную сторону. А при $\theta = \pi/2$ для $h = 0,5; 0,6$ направление прогиба еще совпадает с направлением действия нагрузки, но уже для $h = 0,4$ прогиб по величине мал, но по направлению не совпадает с действием нагрузки, т.е. оболочка прогибается в сторону против действия нагрузки.

Здесь уже проявляется влияние увеличения амплитуды гофра. Из рис. 9, в имеем, что при $\alpha = 0,3$ ($\alpha/R = 0,015$) максимальный прогиб при $\theta \approx 0,28\pi$ немного больше, а при $\theta = 0$ — вдвое меньше, чем при $\alpha = 0,2$.

При $\theta = 0$ оболочка прогибается в противоположную сторону. При $\theta = \pi/2$ прогиб немного отличается от прогиба при $\theta = 0$, но совпадает по направлению.

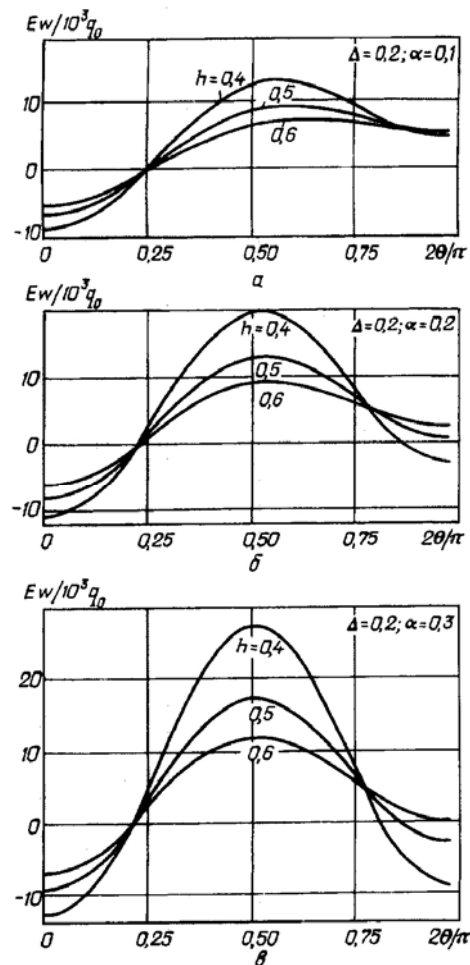


Рис. 9

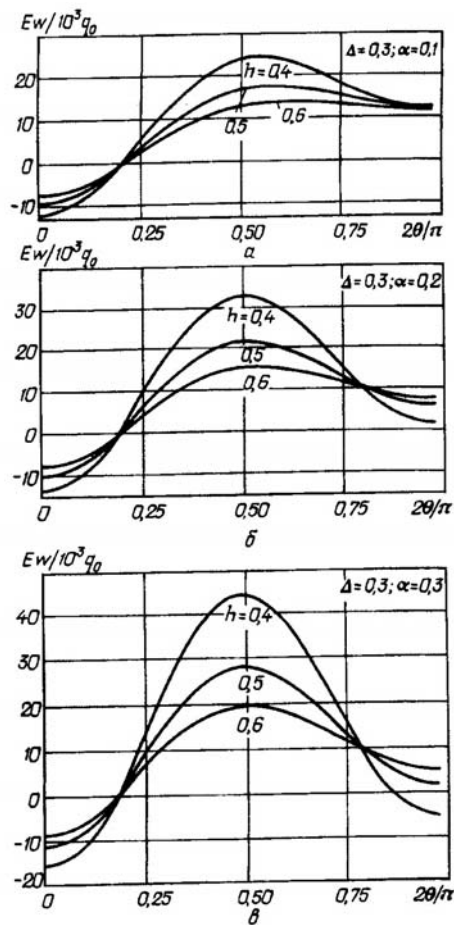


Рис. 10

максимальных прогибов увеличивается в полтора – два раза. Это объясняется тем, что влияние эллиптичности незначительно по сравнению с влиянием увеличения амплитуды гофра.

Решение некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии некруговых цилиндрических оболочек представлено в [77 – 79].

В табл. 4 приведены значения напряжений σ_θ^+ и σ_θ^- , соответственно, на внешней и внутренней поверхностях оболочки для ранее указанных значений Δ и h и для $\alpha = 0,1; 0,3$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Из таблицы видно, какие значения напряжений соответствуют приведенным на рис. 8 – 10 величинам прогибов. Отметим, что если при $\Delta = 0,1$ и $\theta = 0$ напряжения σ_θ^+ минимальны, то уже при $\Delta \geq 0,2$ они значительно увеличиваются по абсолютной величине, но с противоположным знаком, что соответствует сжатию. А при $\theta = \pi/2$ для $\Delta = 0,1; 0,2$ напряжение σ_θ^+ – положительное, что соответствует растяжению, но уже при $\Delta \geq 0,3$ оно меняет знак на противоположный. Наибольшее значение σ_θ^+ принимает при $\theta \approx 0,6\pi/2$, что соответствует растяжению.

Подобная картина наблюдается для $h = 0,5; 0,6$. Напряжения σ_θ^- в большинстве соответствуют растяжению и только для некоторых значений при $\theta \approx 0,6\pi/2$ соответствуют сжатию. По величине напряжения σ_θ^- достигают больших значений, чем σ_θ^+ .

Из рис. 10, а видно, что при $\alpha = 0,1$ ($\alpha/R = 0,005$) максимум прогиба достигается при $\theta \approx 0,28\pi$, а при $\theta = 0$ – вдвое меньше и направлен в противоположную сторону, при $\theta = \pi/2$ – почти такой же по величине, как при $\theta = 0$, но совпадает по направлению с максимальным прогибом.

При $\alpha = 0,2$ ($\alpha/R = 0,01$) (рис. 10, б) максимальный прогиб при $\theta \approx 0,28\pi$ в полтора раза больше, чем при $\alpha = 0,1$, а при $\theta = 0$ – в три раза меньше максимального и направлен в противоположную сторону.

Из рис. 10, в видно, что при $\alpha = 0,3$ ($\alpha/R = 0,015$) максимальный прогиб при $\theta \approx 0,28\pi$ вдвое больше, чем при $\alpha = 0,1$, и в 4/3 раза больше, чем при $\alpha = 0,2$. При $\theta = 0$ прогиб в четыре раза меньше, чем максимальный и направлен в противоположную сторону. При $\theta = \pi/2$ прогиб при $h = 0,5; 0,6$ совпадает по направлению с действием нагрузки, а при $h = 0,4$ направлен в противоположную сторону. Из рис. 10 следует, что при $\theta = 0$ прогибы по величине и направлению почти одинаковы при всех значениях α .

По сравнению с графиками, приведенными на рис. 10, величина максимальных прогибов увеличивается в полтора – два раза.

Таблица 4

h	2θ/π	α = 0,1			α = 0,3		
		Δ = 0,1	Δ = 0,2	Δ = 0,3	Δ = 0,1	Δ = 0,2	Δ = 0,3
σ_{θ}^{+}							
0,4	0	1,36	-20,54	-55,2	-45,71	-55,82	-86,12
	0,2	19,44	3,65	-2,14	-8,11	-33,28	-50,13
	0,4	75,83	96,66	146,61	135,21	172,5	261,07
	0,6	105,61	149,8	211,2	192,75	279,01	381,79
	0,8	57,49	74,26	87,7	38,46	19	-12,16
	1	16,72	8,45	-12,96	-99,34	-179,99	-311,68
0,5	0	-2,8	-25,06	-58,22	-44,27	-61,03	-94,31
	0,2	15,64	0,08	0,11	-2,24	-17,21	-23,66
	0,4	61,07	77,51	115,25	109,07	137,47	199,91
	0,6	81,64	114,07	159,97	143,16	196,56	275,76
	0,8	47,66	64,04	80,55	22,49	21,79	7,23
	1	19,58	20,82	15,68	-65,48	-111,79	-189,47
0,6	0	-3,99	-25,48	-56,52	-38,41	-56,97	-89,34
	0,2	12,82	2,5	-0,56	0,4	-10,26	-13,29
	0,4	50,12	63,51	93,8	88,54	110,88	158,15
	0,6	66,06	91,95	129,13	111,57	150,52	204,53
	0,8	41,46	57,42	75,16	21,5	24,37	192,86
	1	21,18	27,23	30,38	-43,43	-71,06	-119,16
σ_{θ}^{-}							
0,4	0	70,31	72,77	92,86	113,19	104,61	120,71
	0,2	62,5	71,68	83,65	92,03	113,41	139,53
	0,4	26,47	21,72	8,44	-24,95	-45,25	-97,36
	0,6	12,76	0	-11,02	-70,31	-128,82	-183,33
	0,8	69,34	92,26	133,98	84,87	141,16	225,14
	1	112,61	163,23	241,06	221,46	342,56	529,05
0,5	0	61,02	67,98	89,8	100,51	102,66	124,96
	0,2	50,03	58,16	64,4	69,32	80,48	93
	0,4	19,93	15,97	7,01	-23,52	-39,02	-73
	0,6	12,47	5,23	-0,61	-46,99	-77,07	-119,34
	0,8	54,05	69,46	96,92	76,87	107,49	164,62
	1	84,55	117,16	167,25	165,24	244,05	365,74
0,6	0	53,13	62,07	83,91	86,71	93,36	116,84
	0,2	42	47,56	53,95	55,49	62,53	69,79
	0,4	16,88	13,61	6,78	-18,85	-30,91	-55
	0,6	11,98	6,94	2,82	-32,51	-51,91	-74
	0,8	43,39	53,79	7,23	61,72	83,89	124,44
	1	65,92	87,92	121,85	127,74	182,42	267,06

§4. Свободные колебания прямоугольных пластин переменной толщины (классическая постановка).

Основные соотношения. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях прямоугольной ортотропной пластины переменной толщины $h(x, y)$ в прямоугольной системе координат (координатная плоскость Oxy является срединной плоскостью пластины) [39].

Задачу формулируем в рамках теории Кирхгофа – Лява. При предположениях этой теории уравнения колебаний запишем в виде [4]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad (4.1)$$

где x, y – прямоугольные декартовы координаты ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$); t – время; w – прогиб пластины; ρ – плотность материала.

Для моментов M_x, M_y, M_{xy} и перерезывающих усилий Q_x и Q_y имеем соотношения

$$\begin{aligned} M_x &= -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & Q_x &= -\left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ M_y &= -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & Q_y &= -\left[D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]; \\ M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

в которых жесткостные характеристики пластины D_{ij} определяются по формулам

$$D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3(x, y)}{12}; \quad B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{66} = G_{12}.$$

Здесь $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона.

Из системы уравнений (4.1), (4.2) получаем эквивалентное ей дифференциальное уравнение относительно прогиба w

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{22}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial y} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

На сторонах $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ задаем граничные условия, выраженные через прогиб. При $y = \text{const}$ задаем такие граничные условия:

1) контуры жестко закреплены

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \quad (4.4)$$

2) контуры шарнирно оперты

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b; \quad (4.5)$$

3) один контур шарнирно опертый, а другой – жестко закреплен

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = b. \quad (4.6)$$

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах $x = \text{const}$.

Метод решения. Решение уравнения (4.3) представим в виде

$$w = \sum_{i=0}^N w_i(x) \psi_i(y), \quad (4.7)$$

где $w_i(x)$ ($i = \overline{1, N}$) – неизвестные функции; $\psi_i(y)$ – функции, построенные с помощью B -сплайнов пятой степени ($N \geq 6$). Выбор функций $\psi_i(y)$ обуславливается требованием удовлетворения граничным условиям при $y = \text{const}$ с помощью линейных комбинаций B -сплайнов:

$$\psi_0(y) = \alpha_{11} B_5^{-2}(y) + \alpha_{12} B_5^{-1}(y) + B_5^0(y); \quad \psi_1(y) = \alpha_{21} B_5^{-1}(y) + \alpha_{22} B_5^0(y) + B_5^1(y);$$

$$\psi_2(y) = \alpha_{31} B_5^{-2}(y) + \alpha_{32} B_5^0(y) + B_5^2(y); \quad \psi_i(y) = B_5^i(y), \quad i = 3, 4, \dots, N-3; \quad (4.8)$$

$$\psi_{N-2}(y) = \beta_{31} B_5^{N+2}(y) + \beta_{32} B_5^N(y) + B_5^{N+2}(y); \quad \psi_{N-1}(y) = \beta_{21} B_5^{N+1}(y) + \beta_{22} B_5^N(y) + B_5^{N-1}(y);$$

$$\psi_N(y) = \beta_{11} B_5^{N+2}(y) + \beta_{12} B_5^{N+1}(y) + B_5^N(y),$$

где $B_5^i(y)$ ($i = -2, \dots, N+2$, i – номер сплайна) – сплайны, которые построены на равномерной сетке Δ с шагом h_y : $y_{-5} < y_{-4} < \dots < y_N < y_{N+5} < \dots < y_{N+5}$; $y_0 = 0$; $y_N = b$:

$$B_5^i(y) = \frac{1}{120} \begin{cases} 0, & \infty < y < y_{i-3}; \\ z^5, & y_{i-3} \leq y < y_{i-2}; \\ -5z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1, & y_{i-2} \leq y < y_{i-1}; \\ 10z^5 - 20z^4 - 20z^3 + 20z^2 + 50z + 26, & y_{i-1} \leq y < y_i; \\ -10z^5 + 30z^4 - 60z^2 + 66, & y_i \leq y < y_{i+1}; \\ 5z^5 - 20z^4 + 20z^3 + 20z^2 - 50z + 26, & y_{i+1} \leq y < y_{i+2}; \\ (1-z)^5, & y_{i+2} \leq y < y_{i+3}; \\ 0, & y_{i+3} \leq y < \infty, \end{cases}$$

где $z = (y - y_k) / h_y$ на интервале $[y_k, y_{k+1}]$, $k = \overline{i-3, i+2}$; $i = \overline{-3, N+2}$; $h_y = y_{k+1} - y_k = \text{const}$; α_{ij} и β_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) – постоянные коэффициенты, которые определяются в зависимости от заданных граничных условий на краях пластины $y = 0$ и $y = b$, соответственно.

$$\text{Обозначим } A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}, \quad A_\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix}. \quad \text{Тогда при условиях жесткого за-}$$

крепления на краях $y = 0$, $y = b$ имеем

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} 165/4 & -33/8 \\ 1 & -26/33 \\ 1 & -1/33 \end{bmatrix};$$

при условиях шарнирного опирания на краях $y = 0$, $y = b$ –

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

а при условиях (4.6) на краях пластин –

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 165/4 & -33/8 \\ 1 & -26/33 \\ 1 & -1/33 \end{bmatrix}; \quad A_\beta = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4.3) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = & a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + a_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_7 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + a_8 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + a_9 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{10} w, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $a_i = a_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, 9$, $a_{10} = a_{10}(x, y, \omega)$.

Подставив представление (4.7) в уравнение (4.9), потребуем его удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, b]$, $k = 0, N$. Рассмотрим случай, когда число узлов сетки четное, т. е. $N = 2n + 1$ ($n \geq 3$), а узлы коллокации удовлетворяют условиям $\xi_{2i} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$, ($i = 0, 1, \dots, n$). Тогда на отрезке $[y_{2i}, y_{2i+1}]$ имеем по два узла коллокации, а на соседних отрезках $[y_{2i+1}, y_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков $[y_{2i}, y_{2i+1}]$ точки коллокации выбираем следующим образом: $\xi_{2i} = x_{2i} + z_1 h_y$, $\xi_{2i+1} = y_{2i} + z_2 h_y$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), где z_1 и z_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$: $z_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$, $z_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно увеличивает порядок точности аппроксимации. В результате получаем систему $N + 1$ линейных дифференциальных уравнений относительно w_i . Если ввести обозначения

$$\Psi_j = [\psi_i^{(j)}(\xi_k)] \quad (k, i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, 4);$$

$$\bar{w} = \{w_0, w_1, \dots, w_N\}^T; \quad \bar{a}_r^T = \{a_r(x, \xi_0), a_r(x, \xi_1), \dots, a_r(x, \xi_N)\} \quad (r = 1, \dots, 9);$$

$$\bar{a}_{10}^T = \{a_{10}(x, \xi_0, \omega), a_{10}(x, \xi_1, \omega), \dots, a_{10}(x, \xi_N, \omega)\},$$

а также для матрицы $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 0, \dots, N$) и вектора обозначить через $\bar{c} * A$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}^{IV} = & \Psi_0^{-1} (\bar{a}_7 * \Psi_4 + \bar{a}_8 * \Psi_3 + \bar{a}_9 * \Psi_2 + \bar{a}_{10} * \Psi) \bar{w} + \\ & + \Psi_0^{-1} (\bar{a}_5 * \Psi_2 + \bar{a}_6 * \Psi_1) \bar{w}' + \Psi_0^{-1} (\bar{a}_2 * \Psi_3 + \bar{a}_3 * \Psi_1 + \\ & + \bar{a}_4 * \Psi_0) \bar{w}'' + \Psi_0^{-1} (\bar{a}_1 * \Psi_0) \bar{w}'''. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Данную систему можно привести к нормальному виду

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x, \omega)\bar{Y} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (4.11)$$

$$(\bar{Y} = \{w_1, w_2, \dots, w_{N+1}, w'_1, w'_2, \dots, w'_{N+1}, w''_1, w''_2, \dots, w''_{N+1}, w'''_1, w'''_2, \dots, w'''_{N+1}\}^T);$$

$w_K^{(I)} = w^{(I)}(x, \xi_K)$, $K = 1, \dots, N+1$; $I = 1, 2, 3$; $A(x, \omega)$ – квадратная матрица порядка $(N+1) \times (N+1)$.

Граничные условия для данной системы запишем в виде

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{b}_1; \quad B_2 \bar{Y}(a) = \bar{b}_2 \quad (\bar{b}_1, \bar{b}_2 - \text{нулевые векторы}). \quad (4.12)$$

Анализ численных результатов. Задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.11) с граничными условиями (4.12) решаем методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [21, 76].

На основании предлагаемой методики исследован спектр собственных колебаний квадратной пластины переменной толщины при различных граничных условиях на краях пластины. Толщина пластины изменялась по закону $h(x) = [\alpha(6x^2 - 6x + 1) + 1] h_0$. Формы поперечного сечения пластины имеют вид



Материал пластины – ортотропный тканевый стеклопластик с модулями Юнга $E_1 = 4,76 \cdot 10^4$ МПа и $E_2 = 2,07 \cdot 10^4$ МПа, модулем сдвига $G_{12} = 0,531 \cdot 10^4$ МПа и коэффициентами Пуассона $\nu_1 = 0,149$ и $\nu_2 = 0,0647$. Полученные по методу сплайн-коллокации безразмерные частоты $\bar{\omega} = \omega a^2 (\rho h / D_0)^{1/2}$; $D_0 = (h_0^3 / 12) \cdot 10^4$ МПа для жестко закрепленной пластины при различном числе точек коллокации ($N = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$) незначительно отличаются (табл. 5) между собой.

Таблица 5

ω	N						
	10	12	14	16	18	20	22
$\alpha = 0$							
ω_1	61,139	61,132	61,129	61,127	61,127	61,127	61,127
ω_2	107,188	107,066	107,016	106,994	106,982	106,976	106,972
ω_3	142,550	142,537	142,532	142,530	142,529	142,528	142,528
$\alpha = 0,3$							
ω_1	62,108	62,102	62,099	62,099	62,098	62,098	62,098
ω_2	97,737	97,637	97,598	97,580	97,570	97,566	97,562
ω_3	145,289	145,276	145,271	145,269	145,268	145,268	145,267

Таблица 6

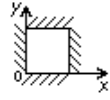
Граничные условия	ω	α					
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
A	ω_1	58,375	59,012	59,605	60,159	60,674	61,139
	ω_2	121,526	119,010	116,240	113,311	110,281	107,188
	ω_3	124,339	129,656	134,030	137,585	140,405	142,550
B	ω_1	50,227	51,605	52,905	54,129	54,270	56,320
	ω_2	102,334	100,723	98,953	97,083	95,147	93,166
	ω_3	121,396	126,863	131,384	135,083	138,045	140,330
C	ω_1	52,733	52,211	51,624	50,995	50,337	49,659
	ω_2	109,151	112,403	110,490	107,334	104,080	100,783
	ω_3	116,222	113,496	114,497	116,613	117,777	118,403
D	ω_1	43,939	44,009	43,998	43,923	43,790	43,607
	ω_2	97,299	95,178	92,905	90,549	88,155	85,755
	ω_3	105,958	109,322	111,879	113,750	115,019	115,748
E	ω_1	48,701	47,412	46,059	4,676	43,289	41,918
	ω_2	95,664	97,177	97,994	98,235	97,985	96,671
	ω_3	113,313	110,306	107,049	103,676	100,170	97,306
G	ω_1	45,045	46,929	48,698	50,354	51,893	53,306
	ω_2	85,738	85,046	84,248	83,378	82,453	81,479
	ω_3	119,425	124,989	129,605	133,396	136,448	138,819

Таблица 7

Граничные условия	ω	α				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
A	ω_1	61,542	61,871	62,108	62,237	62,238
	ω_2	104,058	100,904	97,737	94,557	91,364
	ω_3	144,062	144,968	145,289	145,035	144,212
B	ω_1	57,266	58,096	58,791	59,339	59,724
	ω_2	91,149	89,104	87,026	84,911	82,749
	ω_3	144,977	143,017	143,469	138,723	131,720
C	ω_1	48,965	48,257	47,535	46,801	46,051
	ω_2	97,477	94,187	90,928	87,713	84,546
	ω_3	118,535	118,208	117,477	116,269	114,688
D	ω_1	43,376	43,098	42,744	42,402	41,982
	ω_2	83,369	81,013	78,694	76,420	74,190
	ω_3	115,981	115,752	115,085	113,998	112,506
E	ω_1	40,583	39,297	38,077	36,933	35,878
	ω_2	93,185	89,743	86,364	83,065	79,858
	ω_3	96,249	94,852	93,149	91,160	88,934
G	ω_1	54,586	55,718	56,642	57,495	58,109
	ω_2	80,460	79,389	78,258	77,055	75,765
	ω_3	140,291	134,815	129,283	123,717	118,135

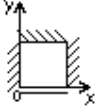
В табл. 6, 7 приведены безразмерные частоты $\bar{\omega}_i$ ($i = 1, 2, 3$) (упорядоченные по значению), соответственно, при $\alpha \leq 0$ и $\alpha > 0$ для ортотропной квадратной пластины:

1) жестко закрепленной по всем краям; граничные условия типа А:



$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = a; \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a;$$

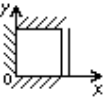
2) жестко закрепленной по трем сторонам и шарнирно опертой по четвертой стороне; граничные условия типа В:



$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0;$$

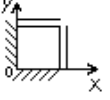
и граничные условия типа С:



$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

при $x = a$;

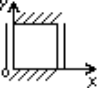
3) жестко закрепленной по двум сторонам и шарнирно опертой по двум другим сторонам; граничные условия типа D:



$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

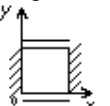
$$\text{при } x = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a;$$

граничные условия типа Е:



$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a;$$

и граничные условия типа G:



$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a.$$

Количество точек коллокации $N = 10$. Графики зависимости безразмерной частоты $\bar{\omega}_i$ колебаний квадратной ортотропной пластины при различных типах граничных условий и различных значениях параметра α показаны на рис. 11 – 13.

Максимумы и минимумы на графиках частот $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_3$ соответствуют перестройке форм. Наибольшей частотой при всех рассмотренных граничных условиях на торцах пластины и различных значениях α является частота, которая соответ-

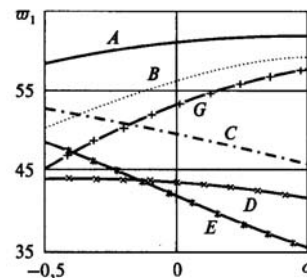


Рис. 11

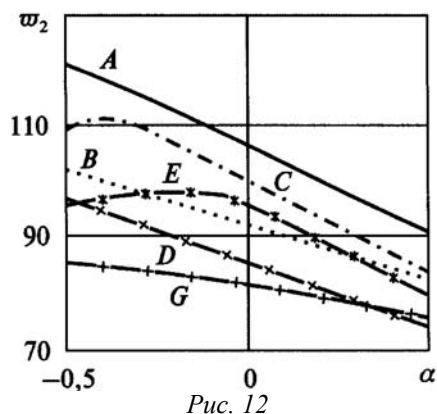


Рис. 12

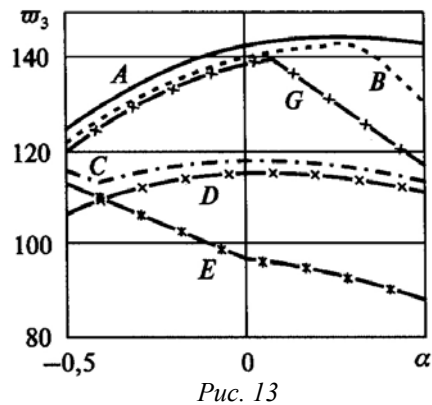


Рис. 13

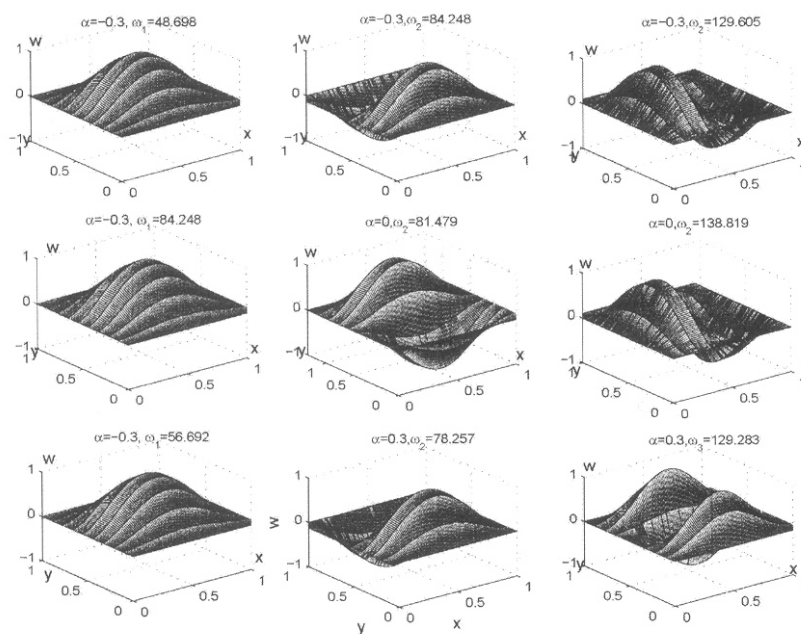


Рис. 14

ует жестко закрепленной пластине. Первая частота для граничных условий типа D мало изменяется по сравнению с другими случаями граничных условий. На рис. 14 показаны формы собственных колебаний пластины с граничными условиями типа G.

Решения задач о свободных колебаниях пластин и пологих оболочек с переменной толщиной по предложенной методике на основе классической теории представлены в [12, 34, 35, 50].

§5. Свободные колебания конических оболочек с переменными параметрами (классическая постановка).

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях изотропной конической оболочки переменной толщины $h(x, y)$ в криволинейной ортогональной системе координат (s, θ) , где s – длина дуги меридиана; θ – центральный угол в параллельном круге. Параметры Ламе в данном случае равны: $A = 1$, $B = r$. Радиусы

главных кривизн R_s, R_θ равны, соответственно: $R_s = 0; R_\theta = r / \sin \varphi$, где r – радиус в параллельном круге; φ – угол, образованный нормалью к срединной поверхности и осью вращения.

Согласно теории тонких оболочек Кирхгофа – Лява уравнения, описывающие свободные колебания конических оболочек, имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(r N_s) + \frac{\partial S}{\partial \theta} - \cos \varphi N_\theta &= r \rho h \frac{\partial^2 u(s, \theta, t)}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial s}(r S) + \cos \varphi S + \sin \varphi \left(Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial s} \right) &= r \rho h \frac{\partial^2 v(s, \theta, t)}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial s}(r Q_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin \varphi N_\theta &= r \rho h \frac{\partial^2 w(s, \theta, t)}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial s}(r M_s) + \frac{\partial H}{\partial \theta} - \cos \varphi M_\theta - r Q_s &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial s}(r H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi H - r Q_\theta = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В уравнениях (5.1) s, θ – криволинейные ортогональные координаты точки срединной поверхности ($s_0 \leq s \leq s_a, 0 \leq \theta \leq b$); t – время; u, v, w – перемещения точек срединной поверхности; ρ – плотность материала. Связь между деформациями и перемещениями имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \quad \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v; \quad \chi_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \\ \chi_\theta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s}; \quad \chi_{s\theta} = \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для нормальных и сдвигающего усилий N_s, N_θ и S , изгибающих и крутящего моментов M_s, M_θ и H при условии изотропного материала оболочек справедливы такие соотношения упругости

$$\begin{aligned} N_s = D_N(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = D_N(\nu \varepsilon_s + \varepsilon_\theta); \quad S = \frac{1-\nu}{2} D_N \varepsilon_{s\theta}; \\ M_s = D_M(\chi_s + \nu \chi_\theta); \quad M_\theta = D_M(\nu \chi_s + \chi_\theta); \quad H = D_M(1-\nu) \chi_{s\theta}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для жесткостных коэффициентов оболочки имеем формулы $D_N = Eh / (1-\nu)$; $D_M = Eh^3 / [12(1-\nu)]$, где E, ν – соответственно, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Перемещения $u(s, \theta, t), v(s, \theta, t), w(s, \theta, t)$ при рассмотрении малых колебаний срединной поверхности представим в виде гармонических функций

$$u(s, \theta, t) = u(s, \theta) e^{-i\omega t}; \quad v(s, \theta, t) = v(s, \theta) e^{-i\omega t}; \quad w(s, \theta, t) = w(s, \theta) e^{-i\omega t}, \quad (5.4)$$

где ω – частота свободных колебаний.

Из системы уравнений (5.1) – (5.3) с учётом (5.4) получим три эквивалентных дифференциальных уравнения относительно трех перемещений u, v и w для точек срединной поверхности оболочки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = F_u \left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \omega \right);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = F_v \left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \omega \right); \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = F_w \left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta}, \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}, \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2}, \omega \right),$$

где F_u, F_v, F_w – линейные дифференциальные операторы.

На контурах $s = s_0, s_a$ и $\theta = 0, b$ заданы граничные условия в перемещениях. На контурах $s = \text{const}$ могут быть заданы такие граничные условия:

1) жестко закрепленный контур

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} \quad \text{при} \quad s = s_0, \quad s = s_a; \quad (5.6)$$

2) шарнирно опертый контур

$$v = \frac{\partial u}{\partial s} = w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad \text{при} \quad s = s_0, \quad s = s_a. \quad (5.7)$$

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах $\theta = \text{const}$:

1) жестко закрепленный контур

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad \theta = b; \quad (5.8)$$

2) шарнирно опертый контур

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad \theta = b. \quad (5.9)$$

Метод решения. Решение системы уравнений (5.5) представим в виде

$$u = \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_i(s); \quad v = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \chi_i(s); \quad w = \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \psi_i(s), \quad (5.10)$$

где $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta)$ ($i = 0, \dots, N$) – искомые функции; $\varphi_i(s), \chi_i(s)$ – функции, построенные с помощью B -сплайнов третьей степени ($N \geq 4$); $\psi_i(s)$ – функции, построенные с помощью B -сплайнов пятой степени ($N \geq 6$). Выбор функций $\varphi_i(s), \chi_i(s), \psi_i(s)$ обусловлен требованиями – удовлетворить граничным условиям при $s = \text{const}$ с помощью линейных комбинаций B -сплайнов 3-ой и 5-ой степени, соответственно.

Запишем систему уравнений (5.5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{14} u + a_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + a_{16} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{17} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ &\quad + a_{18} v + a_{19} \frac{\partial w}{\partial s} + a_{110} w + a_{111}(\omega) u; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{24} u + a_{25} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{27} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{28} v + a_{29} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\ &\quad + a_{210} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + a_{211} \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} + a_{212} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + a_{213} \frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{214} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{215} \frac{\partial w}{\partial s} + a_{216} w + a_{217}(\omega) v; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = a_{31} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{32} u + a_{33} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{34} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + a_{35} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} + a_{36} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \quad (5.11)$$

$$+ a_{38} \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} + a_{39} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + a_{310} \frac{\partial w}{\partial \theta} + a_{311} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + a_{312} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + a_{313} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{314} \frac{\partial w}{\partial s} + a_{315} w + a_{316}(\omega) w,$$

где приняты обозначения: $a_{1n} = a_{1n}(s, \theta)$, $a_{2m} = a_{2m}(s, \theta)$, $a_{3k} = a_{3k}(s, \theta)$; $n = 1, \dots, 10$, $m = 1, \dots, 16$, $k = 1, \dots, 15$, $a_{111} = a_{111}(s, \theta, \omega)$, $a_{217} = a_{217}(s, \theta, \omega)$, $a_{316} = a_{316}(s, \theta, \omega)$.

Подставив представление (5.10) в систему уравнений (5.11), требуем, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [s_a, s_b]$, $k = 0, \dots, N$. В случае четного числа узлов сетки ($N = 2n + 1$, $n \geq 3$) и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям: $\xi_{2i} \in [s_{2i}, s_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [s_{2i}, s_{2i+1}]$, ($i = 0, \dots, n$), на отрезке сетки $[s_{2i}, s_{2i+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2i+1}, s_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков сетки $[s_{2i}, s_{2i+1}]$ точки коллокации выбираем следующим образом: $\xi_{2i} = s_{2i} + z_1 h$, $\xi_{2i+1} = s_{2i} + z_2 h$, ($i = 0, \dots, n$), где h – шаг сетки; z_1 и z_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равняются: $z_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$ и $z_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $N + 1$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i, v_i, w_i . Если ввести обозначения

$$\Phi_l = [\varphi_i^{(l)}(\xi_k)], \quad X_l = [\chi_i^{(l)}(\xi_k)], \quad \Psi_m = [\psi_i^{(m)}(\xi_k)] \quad (i, k = 0, \dots, N, l = 0, \dots, 2, m = 0, \dots, 4);$$

$$\bar{u}^T = \{u_0, \dots, u_N\}; \quad \bar{v}^T = \{v_0, \dots, v_N\}; \quad \bar{w}^T = \{w_0, \dots, w_N\};$$

$$\bar{a}_{1r}^T = \{a_{1r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{1r}(\theta, \xi_N)\} \quad (r = 1, \dots, 10);$$

$$\bar{a}_{2r}^T = \{a_{2r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{2r}(\theta, \xi_N)\} \quad (r = 1, \dots, 16);$$

$$\bar{a}_{3r}^T = \{a_{3r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{3r}(\theta, \xi_N)\} \quad (r = 1, \dots, 15);$$

$$\bar{a}_{111}^T = \{a_{111}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{111}(\theta, \xi_N, \omega)\}; \quad \bar{a}_{217}^T = \{a_{217}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{217}(\theta, \xi_N, \omega)\};$$

$$\bar{a}_{316}^T = \{a_{316}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{316}(\theta, \xi_N, \omega)\},$$

а также для матрицы $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 0, \dots, N$) и вектора $\bar{c} = \{c_0, \dots, c_N\}$ обозначить через $\bar{c} \cdot A$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система дифференциальных уравнений (5.11) примет вид

$$\bar{u}'' = \Phi_0^{-1} \{(\bar{a}_{12} \cdot \Phi_2 + \bar{a}_{13} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{14} \cdot \Phi_0 + \bar{a}_{111} \cdot \Phi_0) \bar{u} + (\bar{a}_{11} \cdot \Phi_0) \bar{u}' + (\bar{a}_{17} \cdot X_1 + \bar{a}_{18} \cdot X_0) \bar{v} +$$

$$+ (\bar{a}_{15} \cdot X_1 + \bar{a}_{16} \cdot X_0) \bar{v}' + (\bar{a}_{19} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{110} \cdot \Psi_0) \bar{w}\};$$

$$\bar{v}'' = X_0^{-1} \{(\bar{a}_{23} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{24} \cdot \Phi_0) \bar{u} + (\bar{a}_{21} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{22} \cdot \Phi_0) \bar{u}' +$$

$$+ (\bar{a}_{26} \cdot X_2 + \bar{a}_{27} \cdot X_1 + \bar{a}_{28} \cdot X_0 + \bar{a}_{217} \cdot X_0) \bar{v} + (\bar{a}_{25} \cdot X_0) \bar{v}' +$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{a}_{214} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{215} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{216} \cdot \Psi_0) \bar{w} + (\bar{a}_{2111} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{212} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{213} \cdot \Psi_0) \bar{w}' + \\
& + (\bar{a}_{210} \cdot \Psi_0) \bar{w}'' + (\bar{a}_{29} \cdot \Psi_0) \bar{w}''';
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}''' = \Psi_0^{-1} \{ & (\bar{a}_{31} \cdot \Phi_1 + \bar{a}_{32} \cdot \Phi_0) \bar{u} + (\bar{a}_{33} \cdot X_0) \bar{v}' + (\bar{a}_{311} \cdot \Psi_4 + \bar{a}_{312} \cdot \Psi_3 + \bar{a}_{313} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{314} \cdot \Psi_1 + \\
& + \bar{a}_{315} \cdot \Psi_0 + \bar{a}_{316} \cdot \Psi_0) \bar{w} + (\bar{a}_{38} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{39} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{310} \cdot \Psi_0) \bar{w}' + \\
& + (\bar{a}_{35} \cdot \Psi_2 + \bar{a}_{36} \cdot \Psi_1 + \bar{a}_{37} \cdot \Psi_0) \bar{w}'' + (\bar{a}_{34} \cdot \Psi_0) \bar{w}''' \},
\end{aligned}$$

где $u_i^{(k)} = u^{(k)}(\theta, \xi_i)$; $v_i^{(k)} = v^{(k)}(\theta, \xi_i)$; $w_i^{(l)} = w^{(l)}(\theta, \xi_i)$ ($k = 0, \dots, 1$, $l = 0, \dots, 3$, $i = 0, \dots, N$).

Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений приводим к нормальному виду

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega) \bar{Y} \quad (0 \leq \theta \leq b), \tag{5.13}$$

где $Y^T = \{u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, w''_0, \dots, w''_N, w'''_0, \dots, w'''_N\}$, $A(\theta, p)$ – квадратная матрица порядка $8(N+1) \times 8(N+1)$.

Граничные условия (5.6) – (5.9) для системы (5.13) запишем в виде

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B_2 \bar{Y}(b) = \bar{0}. \tag{5.14}$$

Задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.13) с граничными условиями (5.14) решаем методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

С помощью вышеописанной методики исследован спектр свободных колебаний изотропных конических панелей.

Численные результаты и их анализ. Исследования колебаний проведены для незамкнутых изотропных конических оболочек (панелей) заданной геометрии (табл. 8); рассмотрено восемь вариантов, где приняты обозначения: L – длина образующей; R_1, R_2 – радиусы торцевых поверхностей; b – угол раствора конической панели; β_k – угол конусности. Толщина оболочек изменялась по следующему закону:

$$h = h_0(1 + \alpha \cos \theta) \quad (-0,5 \leq \alpha \leq 0,5), \tag{5.15}$$

где h_0 – толщина оболочки постоянной толщины и эквивалентной массы. В качестве материала рассматриваемых оболочек принята сталь с такими упругими характеристиками: $E = 2,14 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,2588$, $\rho = 7850$ кг/м³.

Расчеты частот колебаний конических панелей выполнены при следующих граничных условиях (5.6) – (5.9):

G_1 : жесткое закрепление по всему контуру – условия (5.6), (5.8);

G_2 : жесткое закрепление по трем сторонам – условия (5.6) и (5.8) при $\theta = b$ и шарнирное опирание по четвертой стороне – условие (5.7) при $\theta = 0$;

G_3 : жесткое закрепление контуров $s = \text{const}$ (условия (5.6) и шарнирное опирание контуров $\theta = \text{const}$ – условия (5.9).

Относительные различия между частотами, полученными с помощью метода сплайн-коллокации при разном количестве точек коллокации ($N = 10, N = 12, N = 14, N = 16$), не превышают 3%. С учетом малого отличия значений частот для числа точек коллокации $N \geq 12$ в работе приведены данные расчетов для $N = 12$.

Проверка достоверности получаемых результатов осуществлена путём сравнения частот изгибных свободных колебаний цилиндрической оболочки постоянной толщи-

ны (геометрические размеры оболочки приведены в табл. 8 и соответствуют обозначению С1) и близких к ней конических оболочек эквивалентной массы (обозначены как К2,5; К5 в табл. 8) при условиях шарнирного опирания всех контуров. Для цилиндрической панели при такой постановке задачи существует возможность получить аналитические значения частот.

Таблица 8

L , м	R_1 , м	R_2 , м	h_0 , м	b , рад	β_k , градусы	Обозначение
0,12	0,09	0,09	0,004	$\pi/2$	0	С1
0,12	0,0875	0,0925	0,004	$\pi/2$	2,5	К2,5
0,12	0,085	0,095	0,004	$\pi/2$	5	К5
0,12	0,08	0,1	0,004	$\pi/2$	10	К10
0,12	0,075	0,105	0,004	$\pi/2$	15	К15
0,12	0,07	0,11	0,004	$\pi/2$	20	К20
0,12	0,065	0,115	0,004	$\pi/2$	25	К25
0,12	0,06	0,12	0,004	$\pi/2$	30	К30

В табл. 9 приведены значения частот ω_i , Гц изгибных колебаний цилиндрической оболочки и близких к ней конических оболочек эквивалентной массы при условии шарнирного опирания всех контуров данных оболочек, полученные аналитически (обозначены А) и с помощью метода сплайн-коллокации (Б, В, Г). Здесь А – частоты изгибных колебаний цилиндрической оболочки (С1), полученные аналитически; Б – частоты для цилиндрической оболочки (С1), полученные методом сплайн-коллокации; В, Г – частоты изгибных колебаний конических оболочек К2,5 и К5, соответственно, полученные методом сплайн-коллокации; Р – относительное различие между аналитическими и численными результатами. Как видно, максимальные различия между численными и аналитическими данными не превышают 0,4%, что свидетельствует о достаточной точности применяемого численного подхода.

Таблица 9

i	А	Б	Р, %	В	Р, %	Г	Р, %
1	3501,92	3489,15	0,36	3485,65	0,46	3480,40	0,61
2	5176,39	5167,92	0,16	5166,65	0,19	5162,83	0,26
3	5479,31	5474,13	0,09	5469,52	0,18	5456,79	0,41
4	7082,30	7081,76	0,01	7079,53	0,04	7070,94	0,16

Таблица 10

i	α					
	-0,2			-0,1		
	А	В	Р, %	А	В	Р, %
1	3146,49	3142,51	0,13	3261,88	3258,22	0,11
2	4464,61	4463,34	0,03	4779,10	4777,83	0,03
3	5107,28	5102,03	0,10	5110,15	5104,74	0,11
4	6553,05	6550,98	0,03	6767,75	6765,68	0,03
i	0,1			0,2		
	А	В	Р, %	А	В	Р, %
	1	3494,41	3491,22	0,09	3612,02	3609,16
2	5114,44	5109,19	0,10	5117,15	5111,90	0,10
3	5394,24	5392,81	0,03	5695,68	5694,25	0,03
4	7141,92	7140,17	0,02	7319,22	7317,79	0,02

В качестве тестовой задачи также были получены частоты свободных колебаний цилиндрических и близких к ним конических оболочек переменной толщины с законом изменения толщины (5.15) при условии шарнирного опирания всех контуров. Данные расчётов приведены в табл. 10, где А – частоты цилиндрической панели, В – частоты конической панели, Р – относительное расхождение соответствующих частот для А и В. Отличия между соответствующими частотами цилиндрических и конических панелей не превышают 0,15%.

В табл. 11 приведены значения частот свободных колебаний конических оболочек переменной толщины: с углом конусности 10° (соответствуют геометрическим параметрам К10 табл. 1); в табл. 5 – с углом конусности 20° (соответствуют геометрическим параметрам К20 в табл. 1); в табл. 6 – с углом конусности 30° (соответствуют геометрическим параметрам К30 табл. 1). Расчеты проведены при различных граничных условиях.

Данные табл. 11 – 13 позволяют проследить влияние изменения толщины на динамические характеристики конических оболочек, а также выполнить анализ различия значений собственных частот конических оболочек с переменной толщиной относительно оболочек с постоянной толщиной. Различие значений частот возрастает при увеличении параметра α и на более высоких частотах.

Таблица 11

Граничные условия	i	α					
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
G_1	1	4,583	4,821	5,019	5,203	5,380	5,554
	2	4,740	5,074	5,410	5,732	6,035	6,317
	3	7,063	7,526	7,908	8,249	8,573	8,889
	4	7,158	7,620	8,049	8,444	8,789	9,077
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	5,726	5,896	6,067	6,237	6,407	–
	2	6,577	6,815	7,031	7,225	7,398	–
	3	9,197	9,468	9,682	9,890	10,10	–
G_2	4	9,308	9,543	9,825	10,07	10,29	–
	i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
	1	3,963	4,074	4,202	4,313	4,425	4,536
	2	4,425	4,759	5,061	5,364	5,634	5,889
	3	6,127	6,557	6,812	6,971	7,098	7,242
	4	6,875	7,226	7,480	7,703	7,910	8,117
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	4,647	4,743	4,854	4,966	5,077	–
G_3	2	6,096	6,271	6,414	6,525	6,637	–
	3	7,417	7,608	7,846	8,101	8,372	–
	4	8,308	8,499	8,674	8,849	9,008	–
	i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
	1	3,470	3,629	3,772	3,915	4,058	4,186
	2	3,979	4,299	4,617	4,939	5,258	5,523
	3	5,379	5,411	5,443	5,459	5,491	5,575
	4	5,777	6,382	6,907	7,257	7,576	7,846
i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0	
1	4,313	4,456	4,584	4,711	4,838	–	
2	5,539	5,570	5,602	5,634	5,682	–	
3	5,890	6,201	6,511	6,818	7,127	–	
4	8,101	8,340	8,563	8,769	8,960	–	

Отметим, что при варьировании параметра α можно получить значительное изменение значений частот. Так, для оболочек с переменной толщиной, соответствующей значениям $|\alpha| = 0,5$, различие в значениях частот относительно частот оболочки эквивалентной массы постоянной толщины составляет от 12% до 25% в зависимости от типа граничных условий. Таким образом, получено, что незначительное изменение толщины оболочки может привести к значительным изменениям её динамических характеристик, сравнимых (по порядку) с влиянием типа граничных условий.

Таблица 12

Граничные условия	i	α					
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
G_1	1	4,498	4,724	4,921	5,107	5,287	5,464
	2	4,678	5,019	5,351	5,665	5,958	6,228
	3	6,927	7,367	7,745	8,095	8,430	8,713
	4	6,995	7,523	7,970	8,321	8,536	8,760
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	5,639	5,813	5,987	6,160	6,334	–
	2	6,474	6,695	6,893	7,069	7,225	–
	3	8,899	9,097	9,308	9,532	9,763	–
4	9,083	9,403	9,685	9,908	10,12	–	
G_2	i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
	1	3,883	4,011	4,122	4,234	4,345	4,456
	2	4,377	4,711	5,013	5,300	5,570	5,793
	3	5,984	6,382	6,605	6,764	6,891	7,051
	4	6,812	7,114	7,353	7,576	7,783	7,990
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	4,568	4,679	4,791	4,902	5,013	–
	2	5,984	6,143	6,271	6,398	6,494	–
3	7,242	7,464	7,703	7,974	8,260	–	
4	8,196	8,372	8,563	8,722	8,897	–	
G_3	i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
	1	3,390	3,565	3,708	3,852	3,979	4,122
	2	3,947	4,265	4,584	4,919	5,239	5,348
	3	5,188	5,236	5,268	5,284	5,316	5,556
	4	5,682	6,271	6,780	7,130	7,433	7,719
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	4,265	4,393	4,536	4,663	4,806	–
	2	5,379	5,411	5,443	5,475	5,523	–
3	5,857	6,175	6,478	6,780	7,082	–	
4	7,990	8,228	8,451	8,658	8,849	–	

Также данные табл. 11 – 13 позволяют проследить характер влияния граничных условий на изменение спектра собственных частот. Видно, что более высоким значениям частоты соответствуют более жёсткие граничные условия. Для граничных условий типа G_3 (жёсткое закрепление на контурах $s = \text{const}$ и шарнирное опирание на контурах $\theta = \text{const}$) характерно сужение интервала между второй и третьей частотами при приближении формы срединной поверхности данной оболочки к конической оболочке постоянной толщины.

Таблица 13

Граничные условия	i	α					
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
G_1	1	4,326	4,543	4,742	4,931	5,116	5,299
	2	4,566	4,906	5,226	5,523	5,792	6,035
	3	6,631	7,065	7,416	7,669	7,873	8,078
	4	6,831	7,346	7,594	7,880	8,211	8,549
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	5,480	5,660	5,839	6,018	6,197	–
	2	6,249	6,437	6,602	6,747	6,875	–
	3	8,296	8,528	8,775	9,031	9,292	–
	4	8,885	9,149	9,363	9,573	9,786	–
	G_2	i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
1		3,746	3,868	3,987	4,106	4,225	4,342
2		4,290	4,617	4,920	5,194	5,431	5,626
3		5,748	6,053	6,238	6,388	6,550	6,743
4		6,605	6,872	7,110	7,343	7,566	7,776
i		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
1		4,458	4,571	4,682	4,788	4,891	–
2		5,782	5,911	6,024	6,128	6,231	–
3		6,971	7,228	7,504	7,790	8,082	–
4		7,972	8,157	8,333	8,504	8,673	–
G_3	i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
	1	3,263	3,422	3,581	3,724	3,867	4,011
	2	3,899	4,218	4,552	4,870	4,997	5,029
	3	4,854	4,902	4,934	4,966	5,188	5,507
	4	5,539	6,112	6,557	6,891	7,210	7,512
	i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
	1	4,154	4,297	4,440	4,584	4,711	–
	2	5,061	5,093	5,141	5,188	5,236	–
	3	5,825	6,127	6,430	6,732	7,035	–
	4	7,799	8,053	8,260	8,451	8,626	–

Для всех типов граничных условий характерно уменьшение значений частот свободных колебаний оболочки при увеличении её угла конусности. Следует отметить, что указанные изменения оказывают на порядок меньшее влияние по сравнению с влиянием характера изменения толщины оболочки и влиянием типа граничных условий. Различия между значениями частот, соответствующих оболочке с углом конусности 10 градусов, и частотами оболочки с углом конусности 30 градусов составляет 5 – 7%. Причём более высоким значениям угла конусности соответствует более резкое изменение частот свободных колебаний.

На рис. 15 – 18 построены формы, соответствующие четырем частотам свободных колебаний оболочек, шарнирно опертых по одному контуру и жестко закрепленных по трем контурам. Как видим, первой собственной частоте соответствует формирование в виде двух полуволн в окружном направлении и одной полуволны вдоль образующей. Второй частоте свободных колебаний соответствует формирование в виде трёх полуволн в окружном направлении и одной полуволны вдоль образующей. Третьей частоте соответствует одна полуволна вдоль образующей и четыре полуволны в окружном направлении, четвертой частоте – две полуволны в окружном и меридиональном направлениях, соответственно.

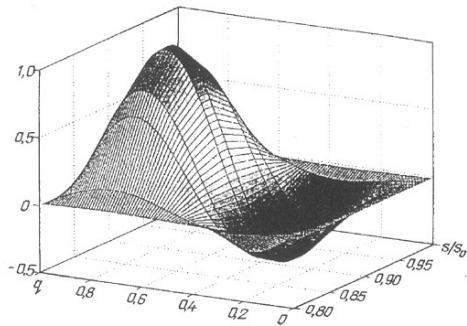


Рис. 15

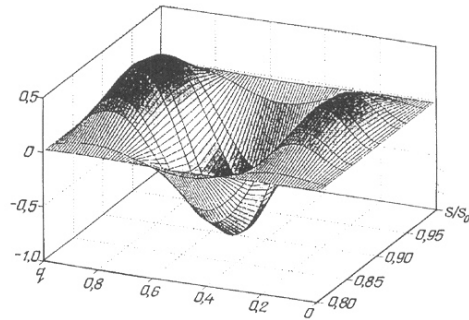


Рис. 16

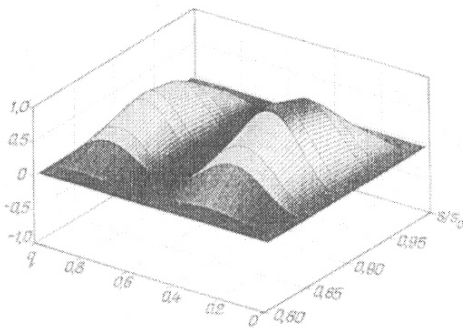


Рис. 17

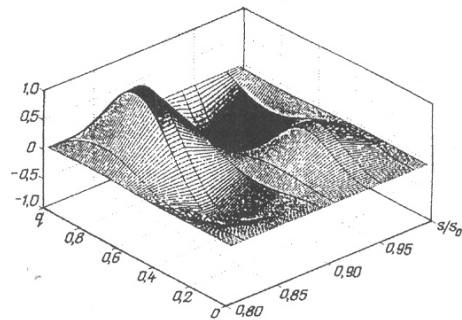


Рис. 18

Представленные результаты расчётов свидетельствуют о высокой эффективности использования метода сплайн-коллокации для исследования спектра частот свободных колебаний тонких конических оболочек (панелей) с произвольным законом изменения толщины. Более подробный анализ свободных колебаний конических оболочек с переменной в одном или двух направлениях толщиной на основе классической теории проведен в [13, 14, 46].

§6. Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением (уточненная постановка).

Рассмотрим нетонкие ортотропные цилиндрические оболочки с некруговым поперечным сечением. В качестве исходных принимаем уравнения уточненной теории оболочек, которая базируется на гипотезе прямой линии [21, 31]. Исходя из общих уравнений, приведем данные для нетонких ортотропных цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением.

Отнесем координатную поверхность оболочки к ортогональной системе координат s, t , где s, t – длины дуг по образующей и направляющей, а нормаль к этой поверхности – γ . Из общих соотношений, которые приведены в монографии [21], получаем выражения для деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_t = \frac{\partial v}{\partial t} + k(t)w; \quad \varepsilon_{st} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}; \quad \kappa_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s}; \\ \kappa_t &= \frac{\partial \psi_t}{\partial t} - k(t) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + k(t)w \right); \quad 2\kappa_{st} = \frac{\partial \psi_s}{\partial t} + \frac{\partial \psi_t}{\partial s} - k(t) \frac{\partial u}{\partial t}; \\ \gamma_s &= \psi_s - \vartheta_s; \quad \gamma_t = \psi_t - \vartheta_t; \quad \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}; \quad \vartheta_t = -\frac{\partial w}{\partial t} + k(t)v. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В выражениях (6.1) $\varepsilon_s, \varepsilon_t, \varepsilon_{st}$ – тангенциальные, а $\kappa_s, \kappa_t, \kappa_{st}$ – изгибные деформации координатной поверхности; u, v, w – перемещения, φ_s, φ_t – полные углы поворота нормали, $k(t)$ – кривизна направляющей; $\mathcal{G}_s, \mathcal{G}_t$ – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; γ_s, γ_t – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{ts}}{\partial t} + q_s &= 0; \quad \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial N_{st}}{\partial s} + k(t)Q_t + q_t = 0; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - k(t)N_t + q_y &= 0; \quad \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{ts}}{\partial t} - Q_s = 0; \\ \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial M_{st}}{\partial s} - Q_t &= 0; \quad N_{st} - k(t)M_{ts} - N_{ts} = 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где N_s, N_t, N_{st}, N_{ts} – тангенциальные усилия; Q_s, Q_t – перерезывающие усилия; M_s, M_t, M_{st}, M_{ts} – изгибающие и крутящие моменты; q_s, q_t, q_y – компоненты поверхностной нагрузки.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек симметричной структуры по толщине относительно выбранной координатной поверхности примем в виде

$$N_s = C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t; \quad N_t = C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t; \quad N_{st} = C_{66}\varepsilon_{st} + 2k(t)D_{66}\kappa_{st}; \quad N_{ts} = C_{66}\varepsilon_{st}; \quad (6.3)$$

$M_s = D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_t; \quad M_t = D_{12}\kappa_s + D_{22}\kappa_t; \quad M_{ts} = M_{st} = 2D_{66}\kappa_{st}; \quad Q_s = K_1\gamma_s, \quad Q_t = K_2\gamma_t,$
где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_t}, \quad C_{12} = \nu_t C_{11}, \quad C_{22} = \frac{E_t h}{1 - \nu_s \nu_t}, \quad C_{66} = G_{st} h; \\ D_{11} &= \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)}; \quad D_{12} = \nu_t D_{11}; \quad D_{22} = \frac{E_t h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)}; \\ D_{66} &= \frac{G_{st} h^3}{12}; \quad K_1 = \frac{5}{6} h G_{sy}; \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{ty}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В формулах (6.4) E_s, E_t, ν_s, ν_t – модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях s и t , G_{st}, G_{sy}, G_{ty} – модули сдвига; $h = h(s, t)$ – толщина оболочки.

Для решения рассматриваемого класса двумерных краевых задач применим подход, который основан на аппроксимации решения в одном координатном направлении с помощью сплайн-функций, а для решения полученной при этом одномерной краевой задачи используем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации. Такой подход позволяет решать задачи для разных граничных условий на каждом контуре оболочки. Согласно этому подходу разрешающую систему уравнений запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{12} \frac{\partial u'}{\partial s} + a_{13} \frac{\partial w}{\partial s} + a_{14} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{15} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{16} v' + a_{17} w + a_{18} u' + a_{19} q_s; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a_{21} \frac{\partial u'}{\partial s} + a_{22} v + a_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{24} w + a_{25} w' + a_{26} \frac{\partial \psi'_s}{\partial s} + a_{27} \psi'_t + a_{28} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2} + \\ &+ a_{29} \frac{\partial \psi_t}{\partial s} + a_{2,10} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{2,11} v' + a_{2,12} u' + a_{2,13} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{2,14} \psi'_s + a_{2,15} q_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & a_{31} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{32} v + a_{33} v' + a_{34} w + a_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{36} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + a_{37} \psi_t' + a_{38} \psi_t + \\ & + a_{39} \psi_s + a_{3,10} \frac{\partial w}{\partial s} + a_{3,11} w' + a_{3,12} q_\gamma ; \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = & a_{41} u' + a_{42} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{43} \frac{\partial v'}{\partial s} + a_{44} \frac{\partial w}{\partial s} + a_{45} \psi_s + a_{46} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + a_{47} \frac{\partial \psi_t'}{\partial s} + a_{48} \frac{\partial \psi_t}{\partial s} + \\ & + a_{49} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{4,10} v' + a_{4,11} w + a_{4,12} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{4,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + a_{4,14} \psi_t' + a_{4,15} \psi_s' + a_{4,16} q_s ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2} = & a_{51} \frac{\partial u'}{\partial s} + a_{52} v + a_{53} v' + a_{54} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{55} w + a_{56} w' + a_{57} \frac{\partial \psi_s'}{\partial s} + a_{58} \psi_t + a_{59} \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial s^2} + \\ & + a_{5,10} \psi_t' + a_{5,11} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{5,12} u' + a_{5,13} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{5,14} \psi_s' + a_{5,15} \frac{\partial \psi_t}{\partial s} + a_{5,16} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + a_{5,17} q_t . \end{aligned}$$

Коэффициенты a_{ij} в системе (6.5) приведены в [87].

Дополняя систему разрешающих уравнений (6.5) граничными условиями для открытых оболочек на всех сторонах, а для замкнутых – граничными условиями на криволинейных сторонах и условиями периодичности по направляющей, приходим к двумерной краевой задаче.

В систему (6.5) входят производные от разрешающих функций по координате s не выше второго порядка. Исходя из этого, при аппроксимации решения по координате s ограничимся сплайн-функциями третьей степени. Тогда искомое решение краевой задачи для системы уравнений (6.5) с соответствующими граничными условиями представим в виде

$$\begin{aligned} u(s, t) = \sum_{i=0}^N u_i(t) \varphi_{1i}(s) ; \quad v(s, t) = \sum_{i=0}^N v_i(t) \varphi_{2i}(s) ; \quad w(s, t) = \sum_{i=0}^N w_i(t) \varphi_{3i}(s) ; \\ \psi_s(s, t) = \sum_{i=0}^N \psi_{si}(t) \varphi_{4i}(s) ; \quad \psi_t(s, t) = \sum_{i=0}^N \psi_{ti}(t) \varphi_{5i}(s) , \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $u_i(t)$, $v_i(t)$, $w_i(t)$, $\psi_{si}(t)$, $\psi_{ti}(t)$ – искомые функции переменной t ; $\varphi_{ji}(s)$ ($j = \overline{1, 5}$) – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени на равномерной сетке Δ : $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = L$, которые удовлетворяют граничным условиям на криволинейных контурах $s = 0$ и $s = L$.

На криволинейных контурах $s = \text{const}$ рассмотрим следующие граничные условия:

1) контур жестко закреплен

$$u = v = w = \psi_s = \psi_t = 0 ; \quad (6.7)$$

2) контур шарнирно оперт и свободный в направлении образующей

$$N_s = v = w = M_s = \psi_t = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = v = w = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} = \psi_t = 0 ; \quad (6.8)$$

3) контур закреплен и свободный в нормальном направлении

$$u = N_{st} = Q_s = \psi_s = M_{st} = 0 \quad \text{или} \quad u = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s} = \psi_s = \frac{\partial \psi_t}{\partial s} = 0 ; \quad (6.9)$$

4) контур шарнирно закреплен

$$u = v = w = M_s = Q_t = 0 \quad \text{или} \quad u = v = w = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} = \psi_t = 0 . \quad (6.10)$$

Поскольку граничные условия (6.7) – (6.10) содержат только значение разрешающих функций и их первых производных, которые приравниваются нулю, на контуре $s = \text{const}$ их можно представить через B -сплайны таким образом:

а) если разрешающая функция равняется нулю, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0}(s) &= -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); \quad \varphi_{j_1}(s) = B_3^{-1}(s) - \frac{1}{2}B_3^0(s) + B_3^1(s); \\ \varphi_{j_i}(s) &= B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2); \end{aligned} \quad (6.11)$$

б) если производная по s от разрешающей функции равняется нулю, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0}(s) &= B_3^0(s), \quad \varphi_{j_1}(s) = B_3^{-1}(s) - \frac{1}{2}B_3^0(s) + B_3^1(s); \\ \varphi_{j_i}(s) &= B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Аналогично представляются функции $\varphi_{j_{N-1}}(s)$ и $\varphi_{j_N}(s)$.

Подставляя решение (6.6) в разрешающую систему уравнений (6.5) и в соответствии с методом сплайн-коллокации требуя их удовлетворения на $N+1$ линии $s = \xi_i$ ($i = \overline{1, N+1}$), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10(N+1)$, которую представим в виде

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = A\bar{R} + \bar{f}, \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} (\bar{R} = \{u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \\ \psi_{s_0}, \dots, \psi_{s_N}, \psi'_{s_0}, \dots, \psi'_{s_N}, \psi_{t_0}, \dots, \psi_{t_N}, \psi'_{t_0}, \dots, \psi'_{t_N}\}^T); \end{aligned}$$

\bar{R} – вектор-функция от t ; \bar{f} – вектор правых частей; A – квадратная матрица, элементы которой зависят от t).

В случае незамкнутых оболочек по образующей граничные условия на прямолинейных контурах t_1 и t_2 запишем в следующем виде:

$$A_1\bar{R}(t_1) = \bar{a}_1; \quad A_2\bar{R}(t_2) = \bar{a}_2. \quad (6.14)$$

Полученную одномерную краевую задачу (6.13), (6.14) решаем устойчивым численным методом дискретизации.

На основе данного подхода рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии незамкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки переменной вдоль образующей толщины с эллиптическим поперечным сечением координатной поверхности под действием равномерной нормальной нагрузки $q_y = q_0 = \text{const}$. Оболочка жестко закреплена по всему контуру. Поперечное сечение координатной поверхности оболочки параметрично задано в виде

$$x = b \cos \psi; \quad z = a \sin \psi \quad (-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2), \quad (6.15)$$

где b, a – полуоси эллипса; ψ – угловой параметр. При этом переход от координаты t к координате θ для функции $v(t(\theta))$ осуществляется следующим образом:

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \omega(\theta); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta}. \quad (6.16)$$

При этом предполагаем, что площадь эллипса остается неизменной и равняется площади круга радиуса R , т.е. $ab = R^2 = \text{const}$. Толщина оболочки изменяется вдоль направляющей по закону $h(\psi) = h_0(1 + \alpha \cos 2\psi)$, так что с изменением α вес оболочки остается постоянным. Материал оболочки имеет модуль поперечного сдвига $G' = E/d$, где E – модуль упругости в плоскости изотропии.

Для исследования влияния изменения толщины оболочки при сохранении веса на распределение прогиба и напряжения по направляющей при решении задачи приняты параметры оболочки: $L = 30$; $h_0 = 1$; $R = 10$; $a = 5; 20$; $d = 40$; $\nu = 0,3$; $\alpha = 0; \pm 0,3; \pm 0,5$.

Отметим, что эта задача описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (6.5). На краях оболочки задаются граничные условия (6.7) – (6.10).

На рис. 19 – 21 приведены графики распределения прогибов и напряжений на боковых поверхностях оболочки в сечении $s = L/2$ в зависимости от изменения толщины. Из рис. 19, а следует, что для эллипса при $a = 5$ максимум прогиба имеет место возле прямолинейного края и с увеличением α , т.е. толщины в зоне вершины большей полуоси эллипса, его значение увеличивается (при $\alpha = 0,5$ – более чем в полтора раза). При уменьшении толщины в этой зоне его значение незначительно уменьшается. В области более жесткой вершины наблюдается смещение вершины в направлении, противоположном действию приложенной нагрузки. При $a = 20$, как следует из рис. 19, б, картина значительно меняется: максимальный прогиб находится на вершине малой полуоси эллипса и с уменьшением α , т.е. толщины оболочки в зоне этой вершины, его значения увеличиваются; в частности, при $\alpha = -0,5$ – больше чем в два раза. С увеличением толщины в этой зоне, т.е. при $\alpha = 0,3; 0,5$, прогиб незначительно уменьшается.

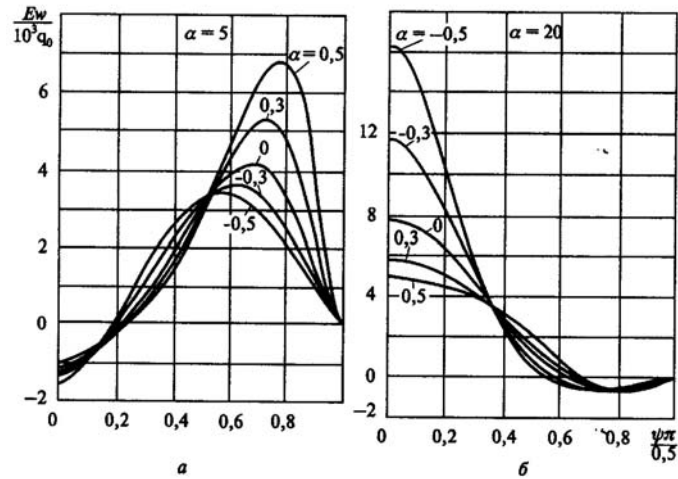


Рис. 19

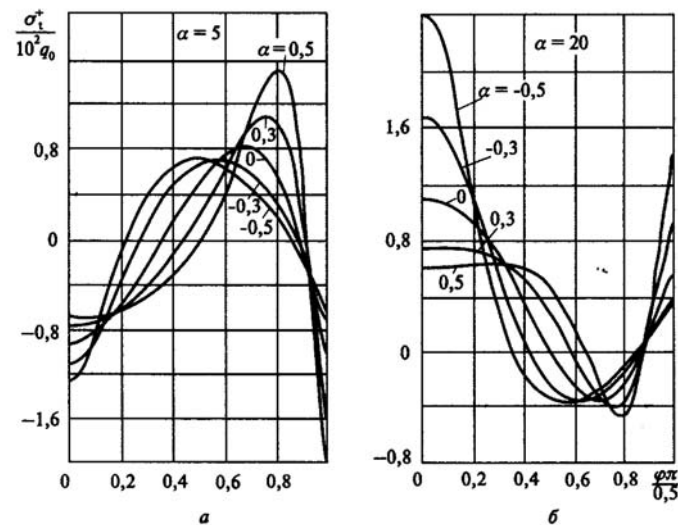


Рис. 20

На рис. 20 показано как изменяются напряжения на внешней поверхности оболочки в зависимости от изменения толщины оболочки. Из рис. 20, а видно, что с увеличением α максимальное значение σ_i^+ возрастает и при $\alpha = 0,5$ почти вдвое превышает его значение при $\alpha = 0$. С изменением конфигурации эллипса в поперечном сечении оболочки, как видно из рис. 20, б, максимальные напряжения имеют место в вершине малой полуоси. При $\alpha = -0,5$ напряжение превышает его значение при $\alpha = 0$ больше, чем в два раза.

Из рис. 21, а видно, что для напряжений на внутренней поверхности оболочки при $a = 5$ имеем качественно близкую картину к изображению на рис. 20, а, но с противоположным знаком. В количественном отношении максимальные напряжения σ_i^- превышают напряжения σ_i^+ больше, чем в два раза. Как видно из рис. 21, б, величина напряжений σ_i^- при $a = 20$ почти вдвое меньшая, чем σ_i^+ . Максимальные напряжения σ_i^- имеют место в оболочке при $a = 5$ возле прямолинейного края.

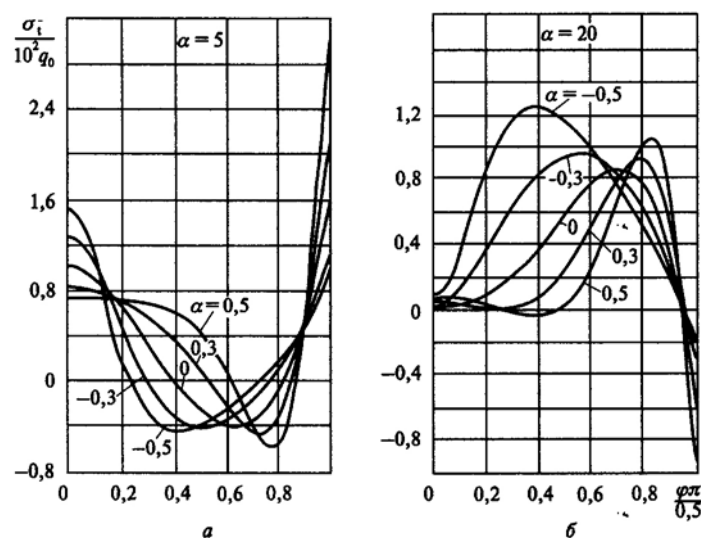


Рис. 21

Таким образом, за счет изменения толщины оболочки можно влиять на распределение перемещений и напряжений при сохранении ее веса.

Также решены задачи о статическом поведении нетонких некруговых оболочек в [88 – 91].

§7. Напряженное состояние конических оболочек переменной толщины (уточненная постановка).

Рассмотрим напряженное состояние нетонких ортотропных конических оболочек под действием распределенных поверхностных и локальных нагрузок, исходя из уточненной теории, которая базируется на гипотезе прямой линии [21]. Оболочку отнесем к ортогональной системе координат s, θ, γ , где $s = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ – линии главных кривизн ординатной поверхности, а γ – нормальная координата к ординатной поверхности.

Координатная поверхность конической оболочки описывается первой квадратичной формой $dS^2 = ds^2 + r^2 d\theta^2$, где радиус r определяется формулой $r = r_0 + \cos \varphi \cdot s$; r_0 – радиус круга в плоскости отсчета; φ – угол между нормалью к оболочке и осью вращения; радиус кривизны $R_\theta = r / \sin \varphi$.

Из общих соотношений, приведенных в [24], получаем выражения для деформаций

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}; \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right); \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right);$$

$$\begin{aligned}\kappa_s &= \frac{\partial \psi_s}{\partial s}; \kappa_\theta = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_s \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \right\}; \\ 2\kappa_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\psi_\theta}{r} \right) - \frac{\sin \varphi}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right); \\ \gamma_s &= \psi_s - \vartheta_s; \gamma_\theta = \psi_\theta - \vartheta_\theta; \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}; \vartheta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v \sin \varphi}{r}.\end{aligned}\quad (7.1)$$

В выражениях (7.1) $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}$ – тангенциальные, а $\kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}$ – изгибные деформации координатной поверхности; $\vartheta_s, \vartheta_\theta$ – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; γ_s, γ_θ – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами; u, v, w – перемещения; ψ_s, ψ_θ – полные углы поворота нормали.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}\cos \varphi N_s + r \frac{\partial N_s}{\partial s} - \cos \varphi N_\theta + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} + r q_s &= 0; \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi N_{s\theta} + r \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \cos \varphi N_{\theta s} + \sin \varphi Q_\theta + r q_\theta &= 0; \\ \cos \varphi Q_s + r \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin \varphi N_\theta + r q_\gamma &= 0; r \frac{\partial M_s}{\partial s} + \cos \varphi M_s - \cos \varphi M_\theta + \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - r Q_s = 0; \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + (M_{s\theta} + M_{\theta s}) \cos \varphi + r \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} - r Q_\theta &= 0,\end{aligned}\quad (7.2)$$

где $N_s, N_\theta, N_{s\theta}, N_{\theta s}$ – тангенциальные усилия; Q_s, Q_θ – перерезывающие усилия; $M_s, M_\theta, M_{s\theta}, M_{\theta s}$ – изгибающие и крутящие моменты; q_s, q_θ, q_γ – компоненты поверхностной нагрузки.

Соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned}N_s &= C_{11} \varepsilon_s + C_{12} \varepsilon_\theta; N_\theta = C_{12} \varepsilon_s + C_{22} \varepsilon_\theta; N_{s\theta} = C_{66} \varepsilon_{s\theta} + \frac{2 \sin \varphi}{r} D_{66} \kappa_{s\theta}; \\ N_{\theta s} &= C_{66} \varepsilon_{s\theta}; M_s = D_{11} \kappa_s + D_{12} \kappa_\theta; M_\theta = D_{12} \kappa_s + D_{22} \kappa_\theta; \\ M_{\theta s} &= M_{s\theta} = 2 D_{66} \kappa_{s\theta}; Q_s = K_1 \gamma_s; Q_\theta = K_2 \gamma_\theta;\end{aligned}\quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}\left(C_{11} = \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta}; C_{12} = \nu_\theta C_{11}; C_{22} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta}; C_{66} = G_{s\theta} h; D_{11} = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}; \right. \\ \left. D_{12} = \nu_\theta D_{11}; D_{22} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}; D_{66} = \frac{G_{s\theta} h^3}{12}; K_1 = \frac{5}{6} h G_{s\gamma}; K_2 = \frac{5}{6} h G_{\theta\gamma} \right).\end{aligned}\quad (7.4)$$

В формулах (7.4) $E_s, E_\theta, \nu_s, \nu_\theta$ – модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях s и θ ; $G_{s\theta}, G_{s\gamma}, G_{\theta\gamma}$ – модули сдвига; $h = h(s, \theta)$ – толщина оболочки.

Исходя из соотношений (7.1) – (7.4), после ряда преобразований получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных в перемещениях, описывающую напряженно-деформированное состояние конических оболочек переменной толщины, которую представим в такой форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= b_{11}u + b_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{13} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{14} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{15}v + b_{16} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{17} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{18} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{19}w + b_{1,10} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{1,11}q_s; \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= b_{21}u + b_{22} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{23} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{25}v + b_{26} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{27} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{28} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \\
&+ b_{29}w + b_{2,10} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b_{2,11} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{2,13}\psi_\theta + b_{2,14} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{2,15} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + b_{2,16}q_\theta; \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= b_{31}u + b_{32} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{33}v + b_{34} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{35}w + b_{36} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{37} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
&+ b_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{39}\psi_s + b_{3,10} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{3,11}\psi_\theta + b_{3,12} \frac{\psi_\theta}{\partial \theta} + b_{3,13}q_\gamma; \tag{7.5} \\
\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} &= b_{41}u + b_{42} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{43} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{45}v + b_{46} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{47} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{48} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \\
&+ b_{49}w + b_{4,10} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{4,11}\psi_s + b_{4,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{4,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{4,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + b_{4,15}\psi_\theta + \\
&+ b_{4,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{4,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{4,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s \partial \theta} + b_{4,19}q_s; \\
\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta} &= b_{51}u + b_{52} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{53} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{54} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{55}v + b_{56} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{57} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{58} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \\
&+ b_{59}w + b_{5,10} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b_{5,11}\psi_s + b_{5,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{5,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{5,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{5,15}\psi_\theta + \\
&+ b_{5,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{5,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{5,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + b_{5,19}q_\theta \quad (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi).
\end{aligned}$$

Коэффициенты b_{ij} в системе (7.5) приведены в [69]:

Для решения данного класса задач применим подход, основанный на аппроксимации решения в одном координатном направлении с помощью сплайн-функций третьей степени, а для решения полученной при этом одномерной краевой задачи используем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации.

Для определения произволов в общем решении системы (7.4), следует задавать по 5 граничных условий на каждом контуре оболочки. На прямолинейных и криволинейных контурах могут быть заданы условия жесткого закрепления, шарнирного закрепления, шарнирного опирания, условия симметрии и прочие.

Таким образом, краевая задача о напряженно-деформированном состоянии нетонких конических оболочек переменной толщины описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных (7.5) при соответствующих граничных условиях на контурах.

В частности, на торцах и прямолинейных краях оболочки граничные условия имеют такой вид:

а) при жестком закреплении

$$u = v = w = 0; \quad \overline{\psi_s} = \overline{\psi_\theta} = 0; \tag{7.6}$$

б) при шарнирном опирании

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad v = w, \quad \frac{\partial \overline{\psi}_s}{\partial s} = 0, \quad \overline{\psi}_\theta = 0 \quad (\text{на торцах}); \quad (7.7)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial \overline{\psi}_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{на прямолинейных контурах}). \quad (7.8)$$

На основании изложенного выше подхода проведем анализ полей перемещений и напряжений нетонких конических оболочек переменной в окружном направлении толщины при сохранении веса. Рассмотрим конические оболочки, толщина которых изменяется по закону (5.15), т.е. $h(\theta) = h_0(1 + \alpha \cos \theta)$.

Покажем, что при этом вес оболочки остается постоянным при изменении параметра α .

Величина $\bar{h} = \int_0^L \int_0^{2\pi} h(s, \theta) ds d\theta$ сохраняет постоянное значение, так как выражение

$$1 + \alpha \cos \theta \quad \text{не зависит от } s, \quad \text{т.е.} \quad \int_0^{2\pi} (1 + \alpha \cos \theta) d\theta = 2\pi = \text{const}.$$

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии изотропных замкнутых нетонких конических оболочек переменной вдоль направляющей толщины под действием равномерного нормального давления $q_y = q_0 = \text{const}$. Оболочка жестко закреплена по контурам $s = 0$ и $s = L$. Исходные данные: $L = 30$; $r_0 = 12,5$; $E_s = E_\theta = E$; $\nu = 0,3$. Значение половины угла раствора конуса $\psi = \pi / 6$.

Исследуем влияние параметров изменения толщины h_0 и α на напряженно-деформированное состояние конических оболочек постоянного веса. Так как механические и геометрические характеристики оболочки симметричны относительно контуров $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, то рассмотрим $1/2$ часть оболочки: $\theta \in [0, \pi]$. На контурах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ зададим условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0; \quad v = 0; \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = 0; \quad \Psi_t = 0.$$

Согласно методу сплайн-аппроксимации искомое решение представим в форме

$$\begin{aligned} u(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(s); \quad v(s, \theta) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(s); \quad w(s, \theta) = \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(s); \\ \psi_s(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{si}(\theta) \varphi_{4i}(s); \quad \psi_\theta(s, \theta) = \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(s). \end{aligned} \quad (7.9)$$

При жестко закрепленных торцах по координате s имеем

$$\varphi_{10}(s) = -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); \quad \varphi_{11}(s) = B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s);$$

$$\varphi_{1i}(s) = B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2);$$

$$\varphi_{1,N-1}(s) = B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); \quad \varphi_{1N}(s) = -4B_3^{N+1}(s) + B_3^N(s);$$

$$\varphi_{20}(s) = -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); \quad \varphi_{21}(s) = B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s);$$

$$\varphi_{2i}(s) = B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2);$$

$$\varphi_{2,N-1}(s) = B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); \quad \varphi_{2N}(s) = -4B_3^{N+1}(s) + B_3^N(s);$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{30}(s) &= -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); & \varphi_{31}(s) &= B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s); \\
\varphi_{3i}(s) &= B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2); \\
\varphi_{3,N-1}(s) &= B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); & \varphi_{3N}(s) &= -4B_3^{N=1}(s) + B_3^N(s); \\
\varphi_{40}(s) &= -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); & \varphi_{41}(s) &= B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s); \\
\varphi_{4i}(s) &= B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2);
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{4,N-1}(s) &= B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); & \varphi_{4N}(s) &= -4B_3^{N=1}(s) + B_3^N(s); \\
\varphi_{50}(s) &= -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s); & \varphi_{51}(s) &= B_3^{-1}(s) - 0,5B_3^0(s) + B_3^1(s); \\
\varphi_{5i}(s) &= B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2); \\
\varphi_{5,N-1}(s) &= B_3^{N+1}(s) - 0,5B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s); & \varphi_{5N}(s) &= -4B_3^{N=1}(s) + B_3^N(s).
\end{aligned}$$

Подставляя решение (7.4) в разрешающую систему уравнений (7.2) и в соответствии с методом сплайн-коллокации требуя их удовлетворения на $N+1$ линии $s=\xi_i$ ($i=1, N+1$), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10(N+1)$, которую представим в виде

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = A\bar{R} + \bar{f}, \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{R} = \{u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \\
\psi_{s0}, \dots, \psi_{sN}, \psi'_{s0}, \dots, \psi'_{sN}, \psi_{t0}, \dots, \psi_{tN}, \psi'_{t0}, \dots, \psi'_{tN}\}^T -
\end{aligned}$$

вектор-функция от θ ; \bar{f} – вектор правых частей; A – квадратная матрица, элементы которой зависят от θ). Условия симметрии на прямолинейных контурах имеют следующий вид:

$$A_1\bar{R}(\theta_1) = \bar{a}_1, \quad A_2\bar{R}(\theta_2) = \bar{a}_2. \tag{7.12}$$

Полученную одномерную краевую задачу (7.11), (7.12) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

На рис. 22, а, б показано распределение прогибов w по направляющей в сечении $s = L/2$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ при $h_0 = 1$ (а) и $h_0 = 1,5$ (б) для $\alpha = 0; 0,3; 0,5; 0,7$. Значение параметра α приведены на рисунках. Пунктирная линия соответствует оболочке постоянной толщины при $\alpha = 0$. Видно, что с увеличением h_0 от 1 до 1,5 максимальные прогибы уменьшаются в 1,5 раза. При изменении параметра α от 0 до 0,3; 0,5; 0,7 максимальные прогибы находятся в соотношении 1: 2: 3: 5.

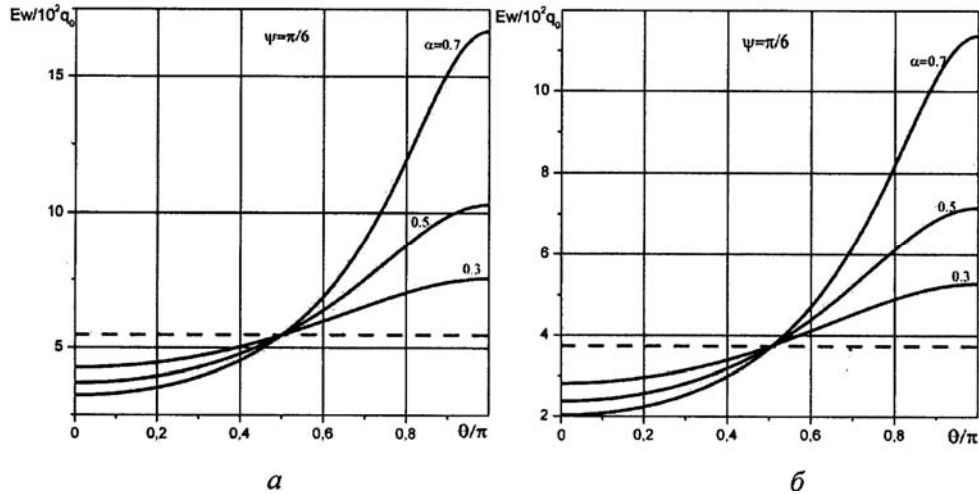


Рис. 22

На рис. 23, а, б, в, г показаны распределения напряжений σ_{θ}^{\pm} на боковых поверхностях оболочек по направляющей в сечении $s = L/2$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ при $h_0 = 1$ (а, в) и $h_0 = 1,5$ (б, г) для $\alpha = 0; 0,3; 0,5; 0,7$. Пунктирная линия соответствует оболочке постоянной толщины при $\alpha = 0$. Из рисунков видно, что графики для напряжений по своему характеру аналогичны графикам для прогибов.

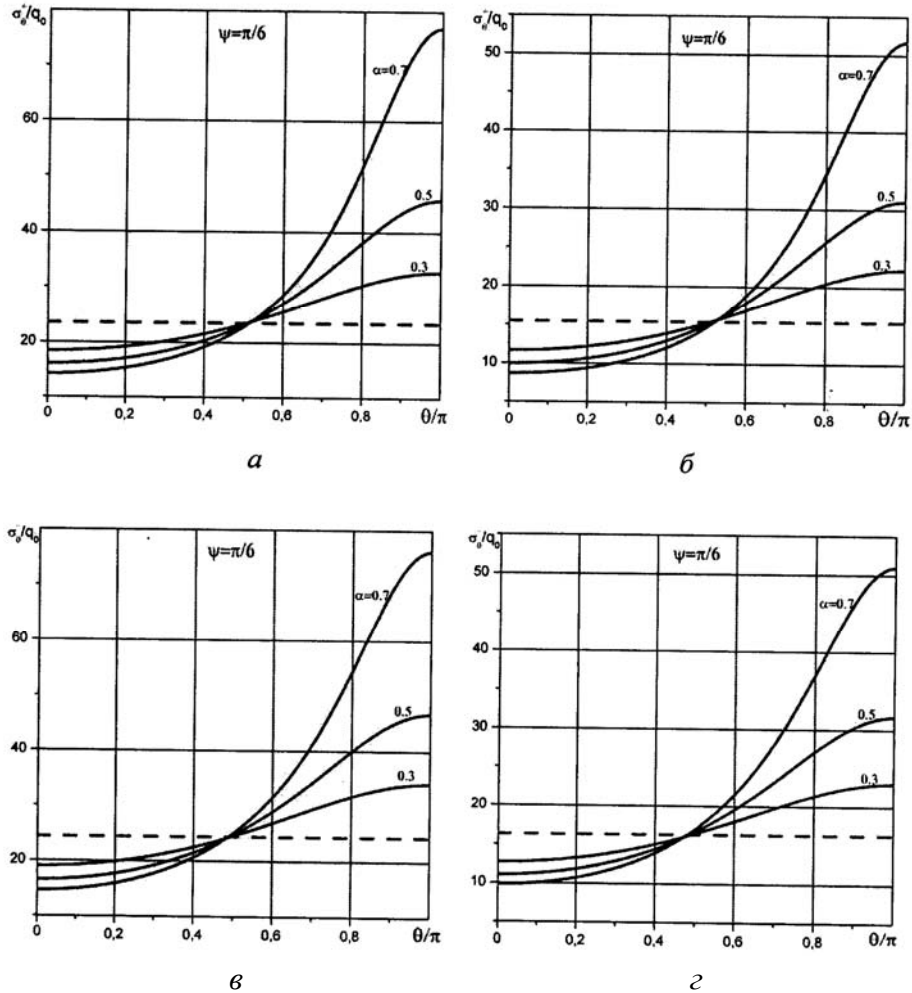


Рис. 23

Таким образом, из результатов, приведенных на рис. 22, 23 следует, что варьируя коэффициентами h_0 и α в законе изменения толщины вида (5.15), можно при сохранении веса оболочки выбрать определенные их значения, чтобы получить наиболее рациональное распределение прогиба и напряжений.

Проведем анализ напряженно-деформированного состояния замкнутых конических оболочек под действием локализованной нагрузки, которая задается соотношениями:

$$-q_r = \begin{cases} q_0(\cos \theta - \cos \beta), & 0 \leq \theta \leq \beta, \quad L/2 - a \leq s \leq L/2 + a; \\ 0, & \beta \leq \theta \leq \pi - \beta; \\ -q_0(\cos \theta - \cos \beta), & \pi - \beta \leq \theta \leq \pi + \beta, \quad L/2 - a \leq s \leq L/2 + a; \\ 0, & \pi + \beta \leq \theta \leq 2\pi - \beta; \\ q_0(\cos \theta - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \theta \leq 2\pi, \quad L/2 - a \leq s \leq L/2 + a. \end{cases}$$

Исследования проведены при разных значениях угла конусности ψ и параметров локализации нагрузки α и β для трансверсально-изотропных и ортотропных оболочек жестко закрепленных на торцах, при этом значение q_0 выбиралось таким образом, чтобы общая нагрузка оставалась одинаковой при различных значениях α и β и равнялась нагрузке, соответствующей значению $q^* = q_0(\pi/12)$. Показано, что увеличение интервала приложения нагрузки приводит к уменьшению значений перемещений w и напряжений σ_θ в зоне наибольшей нагрузки при $\theta = 0$.

В табл. 14 приведены значения максимальных прогибов при $\theta=0$ и различных степенях локализации нагрузки для разных углов конусности. Для расчетов выбраны такие исходные данные: $G_{s\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,2E$; $G_{s\theta} = 0,4E$; $E_s = 5E$; $E_\theta = 1,25E$; $\nu_s = 0,45$; $\nu_\theta = 0,18$; $L = 30$; $r_0 = R_0 - L/2 \sin\psi$; $R_0 = 20$. Расчеты проведены для оболочек постоянной толщины ($h=1; 5$).

Таблица 14

β	a	Ew/q_0		
		$\psi=0$	$\Psi=\pi/6$	$\Psi=\pi/4$
$\pi/4$	2	-0,8818	-1,0053	-1,1963
	4	-0,812	-0,92993	-1,1127
	8	-0,6542	-0,75287	-0,90693
$\pi/6$	2	-1,3308	-1,4723	-1,6891
	4	-1,2269	-1,3619	-1,5691
	8	-0,99073	-1,1029	-1,2768
$\pi/12$	2	-1,9601	-2,112	-2,3441
	4	-1,7863	-1,9311	-2,1527
	8	-1,4213	-1,5417	-1,7277

Таким образом, за счет изменения параметров локализации нагрузки на оболочку можно влиять на распределение перемещений и напряжений.

Полученные результаты и выявленные закономерности распределения полей перемещений и напряжений в нетонких конических оболочках переменной толщины представляют теоретический интерес и имеют практическое значение при оценке прочности и надежности элементов конструкций. Также отметим, что анализ напряженно-деформированного состояния пологих конических и сферических оболочек с переменной толщиной на основе уточненной теории проведен в [32, 55 – 62, 70, 71].

§8. Численное решение задач. О свободных колебаниях пологих оболочек с переменными параметрами (уточненная постановка).

Исходные соотношения. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях прямоугольной в плане, пологой ортотропной оболочки, переменной в двух координатных направлениях толщины $h(x, y)$, в уточненной постановке, основанной на гипотезе прямолинейного элемента. Геометрия плана оболочки приближенно отождествляется с геометрией срединной поверхности оболочки, а главные кривизны удовлетворяют соотношению $k_1 \cdot k_2 \approx 0$.

Согласно принятой гипотезе прямолинейного элемента, перемещения оболочки представим в виде

$$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t); \quad u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t); \quad (8.1)$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, y, t),$$

где x, y, z – координаты точек оболочки; u_x, u_y, u_z – соответствующие перемещения; u, v, w – перемещения точек координатной поверхности в направлениях x, y, z ; ψ_x, ψ_y – полные углы поворота прямолинейного элемента.

В соответствии с (8.1) выражения для деформаций запишем в виде

$$\begin{aligned}
e_x(x, y, z, t) &= \varepsilon_x(x, y, t) + z\chi_x(x, y, t); \\
e_y(x, y, z, t) &= \varepsilon_y(x, y, t) + z\chi_y(x, y, t); \\
e_{xy}(x, y, z, t) &= \varepsilon_{xy}(x, y, t) + z2\chi_{xy}(x, y, t); \\
e_{xz}(x, y, z, t) &\cong \gamma_x(x, y, t); \quad e_{yz}(x, y, z, t) \cong \gamma_y(x, y, t),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

где γ_x, γ_y – углы поворота, вызванные поперечными сдвигами; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тангенциальной деформации, определяющие внутреннюю геометрию координатной поверхности; $\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$ – компоненты изгибной деформации, характеризующие изгиб и кручение координатной поверхности.

Соотношения, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями, принимают вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\
\chi_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + k_1^2 w; \quad \chi_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2^2 w; \quad 2\chi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}; \\
\psi_x &= \gamma_x + \mathcal{G}_x; \quad \psi_y = \gamma_y + \mathcal{G}_y; \quad \mathcal{G}_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u; \quad \mathcal{G}_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v,
\end{aligned} \tag{8.3}$$

где $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y$ – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; k_1, k_2 – кривизны.

Уравнения, описывающие свободные поперечные колебания пологих оболочек в уточненной постановке, имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

В уравнениях (8.4) x, y – прямоугольные декартовы координаты точки срединной поверхности ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$); t – время; w – прогиб; ρ – плотность материала.

Для нормальных и сдвигающих усилий N_x, N_y и N_{xy}, N_{yx} , изгибающих и крутящих моментов M_x, M_y и M_{xy}, M_{yx} , перерезывающих усилий Q_x, Q_y справедливы такие соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
N_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y; \quad N_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y; \quad N_{xy} = C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_2 D_{66}\chi_{xy}; \\
N_{yx} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_1 D_{66}\chi_{xy};
\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$M_x = D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y; \quad M_y = D_{12}\chi_x + D_{22}\chi_y; \quad M_{xy} = M_{yx} = 2D_{66}\chi_{xy}; \quad Q_x = K_1\gamma_x; \quad Q_y = K_2\gamma_y,$$

где введены следующие обозначения:

$$C_{11} = \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad C_{12} = \nu_y C_{11}; \quad C_{22} = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad C_{66} = G_{xy} h;$$

$$D_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}; \quad D_{12} = \nu_y D_{11}; \quad D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}; \quad D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12}; \quad (8.6)$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{xz}; \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{yz}.$$

В уравнениях (8.5) E_x, E_y – модули упругости; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} – модули сдвига; ν_x, ν_y – коэффициенты Пуассона; $h = h(x, y)$ – толщина.

Из системы уравнений (8.4) – (8.5) получим пять эквивалентных дифференциальных уравнений относительно трех перемещений u, v и w точек срединной поверхности и двух полных углов поворота прямолинейного элемента ψ_x, ψ_y , т.е.

$$\begin{aligned} & C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial C_{11}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial C_{66}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial C_{12}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(k_1 \frac{\partial C_{11}}{\partial x} + k_2 \frac{\partial C_{12}}{\partial x} \right) w + (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + k_1 \frac{\partial D_{66}}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + k_1 D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial D_{66}}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + k_1 D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = 0; \\ & C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial C_{12}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial C_{66}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - k_2^2 K_2 v + \frac{\partial C_{66}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial C_{22}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(k_1 \frac{\partial C_{12}}{\partial y} + k_2 \frac{\partial C_{22}}{\partial y} + k_1^2 k_2 \frac{\partial D_{12}}{\partial y} + k_2^3 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \right) w + \\ & + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22} + k_2 K_2 + k_1^2 k_2 D_{12} + k_2^3 D_{22}) \frac{\partial w}{\partial y} - \\ & - k_2 \frac{\partial D_{12}}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - k_2 D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + k_2 K_2 \psi_y - k_2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2 D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = 0; \quad (8.7) \\ & K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial K_1}{\partial x} u - (K_1 k_1 + k_2 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{\partial u}{\partial x} - k_2 \frac{\partial K_2}{\partial y} v - \\ & - (K_2 k_2 + k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \frac{\partial v}{\partial y} - (k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22} - \rho h \omega^2) w + \\ & + \frac{\partial K_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial K_1}{\partial x} \psi_x + K_1 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} \psi_y + K_2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0; \\ & D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_1 k_1 u - \left(k_1^2 \frac{\partial D_{11}}{\partial x} + k_2^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial x} \right) w - (k_1^2 D_{11} + k_2^2 D_{12} + K_1) \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & - \left(K_1 - \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \right) \psi_x + \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial D_{66}}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial D_{66}}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_2 k_2 v - \left(k_1^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial y} + k_2^2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \right) w - (k_1^2 D_{12} + k_2^2 D_{22} + K_2) \frac{\partial w}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial D_{12}}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial D_{66}}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \\
& - \left(K_2 - \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \right) \psi_y + \frac{\partial D_{66}}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned}$$

На контурах оболочки $x = 0, a$ и $y = 0, b$ задаем граничные условия, которые определяются через перемещения и углы поворота. При $x = \text{const}$ задаем такие граничные условия:

1) жестко закрепленный контур

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a; \quad (8.8)$$

2) шарнирно закрепленный контур

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a; \quad (8.9)$$

3) один контур жестко закреплен, а второй – шарнирно закреплен

$$\begin{aligned}
& u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0; \\
& \frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \text{ при } x = a;
\end{aligned} \quad (8.10)$$

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах $y = \text{const}$. Для этого в уравнениях (8.8) – (8.10) следует произвести замену $x \rightarrow y, u \rightarrow v, \psi_x \rightarrow \psi_y$.

Методика решения. Решение системы уравнений (8.7) представим в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_{1,i}(y); \quad v(x, y) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_{2,i}(y); \quad w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_{3,i}(y); \\
\psi_x(x, y) &= \sum_{i=0}^N \psi_{x,i}(x) \varphi_{4,i}(y); \quad \psi_y(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{y,i}(x) \varphi_{5,i}(y),
\end{aligned} \quad (8.11)$$

где $u_i(x), v_i(x), w_i(x), \psi_{x,i}(x), \psi_{y,i}(x)$ ($i = 0, \dots, N$) – искомые функции; $\varphi_j(y)$ ($j = 1, \dots, 5$) – функции, построенные с помощью B -сплайнов третьей степени $N \geq 4$, удовлетворяющие граничным условиям на контурах $y = 0$ и $y = b$ с помощью линейных комбинаций B -сплайнов 3-й степени.

Запишем систему уравнений (8.7) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 \frac{\partial v}{\partial x} + a_5 \frac{\partial v}{\partial y} + a_6 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_7 w + \\
& + a_8 \frac{\partial w}{\partial x} + a_9 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + a_{10} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}; \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_4 v + b_5 \frac{\partial v}{\partial x} + b_6 \frac{\partial v}{\partial y} + b_7 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\
& + b_8 w + b_9 \frac{\partial w}{\partial y} + b_{10} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + b_{12} \psi_y + b_{13} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + b_{14} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial x} + c_3 v + c_4 \frac{\partial v}{\partial y} + c_5 w + c_6 \frac{\partial w}{\partial x} + c_7 \frac{\partial w}{\partial y} + \\
&+ c_8 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_9 \psi_x + c_{10} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + c_{11} \psi_y + c_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} &= d_1 u + d_2 w + d_3 \frac{\partial w}{\partial x} + d_4 \psi_x + d_5 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + d_6 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + d_7 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\
&+ d_8 \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + d_9 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + d_{10} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}; \\
\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} &= g_1 v + g_2 w + g_3 \frac{\partial w}{\partial y} + g_4 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + g_5 \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + g_6 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + g_7 \psi_y + \\
&+ g_8 \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + g_9 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + g_{10} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
(a_m = a_m(x, y) \quad (m=1, \dots, 12); \quad b_p = b_p(x, y) \quad (p=1, \dots, 14); \\
c_q = c_q(x, y) \quad (q=1, \dots, 4, 6, \dots, 12); \quad c_5 = c_5(x, y, \omega); \\
d_r = d_r(x, y) \quad (r=1, \dots, 3, 5, \dots, 10); \quad d_4 = d_4(x, y, \omega); \\
g_s = g_s(x, y) \quad (s=1, \dots, 6, 8, 9, 10); \quad g_7 = g_7(x, y, \omega)).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Подставив (8.11) в уравнения (8.12), требуем, чтобы они были удовлетворены в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, b]$, $k = 0, \dots, N$.

Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений приводим к нормальному виду

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x, \omega)\bar{Y} \quad (0 \leq x \leq a), \tag{8.14}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{Y} &= [\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_x, \bar{\psi}_x', \bar{\psi}_y, \bar{\psi}_y']^T = \\
&= [u_0, \dots, u_N, v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_N, \psi_{x0}, \dots, \psi_{xN}, \psi_{y0}, \dots, \psi_{yN}]^T
\end{aligned}$$

– вектор-столбец искомых функций и их производных размерностью $10(N+1)$; $A(x, \omega)$ – квадратная матрица порядка $10(N+1) \times 10(N+1)$.

Граничные условия (8.8) – (8.10) для системы (8.14) запишем в виде

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B_2 \bar{Y}(a) = \bar{0}. \tag{8.15}$$

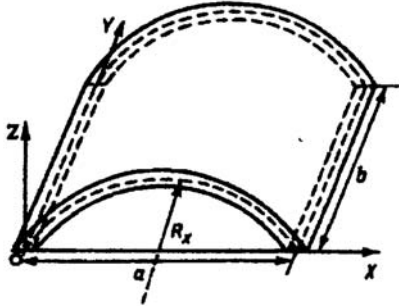


Рис. 24

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.14) с граничными условиями (8.15) решена методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Результаты расчетов.

На основе изложенной методики проведено исследование спектра собственных колебаний изотропной полой оболочкой переменной толщины с квадратным планом ($a = b = 0,5$ м).

Толщина оболочки изменялась по следующему закону:

$$h = h_0 [1 + \alpha (6\zeta^2 - 6\zeta + 1)], \quad (8.16)$$

где $0 \leq \zeta \leq 1$, $|\alpha| < 1$; $\zeta = x/a$; h_0 – толщина оболочки постоянной толщины и эквивалентной массы (при расчетах принято $h_0 = 0,04$ м). Для полой цилиндрической оболочки – $k_1 = 1/R_x$, $k_2 = 1/R_y = 0$.

При расчетах количество точек коллокации принято $N = 14$. Физические параметры оболочки: $E = 2,016 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7800$ кг/м³. Исследования проведены для трех вариантов значений кривизны оболочки: $r_x = 6,26000$; $r_x = 1,60250$ и $r_x = 0,86125$, где $r_x = R_x/a$ – безразмерный радиус кривизны.

Решения задач получены при таких граничных условиях:

1) жесткое закрепление по всему контуру (ТГ=1)

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a;$$

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } y = 0, y = b;$$

2) жесткое закрепление по трем сторонам и шарнирное опирание по четвертой стороне (ТГ = 2)

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a;$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; y = b;$$

3) жесткое закрепление двух противоположных сторон и шарнирное опирание двух других сторон (ТГ = 3)

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a;$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, y = b;$$

4) жесткое закрепление двух смежных сторон и шарнирное опирание двух других сторон (ТГ=4)

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, y = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \text{ при } x = a; u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = b;$$

5) шарнирное опирание всех сторон оболочки (ТГ=5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a;$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, y = b.$$

Расчеты, проведенные при разном количестве точек коллокации N , дают небольшое расхождение. Наблюдается тенденция увеличения абсолютного значения частоты и, соответственно, точности вычислений при увеличении количества точек коллокации, однако при $N > 16$ различие становится практически незаметным. Исходя из этого, все расчеты проведены при $N = 18$, что дало возможность получать результаты с погрешностью менее 1% (погрешность – в расхождении между вычисленными частотами и полученными аналитически, путем разложения функций в ряды Фурье).

В табл. 15 представлена зависимость безразмерных значений резонансных частот от количества точек коллокации N для оболочек с разной кривизной срединной поверхности при шарнирном опирании всех краев и постоянной толщине ($\alpha = 0$).

Для проверки достоверности получаемых результатов проведено сравнение значений собственных частот колебаний пологой изотропной оболочки с квадратным планом, вычисленных с помощью описанной методики при шарнирном опирании всех сторон с соответствующими частотами, рассчитанными аналитически, путем разложения функций в ряды Фурье. При этом использовано следующее разложение:

$$u = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad v = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b};$$

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (8.17)$$

$$\psi_x = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} d_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad \psi_y = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} e_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Таблица 15

r_x	i	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$							
		N							
		8	10	12	14	16	18	20	22
6,26000	1	0,4606	0,4557	0,4537	0,4528	0,4523	0,4520	0,4518	0,4517
	2	1,0829	1,0810	1,0802	1,0799	1,0797	1,0796	1,0795	1,0795
	3	1,0829	1,0810	1,0802	1,0799	1,0797	1,0796	1,0795	1,0795
	4	1,1817	1,1294	1,1085	1,0986	1,0937	1,0908	1,0891	1,0881
1,60250	1	1,7392	1,7056	1,6926	1,6866	1,6835	1,6818	1,6808	1,6801
	2	0,5364	0,5322	0,5305	0,5297	0,5292	0,5290	0,5289	0,5289
	3	1,0810	1,0791	1,0783	1,0779	1,0777	1,0776	1,0775	1,0775
	4	1,2631	1,2140	1,1945	1,1854	1,1807	1,1781	1,1766	1,1757
0,86125	1	1,7559	1,7225	1,7095	1,7036	1,7005	1,6988	1,6978	1,6972
	2	0,6980	0,6947	0,6934	0,6928	0,6925	0,6923	0,6921	0,6921
	3	1,0760	1,0740	1,0732	1,0728	1,0726	1,0725	1,0724	1,0724
	4	1,4558	1,4131	1,3962	1,3883	1,3843	1,3821	1,3808	1,3800

В табл. 16 приведены результаты расчетов безразмерных частот исследуемой оболочки, полученные с помощью разложения (8.17) (А) и с использованием изложенной методики при $N = 18$ (В), а также определено расхождение между аналитическими и вычисленными частотами, выраженное в процентах (П). Согласно табл. 16, максимальное расхождение не превышает 0,5%, что свидетельствует о высокой точности применяемого метода, основанного на сплайн-аппроксимации неизвестных функций.

Таблица 16

<i>i</i>	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$								
	$r_x = 6,26000$			$r_x = 1,60250$			$r_x = 0,86125$		
	A	B	П, %	A	B	П, %	A	B	П, %
1	0,4516	0,4519	0,08	0,5287	0,5290	0,07	0,6920	0,6923	0,04
2	1,0794	1,0796	0,02	1,0775	1,0776	0,01	1,0724	1,0725	0,01
3	1,0860	1,0908	0,45	1,1737	1,1781	0,38	1,3783	1,3821	0,28
4	1,6788	1,6818	0,18	1,6959	1,6988	0,17	1,7400	1,7429	0,17

В табл. 17, 18 приведены безразмерные значения первых четырех резонансных частот колебаний оболочек переменной ($|\alpha| > 0$) и постоянной толщин ($\alpha = 0$) с радиусами кривизны срединной поверхности $r_x = 6,26000$; $r_x = 1,60250$, соответственно, для рассматриваемых граничных условий (ГГ).

Таблица 17

ГГ	<i>i</i>	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$										
		α										
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	1	0,7514	0,7591	0,7665	0,7739	0,7813	0,7889	0,7967	0,8048	0,8131	0,8218	0,8308
	2	1,3567	1,3969	1,4317	1,4620	1,4884	1,5116	1,5060	1,4866	1,4661	1,4447	1,4225
	3	1,5921	1,5827	1,5709	1,5570	1,5414	1,5244	1,5318	1,5491	1,5640	1,5764	1,5865
	4	2,0631	2,0911	2,1130	2,1297	2,1420	2,1503	2,1551	2,1566	2,1549	2,1502	2,1426
2	1	0,6370	0,6513	0,6652	0,6788	0,6924	0,7060	0,7196	0,7334	0,7473	0,7613	0,7754
	2	1,3080	1,3500	1,3766	1,3681	1,3581	1,3472	1,3352	1,3226	1,3092	1,2954	1,2810
	3	1,3884	1,3836	1,3863	1,4182	1,4461	1,4707	1,4923	1,5111	1,5273	1,5411	1,5526
	4	1,9362	1,9660	1,9896	2,0082	2,0226	2,0331	2,0402	2,0440	2,0450	2,0430	2,0381
3	1	0,5538	0,5733	0,5922	0,6107	0,6289	0,6470	0,6649	0,6828	0,7006	0,7185	0,7363
	2	1,1981	1,1987	1,1975	1,1950	1,1914	1,1870	1,1819	1,1763	1,1702	1,1637	1,1571
	3	1,2698	1,3132	1,3509	1,3839	1,4131	1,4388	1,4615	1,4815	1,4989	1,5138	1,5263
	4	1,8231	1,8547	1,8802	1,9009	1,9172	1,9299	1,9392	1,9453	1,9487	1,9493	1,9422
4	1	0,5847	0,5897	0,5943	0,5983	0,6022	0,6060	0,6098	0,6138	0,6179	0,6223	0,6271
	2	1,1978	1,2244	1,2460	1,2636	1,2774	1,2879	1,2854	1,2722	1,2580	1,2435	1,2287
	3	1,3532	1,3454	1,3359	1,3251	1,3133	1,3013	1,2987	1,3040	1,3077	1,3095	1,3094
	4	1,8469	1,8683	1,8845	1,8963	1,9045	1,9096	1,9119	1,9114	1,9085	1,9032	1,8957
5	1	0,4467	0,4485	0,4496	0,4503	0,4511	0,4519	0,4532	0,4551	0,4577	0,4610	0,4654
	2	1,0512	1,0649	1,0737	1,0786	1,0805	1,0796	1,0762	1,0707	1,0632	1,0540	1,0431
	3	1,1289	1,1229	1,1158	1,1078	1,0995	1,0908	1,0820	1,0733	1,0648	1,0564	1,0484
	4	1,6422	1,6569	1,6676	1,6750	1,6796	1,6818	1,6819	1,6802	1,6766	1,6716	1,6649

Таблица 18

ТГ	i	$\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$										
		α										
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	1	0,8914	0,9009	0,9098	0,9184	0,9269	0,9355	0,9440	0,9528	0,9617	0,9709	0,9804
	2	1,3757	1,4143	1,4479	1,4772	1,5028	1,5252	1,5448	1,5617	1,5554	1,5361	1,5159
	3	1,6692	1,6611	1,6505	1,6380	1,6239	1,6084	1,5917	1,5740	1,5762	1,5883	1,5980
	4	2,0956	2,1226	2,1434	2,1593	2,1708	2,1785	2,1827	2,1836	2,1816	2,1764	2,1683
2	1	0,7943	0,8092	0,8235	0,8373	0,8509	0,8645	0,8779	0,8914	0,9049	0,9185	0,9323
	2	1,3257	1,3662	1,4014	1,4322	1,4505	1,4412	1,4308	1,4200	1,4083	1,3963	1,3839
	3	1,4752	1,4717	1,4660	1,4589	1,4595	1,4834	1,5045	1,5228	1,5387	1,5523	1,5635
	4	1,9702	1,9987	2,0214	2,0391	2,0527	2,0624	2,0689	2,0723	2,0727	2,0702	2,0649
3	1	0,7272	0,7461	0,7641	0,7815	0,7987	0,8156	0,8324	0,8491	0,8657	0,8824	0,8990
	2	1,2858	1,2982	1,2983	1,2971	1,2949	1,2919	1,2883	1,2842	1,2796	1,2748	1,2698
	3	1,2963	1,3277	1,3644	1,3966	1,4251	1,4503	1,4725	1,4921	1,5092	1,5239	1,5363
	4	1,8586	1,8889	1,9133	1,9329	1,9483	1,9603	1,9689	1,9745	1,9773	1,9773	1,9748
4	1	0,6773	0,6842	0,6904	0,6962	0,7017	0,7069	0,7122	0,7174	0,7229	0,7284	0,7342
	2	1,2127	1,2387	1,2598	1,2770	1,2909	1,3019	1,3104	1,3165	1,3203	1,3218	1,3192
	3	1,4248	1,4193	1,4119	1,4033	1,3936	1,3832	1,3721	1,3608	1,3491	1,3378	1,3286
	4	1,8739	1,8945	1,9101	1,9214	1,9292	1,9339	1,9359	1,9351	1,9320	1,9266	1,9189
5	1	0,5082	0,5133	0,5175	0,5214	0,5251	0,5290	0,5332	0,5378	0,5430	0,5489	0,5557
	2	1,0496	1,0629	1,0716	1,0767	1,0785	1,0776	1,0744	1,0690	1,0618	1,0527	1,0421
	3	1,2014	1,1984	1,1942	1,1893	1,1839	1,1781	1,1723	1,1665	1,1608	1,1555	1,1504
	4	1,6582	1,6732	1,6840	1,6916	1,6963	1,6988	1,6992	1,6977	1,6944	1,6896	1,6832

На рис. 25 приведены первые четыре формы колебаний изотропной оболочки переменной толщины при разном значении кривизны срединной поверхности для случая $\alpha = 0,1$ для граничных условий ТГ = 1.

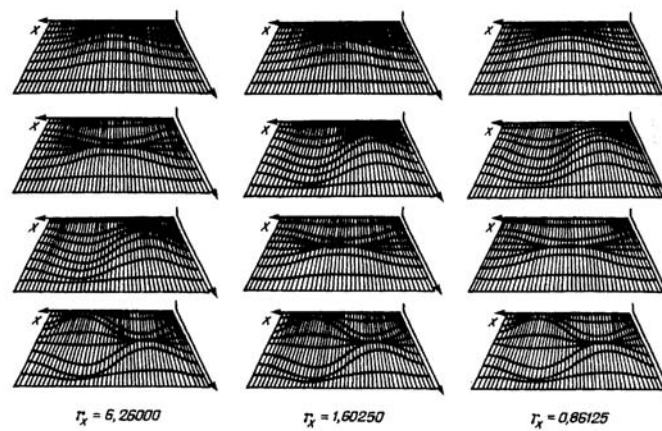


Рис. 25

Анализируя данные табл. 17, 18 заключаем, что собственные частоты колебаний изотропных оболочек изменяются быстрее при изменении жесткости закрепления контуров, чем при изменении параметра α . С уменьшением жесткости закрепления уменьшаются значения частот колебаний. Значительное влияние на поведение собственных частот оказывает также и геометрическая форма ограничивающих оболочку поверхностей, которые являются симметричными относительно срединной поверхности. Вследствие этого, чем больше отличаются кривизны ограничивающих и срединной поверхностей оболочки, тем значительнее отличаются значения ее частот для переменной и постоянной толщин. Во всех случаях кривизны срединной поверхности оболочки наблюдается практически линейная зависимость первой частоты колебаний от параметра α при разных граничных условиях. Для высших частот во всех случаях зависимость $\bar{\omega} = f(\alpha)$ – нелинейна. Скорость изменения частоты при изменении параметра α для низших частот меньше, чем для высших. Анализируя формулу изменения толщины оболочки (8.16), отметим, что минимальная толщина будет в точках $(a/2; y)$; это отражается на формах колебаний оболочек (рис. 25) в виде незначительного смещения максимальных амплитуд к центру в случае нечетного числа полуволн в направлении оси OX .

С помощью изложенной методики проведено исследование спектра частот собственных колебаний ортотропной пологой оболочки двойкой кривизны переменной толщины с квадратным планом ($a = b = 0,5$ м). Количество точек коллокации – $N = 18$. Материал оболочки – ортогонально армированный (2:1) стеклопластик со следующими физическими параметрами: $E_1 = 3,68 \cdot 10^{10}$ Па; $E_2 = 2,68 \cdot 10^{10}$ Па; $G_{12} = 0,50 \cdot 10^{10}$ Па; $G_{23} = 0,41 \cdot 10^{10}$ Па; $G_{31} = 0,45 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = 0,077$; $\nu_2 = 0,105$; $\rho = 1870$ кг/м³.

Рассмотрено три случая кривизны оболочки: $r_x = r_y = 12,5$; $3,125$; $1,5625$, где $r_x = R_x/a$ и $r_y = R_y/b$ – безразмерные радиусы кривизны.

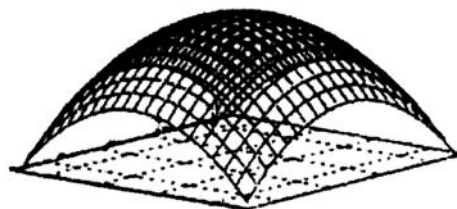


Рис. 26

Таблица 19

$r_x = r_y$	i	$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_{11}}$							
		N							
		8	10	12	14	16	18	20	22
12,5	1	15,6808	15,6128	15,5885	15,5788	15,5739	15,5690	15,5690	15,5690
	2	38,9396	38,2883	37,9577	37,8168	37,7439	37,7098	37,6855	37,6758
	3	39,1875	38,9153	38,9056	38,9007	38,8959	38,8959	38,8959	38,8959
	4	55,0336	54,4163	54,1878	54,0906	54,0420	54,0177	54,0031	53,9934
3,125	1	17,3967	17,3384	17,3141	17,3043	17,2995	17,2995	17,2946	17,2946
	2	39,8583	39,2312	38,9007	38,7598	38,6917	38,6577	38,6334	38,6237
	3	40,1256	39,8291	39,8194	39,8194	39,8145	39,8145	39,8145	39,8145
	4	55,5537	54,9364	54,7079	54,6107	54,5621	54,5378	54,5232	54,5135
1,5625	1	22,0193	21,9658	21,9464	21,9415	21,9366	21,9318	21,9318	21,9318
	2	42,6629	42,1040	41,7831	41,6470	41,5790	41,5450	41,5207	41,5109
	3	42,9789	42,6338	42,6289	42,6241	42,6192	42,6192	42,6192	42,6192
	4	57,1869	56,5647	56,3363	56,2391	56,1905	56,1662	56,1516	56,1419

С помощью метода сплайн-аппроксимации получены безразмерные частоты колебаний оболочек при разном количестве точек коллокации ($N = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$). В табл. 19 приведены соответствующие частоты для исследуемых оболочек при шарнирном опирании всех сторон и значении параметра $\alpha = -0,4$, а в табл. 20 – аналогичные данные при жестком закреплении всех сторон и $\alpha = 0,4$. При $N \geq 16$ значения частот мало отличаются с увеличением числа точек коллокации при всех типах граничных условий и кривизнах срединной поверхности оболочки.

Таблица 20

$r_x = r_y$	i	$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_{11}}$							
		N							
		8	10	12	14	16	18	20	22
12,5	1	29,8111	29,6507	29,5826	29,5535	29,5389	29,5340	29,5292	29,5292
	2	50,3770	48,8993	48,3209	48,0584	47,9272	47,8542	47,8154	47,7911
	3	56,2099	56,1564	56,1370	56,1273	56,1224	56,1175	56,1175	56,1175
	4	71,9734	71,0936	70,7533	70,5978	70,5249	70,4811	70,4617	70,4471
3,125	1	33,8601	33,6851	33,6171	33,5879	33,5685	33,5636	33,5587	33,5539
	2	52,0539	50,5811	50,0076	49,7451	49,6138	49,5458	49,5020	49,4777
	3	57,2404	57,1821	57,1578	57,1432	57,1383	57,1383	57,1383	57,1334
	4	72,6587	71,7595	71,4144	71,2540	71,1762	71,1373	71,1130	71,1033
1,5625	1	44,2524	44,0337	43,9462	43,9073	43,8879	43,8781	43,8733	43,8684
	2	57,0654	55,5974	55,0287	54,7711	54,6447	54,5718	54,5329	54,5086
	3	60,4145	60,3270	60,2929	60,2784	60,2686	60,2686	60,2638	60,2638
	4	74,8023	73,8496	73,4802	73,3149	73,2372	73,1934	73,1691	73,1545

Таблица 21

Граничные условия	i	$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_{11}}$				
		α				
		-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ТГ-1	1	25,9322	26,2919	26,6516	27,0259	27,4050
	2	47,9612	49,4243	50,6832	50,5034	50,1339
	3	51,3491	51,1158	50,8339	51,7866	52,7539
	4	66,0967	67,1126	67,9438	68,6292	69,1833
ТГ-2	1	22,1797	22,7387	23,3025	23,8712	24,4497
	2	45,8273	45,6523	45,4287	45,1760	44,9038
	3	46,4786	47,9903	49,2930	50,4402	51,4464
	4	62,5143	63,5740	64,4489	65,1732	65,7759
ТГ-3	1	20,3277	20,4881	20,6242	20,7458	20,8624
	2	42,9886	44,0094	43,9851	43,5622	43,1101
	3	44,7336	44,3934	44,8600	45,5357	46,0801
	4	59,7972	60,5360	61,1047	61,5324	61,8435
ТГ-4	1	19,4382	20,1819	20,9159	21,6547	22,3887
	2	40,2763	40,1985	40,0867	39,9604	39,8194
	3	45,3801	46,9307	48,2771	49,4534	50,4985
	4	59,1847	60,2929	61,2165	61,9942	62,6456
ТГ-5	1	15,6225	15,5690	15,4864	15,3795	15,2628
	2	38,1327	37,7098	37,2529	36,7766	36,2905
	3	38,3271	38,8959	39,2653	39,4743	39,5375
	4	53,5656	54,0177	54,3142	54,4892	54,5572

В табл. 21, 22 приведены безразмерные значения первых четырех резонансных частот колебаний ортотропной оболочки переменной ($|\alpha| > 0$) и постоянной ($\alpha = 0$) толщин с радиусом кривизны срединной поверхности $r_x = r_y = 12,5$.

Таблица 22

Граничные условия	i	$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_{11}}$					
		α					
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ТГ-1	1	27,7987	28,2070	28,6348	29,0722	29,5340	30,0104
	2	49,7354	49,3028	48,8410	48,3598	47,8542	47,3341
	3	53,6094	54,3628	55,0287	55,6120	56,1175	56,5550
	4	69,6305	69,9756	70,2284	70,3985	70,4811	70,4860
ТГ-2	1	25,0329	25,6357	26,2433	26,8655	27,5022	28,1536
	2	44,6073	44,2962	43,9754	43,6448	43,3143	42,9886
	3	52,3407	53,1330	53,8379	54,4600	55,0044	55,4808
	4	66,2668	66,6654	66,9716	67,1952	67,3459	67,4188
ТГ-3	1	20,9693	21,0763	21,1735	21,2756	21,3728	21,4700
	2	42,6386	42,1526	41,6519	41,1512	40,6506	40,1548
	3	46,5175	46,8529	47,1057	47,2758	47,3730	47,4022
	4	62,0525	62,1692	62,2032	62,1546	62,0331	61,8387
ТГ-4	1	23,1324	23,8761	24,6246	25,3829	26,1461	26,9141
	2	39,6736	39,5229	39,3819	39,2458	39,1194	39,0125
	3	51,4220	52,2484	52,9775	53,6288	54,2073	54,7128
	4	63,1900	63,6420	64,0114	64,2982	64,5170	64,6579
ТГ-5	1	15,1413	15,0198	14,9128	14,8156	14,7427	14,6990
	2	35,7947	35,3037	34,8225	34,3608	33,9136	33,5004
	3	39,4791	39,3042	39,0271	38,6528	38,1910	37,6369
	4	54,5281	54,4211	54,2413	53,9934	53,6823	53,3129

На рис. 27 показаны первые четыре собственные формы колебаний ортотропных пологих оболочек двойкой кривизны с переменной толщиной для граничных условий ТГ=1; $\alpha = 0,1$.

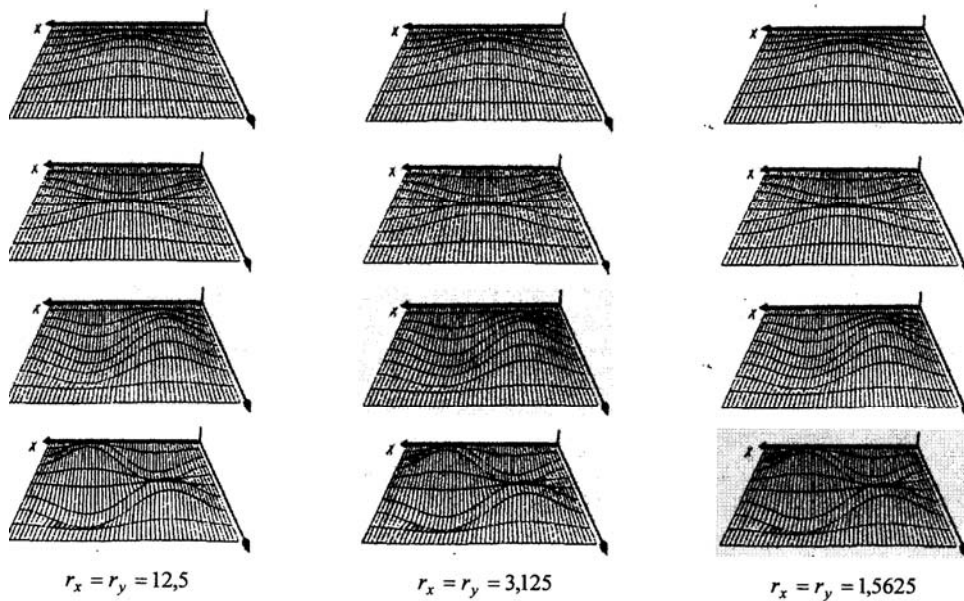


Рис. 27

Из данных табл. 21, 22 следует, что собственные частоты колебаний ортотропных оболочек изменяются быстрее с изменением граничных условий на контурах, чем при изменении параметра α . Значения частот колебаний возрастают с увеличением жесткости закрепления. Первая частота колебаний во всех случаях кривизны срединной поверхности оболочки имеет почти линейную зависимость от параметра α при разных граничных условиях. Однако, для высших частот зависимость $\bar{\omega} = f(\alpha)$ является нелинейной. Для высших частот при изменении параметра α наблюдается большая скорость изменения частот, чем для низших. Из рис. 27 видно, что при разных значениях кривизны срединной поверхности оболочек формы свободных колебаний имеют одинаковый порядок следования и соответствуют формам колебания пластины с аналогичными размерами в плане.

Результаты расчетов подтверждают возможность использования предложенной методики для определения собственных частот колебаний пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны с различными механическими и геометрическими параметрами при разных граничных условиях на контурах. Это позволяет вычислять необходимые динамические характеристики конструкций данной формы с целью определения несущей способности и обеспечения запаса прочности.

Решение данного класса задач проведено в [15, 48, 49, 58 – 62].

§9. Свободные колебания замкнутых цилиндрических оболочек с переменными параметрами (уточненная постановка).

Постановка задачи. Рассмотрим свободные колебания круговых замкнутых цилиндрических оболочек переменной толщины. Для определения частот и форм собственных колебаний таких оболочек необходимо использовать уточненную теорию. В работе используется уточненная теория Тимошенко – Миндлина, которая базируется на гипотезе прямой линии.

Согласно принятой гипотезе в системе координат $\theta\gamma z$ (γ – координата в направлении нормали к срединной поверхности), связанной со срединной поверхностью оболочки, малые перемещения оболочки можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= w(\theta, z); \quad u_\theta(r, \theta, z) = v(\theta, z) + \gamma \Psi_\theta(\theta, z); \\ u_z(r, \theta, z) &= u(\theta, z) + \gamma \Psi_z(\theta, z), \end{aligned} \quad (9.1)$$

где $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$ – перемещения координатной поверхности; $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ – функции, характеризующие полный поворот нормали ($-H/2 \leq \gamma \leq H/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$).

Геометрические соотношения имеют вид

$$e_\theta(r, \theta, z) = \varepsilon_\theta(\theta, z) + \gamma \kappa_\theta(\theta, z); \quad e_z(r, \theta, z) = \varepsilon_z(\theta, z) + \gamma \kappa_z(\theta, z);$$

$$e_{\theta z}(r, \theta, z) = \varepsilon_{\theta z}(\theta, z) + 2\gamma \kappa_{\theta z}(\theta, z); \quad e_{\gamma\theta}(r, \theta, z) = \gamma_\theta(\theta, z); \quad e_{\gamma z}(r, \theta, z) = \gamma_z(\theta, z);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\kappa_z = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}; \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right); \quad 2\kappa_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad (9.2)$$

$$\gamma_\theta = \Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v; \quad \gamma_z = \Psi_z + \frac{\partial w}{\partial z},$$

где $\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенциальные деформации срединной поверхности; $\kappa_\theta, \kappa_z, \kappa_{\theta z}$ – компоненты изгибной деформации; γ_θ, γ_z – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами. Соотношения упругости для ортотропных цилиндрических оболочек переменной толщины имеют вид

$$N_z = C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta; \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta; \quad N_{z\theta} = C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66}\frac{1}{R}\kappa_{\theta z};$$

$$M_z = D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_\theta; \quad M_\theta = D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta; \quad M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z};$$

$$Q_\theta = K_2\gamma_\theta; \quad Q_z = K_1\gamma_z; \quad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z} \quad (K_1 = 5h(\theta, z)G_{13}/6; \quad K_2 = 5h(\theta, z)G_{23}/6; \quad (9.3)$$

$$C_{ij} = B_{ij}h(\theta, z); \quad D_{ij} = B_{ij}h^3(\theta, z)/12;$$

$$B_{11} = B_{22} = E/(1-\nu^2); \quad B_{66} = E/2(1+\nu); \quad B_{12} = \nu E/(1-\nu^2);$$

G_{13}, G_{23} – модули поперечных сдвигов; E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона).

Уравнения движения элемента срединной поверхности имеют вид

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}; \quad (9.4)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}; \quad N_{z\theta} - \frac{1}{R} M_{\theta z} - N_{\theta z} = 0.$$

Здесь $N_z, N_\theta, N_{z\theta}, N_{\theta z}$ и Q_z, Q_θ – тангенциальные и перерезывающие усилия; $M_z, M_\theta, M_{z\theta}, M_{\theta z}$ – изгибающие и крутящие моменты; ρ и $h = h(\theta, z)$ – плотность материала и толщина оболочки.

Предполагая, что все точки оболочки совершают гармонические колебания с круговой частотой ω , учитывая представления

$$u(\theta, z, t) = \tilde{u}(\theta, z)e^{i\omega t}; \quad v(\theta, z, t) = \tilde{v}(\theta, z)e^{i\omega t}; \quad w(\theta, z, t) = \tilde{w}(\theta, z)e^{i\omega t};$$

$$\Psi_\theta(\theta, z, t) = \tilde{\Psi}_\theta(\theta, z)e^{i\omega t}; \quad \Psi_z(\theta, z, t) = \tilde{\Psi}_z(\theta, z)e^{i\omega t}$$

(далее знак \sim опускается), уравнения движения представим так:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + \rho h \omega^2 u = 0; \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta + \rho h \omega^2 v = 0;$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + \rho h \omega^2 w = 0; \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \psi_z = 0; \quad (9.5)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \psi_\theta = 0.$$

Подставляя соотношения (9.2) – (9.3) в (9.5), получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно функций $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$, $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ и их производных

$$L_i \left(u, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z}; v, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z}; \right. \\ \left. w, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z}; \Psi_\theta, \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta \partial z}; \right. \\ \left. \Psi_z, \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial \theta \partial z}, \omega^2 \right) = 0, \quad (9.6)$$

где L_i ($i=1, 5$) – линейные операторы.

Добавляя к системе (9.6) граничные условия на контурах оболочки, получаем двумерную краевую задачу.

Методика решения. Для решения поставленной задачи использована и развита численно-аналитическая методика, основанная на сведении двумерной краевой задачи к одномерной методом сплайн-коллокации и последующим ее решением методом дискретной ортогонализации с применением метода пошагового поиска [1 – 5].

Решение системы (9.6) определим в виде

$$u(z; \theta) = \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(z); \quad v(z; \theta) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(z); \quad w(z; \theta) = \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(z); \\ \Psi_z(z; \theta) = \sum_{i=0}^N \Psi_{zi}(\theta) \varphi_{4i}(z); \quad \Psi_\theta(z; \theta) = \sum_{i=0}^N \Psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(z), \quad (9.7)$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\Psi_{\theta i}(\theta)$, $\Psi_{zi}(\theta)$ – функции переменной θ , $\varphi_{ji}(z)$ ($j=1, \dots, 5$, $i=0, \dots, N$) – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени на равномерной сетке $\{\Delta: 0=z_0 < z_1 < \dots < z_N=L\}$ с учетом граничных условий при $z=0$ и $z=L$.

Систему дифференциальных уравнений (6) приводим к виду

$$\bar{Y}' = A(\theta, \omega) \bar{Y}, \quad (9.8)$$

где $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\Psi}_z, \bar{\Psi}'_z, \bar{\Psi}_\theta, \bar{\Psi}'_\theta\}^T$; $A(\theta, \omega)$ – квадратная матрица порядка $10(N+1) \times 10(N+1)$. Граничные условия имеют такой вид:

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B_2 \bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \quad (9.9)$$

Здесь B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы порядка $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Краевая задача (9.8) – (9.9) на собственные значения решена методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска.

Исследован спектр частот свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки переменной в круговом направлении толщины, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$, $H_0 = 2$, $p = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, для $\alpha = 0; 0,1; 0,2; 0,3$. Торцы оболочки жестко закреплены. Рис. 28 иллюстрирует характер изменения толщины оболочки в круговом направлении в зависимости от параметра p ($p = 2, 4, 6, 8$, соответственно) при $\alpha = 0,3$.

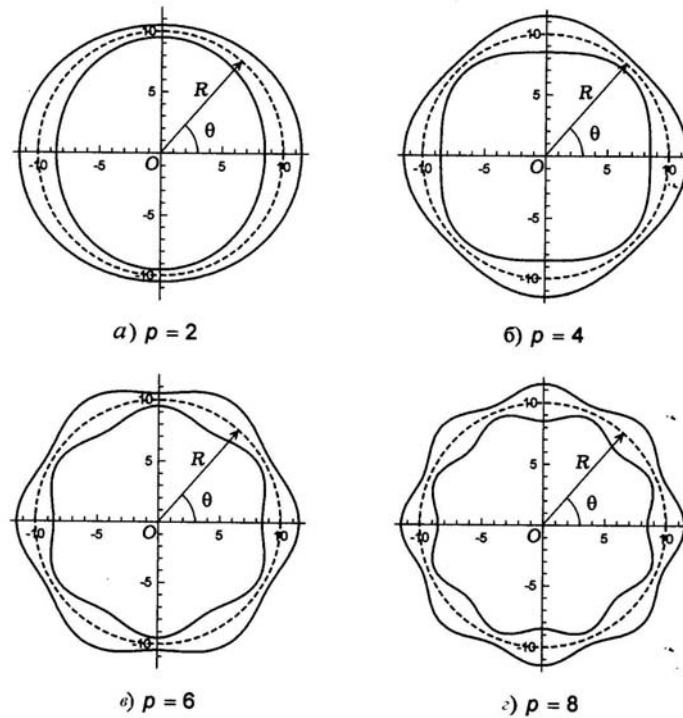


Рис. 28

В табл. 23 для этого случая представлены результаты вычислений первых трех значений безразмерного частотного параметра $\Omega_m = \omega_m H_0 \sqrt{\rho / G}$ (m – номер частоты).

Таблица 23

p	Ω	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$
2	Ω_1	0,0899	0,0900	0,0901	0,0905
	Ω_2	0,1083	0,1071	0,1060	0,1048
	Ω_3	0,1089	0,1087	0,1083	0,1077
4	Ω_1	0,0899	0,0905	0,0909	0,0910
	Ω_2	0,1083	0,1063	0,1039	0,1013
	Ω_3	0,1089	0,1089	0,1089	0,1088
6	Ω_1	0,0899	0,0898	0,0895	0,0890
	Ω_2	0,1083	0,1057	0,1030	0,1001
	Ω_3	0,1089	0,1084	0,1080	0,1076
8	Ω_1	0,0899	0,0898	0,0894	0,0888
	Ω_2	0,1083	0,1059	0,1033	0,1005
	Ω_3	0,1089	0,1091	0,1092	0,1089

Отметим, что в случаях $p = 2, 4$ первая частота возрастает при увеличении параметра α , а вторая и третья частоты уменьшаются. При $p = 6, 8$ все три частоты уменьшаются при увеличении параметра α .

Также исследована зависимость от параметра p частоты свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки переменной в круговом направлении толщины, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$. Расчеты проведены при $H_0 = 2$, $p = 2\ell$, $\ell = 1, \dots, 20$ и $\alpha = 0,3$. Результаты вычислений представлены в табл. 24.

Таблица 24

p	Ω_1	Ω_2	Ω_3
2	0,0905	0,1048	0,1077
4	0,0910	0,1013	0,1088
6	0,0890	0,1001	0,1076
8	0,0888	0,1005	0,1089
10	0,0887	0,1004	0,1085
12	0,0885	0,1003	0,1083
14	0,0884	0,1002	0,1082
16	0,0882	0,1001	0,1080
18	0,0881	0,1000	0,1079
20	0,0880	0,0999	0,1077
22	0,0879	0,0998	0,1076
24	0,0878	0,0997	0,1075
26	0,0877	0,0997	0,1075
28	0,0877	0,0996	0,1074
30	0,0876	0,0996	0,1073
32	0,0876	0,0996	0,1073
34	0,0875	0,0995	0,1072
36	0,0875	0,0995	0,1072
38	0,0874	0,0995	0,1072
40	0,0874	0,0994	0,1071

Анализ полученных результатов показывает, что влияние параметра p на собственные частоты колебаний оболочки более выражено при значениях $2 \leq p \leq 8$. Начиная со значения $p = 8$ при увеличении параметра p первые три частоты монотонно убывают.

Таблица 25

L	L/R	Жесткое закрепление		Шарнирное опирание	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$
15	1,5	0,1256	0,1257	0,0987	0,0902
20	2,0	0,0899	0,0901	0,0707	0,0706
25	2,5	0,0703	0,0704	0,0547	0,0546
30	3,0	0,0579	0,0581	0,0450	0,0449
35	3,5	0,0497	0,0498	0,0389	0,0389
40	4,0	0,0439	0,0439	0,0350	0,0350
45	4,5	0,0397	0,0397	0,0325	0,0324
50	5,0	0,0366	0,0366	0,0307	0,0307
55	5,5	0,0343	0,0343	0,0273	0,0273
60	6,0	0,0325	0,0325	0,0238	0,0239
65	6,5	0,0303	0,0296	0,0209	0,0211
70	7,0	0,0276	0,0270	0,0185	0,0187
75	7,5	0,0252	0,0247	0,0165	0,0167
80	8,0	0,0231	0,0227	0,0148	0,0150
85	8,5	0,0213	0,0210	0,0133	0,0136
90	9,0	0,0197	0,0194	0,0120	0,0123
95	9,5	0,0182	0,0180	0,0109	0,0112
100	10,0	0,0169	0,0167	0,0100	0,0103
105	10,5	0,0157	0,0156	0,0091	0,0094
110	11,0	0,0146	0,0146	0,0084	0,0086
115	11,5	0,0137	0,0136	0,0078	0,0080
120	12,0	0,0128	0,0128	0,0072	0,0074
125	12,5	0,0120	0,0120	0,0066	0,0069
130	13,0	0,0112	0,0113	0,0062	0,0064
135	13,5	0,0106	0,0106	0,0057	0,0059
140	14,0	0,0099	0,0100	0,0054	0,0056
145	14,5	0,0094	0,0094	0,0050	0,0052
150	15	0,0088	0,0089	0,0047	0,0049

Изучено влияние изменения длины оболочки $15 \leq L \leq 150$ на распределение частот свободных колебаний круговой замкнутой цилиндрической оболочки при постоянном радиусе срединной поверхности оболочки ($R = 10$). Рассмотрены оболочки с толщиной, изменяющейся в окружном направлении по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$ при $p = 2$, $H_0 = 2$, $\alpha = 0,2$, и оболочки постоянной толщины ($\alpha = 0$) для различных условий закрепления торцов. Результаты вычислений частотного параметра Ω представлены в табл. 25.

Проведено сравнение первых частот свободных колебаний рассматриваемых оболочек. Влияние параметра α на частоты колебаний существенно для коротких оболочек при шарнирном закреплении торцов (до 8%) и менее существенно при жестком закреплении (до 2%) для достаточно коротких оболочек ($15 \leq L \leq 20$).

При увеличении длины цилиндра влияние параметра α незначительно. Первая частота стремится к нулю при увеличении длины цилиндра, что соответствует результатам, полученным для тонких оболочек [13, 14].

Рассмотрена зависимость влияния изменения радиуса срединной поверхности $10 \leq R \leq 20$ при постоянной длине $L = 20$ на распределение собственных частот колебаний оболочки при различных условиях закрепления торцов. Исследованы случаи оболочки с толщиной, изменяющейся в окружном направлении по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$ при $p = 2$, $H_0 = 2$, $\alpha = 0,2$, и оболочки постоянной толщины ($\alpha = 0$) для различных условий закрепления торцов. Результаты вычислений частотного параметра Ω представлены в табл. 26.

Таблица 26

R	R / L	Жесткое закрепление		Шарнирное опирание	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$
10,0	0,5000	0,0899	0,0901	0,0707	0,0706
10,5	0,525	0,0888	0,0890	0,0701	0,0700
11,0	0,550	0,0878	0,0880	0,0697	0,0696
11,5	0,575	0,0869	0,0871	0,0693	0,0692
12,0	0,600	0,0861	0,0863	0,0689	0,0688
12,5	0,625	0,0853	0,0855	0,0686	0,0685
13,0	0,650	0,0846	0,0847	0,0683	0,0682
13,5	0,675	0,0839	0,0840	0,0679	0,0668
14,0	0,700	0,0833	0,0833	0,0676	0,0644
14,5	0,725	0,0827	0,0826	0,0670	0,0622
15,0	0,750	0,0821	0,0819	0,0655	0,0601
15,5	0,775	0,0815	0,0808	0,0643	0,0581
16,0	0,800	0,0805	0,0796	0,0625	0,0563
16,5	0,825	0,0795	0,0786	0,0606	0,0546
17,0	0,850	0,0786	0,0776	0,0588	0,0531
17,5	0,875	0,0777	0,0767	0,0571	0,0515
18,0	0,900	0,0769	0,0758	0,0555	0,0501
18,5	0,925	0,0762	0,0750	0,0540	0,0487
19,0	0,950	0,0755	0,0743	0,0526	0,0474
19,5	0,975	0,0748	0,0736	0,0513	0,0462
20,0	1,000	0,0742	0,0729	0,0500	0,0451

При увеличении отношения R/L параметр α оказывает более существенное влияние на характер распределения спектра собственных частот колебаний оболочки. Во всех случаях первая частота убывает при увеличении радиуса срединной поверхности оболочки. Увеличивается расхождение между соответствующими частотами при жестком закреплении торцов до 2% и до 10% при шарнирном закреплении.

Получены также результаты исследования спектра частот свободных колебаний круговых замкнутых цилиндрических оболочек переменной толщины в окружном направлении, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos p\theta)$. Проведенные вычисления при последовательном применении метода сплайн-коллокации и метода дискретной ортогонализации дают возможность проанализировать влияние значений параметров p и α на распределение спектра частот свободных колебаний оболочки при изменении геометрических параметров оболочки R и L и провести сравнение с результатами расчетов для цилиндрической оболочки постоянной толщины при различных условиях закрепления торцов. Следовательно, подбирая соответствующим образом параметры p и α , можно управлять спектром частот свободных колебаний оболочек переменной толщины. Решение задач о свободных колебаниях цилиндрических оболочек с переменной толщиной в двух направлениях приведено в [11, 42].

Следует отметить что в статье [81] получены решения задачи о напряженном состоянии полых круговых изотропных и ортотропных цилиндров конечной длины при жестком закреплении торцов.

Заключение. В настоящей статье представлен обзор публикаций и дано обобщение результатов по исследованию статического и динамического деформирования широкого класса оболочек с переменными параметрами в классической и уточненной постановках. Решение задач статики и динамики указанных оболочек сопряжено с трудностями вычислительного характера. В связи с этим разработан эффективный дискретно-континуальный численно-аналитический подход. Исходная система дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами с помощью метода сплайн-коллокации сведена к краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Полученные одномерные задачи решены устойчивым численным методом дискретной ортогонализации (для динамических задач – в сочетании с методом пошагового поиска). На основании предложенного подхода проведено решение задач о напряженно-деформированном состоянии и свободных колебаниях прямоугольных пластин, пологих цилиндрических (с круговым и некруговым поперечными сечениями) и конических оболочек с учетом переменной толщины и анизотропии упругих свойств их материалов в классической и уточненной постановках.

Большое внимание уделено оценке достоверности полученных численных результатов. Проанализировано влияния механических и геометрических параметров, граничных условий, вида нагрузки на распределения полей перемещений, напряжений и динамических характеристик исследуемых оболочек. Результаты проведенных исследований свидетельствуют о широких возможностях применения предложенного дискретно-континуального подхода к решению задач механики оболочек наряду с такими универсальными подходами, как конечноразностные и конечноэлементные методы.

РЕЗЮМЕ. Наведено огляд робіт, що присвячені розв'язанню задач та дослідженню статичного та динамічного деформування пружних оболочкових тіл складної форми із ізотропних та анізотропних матеріалів у класичній та уточненій постановках. Для розв'язання двовимірних крайових задач і задач на власні значення застосовано нетрадиційний дискретно-континуальний підхід, що базується на сплайн-апроксимації невідомих функцій диференціальних рівнянь у частинних похідних з змінними коефіцієнтами, що дає можливість звести висхідну задачу до систем одновимірних рівнянь, які розв'язуються методом дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз отриманих числових результатів розподілу полів напружень, переміщень та динамічних характеристик в залежності від виду навантаження та граничних умов, геометричних та механічних параметрів пружних тіл, що розглядаються. Значну увагу приділено оцінці достовірності отриманих результатів.

1. Алберг Д., Нильсон Э., Уоли Д. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 318 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
3. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
4. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488с.
5. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
6. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
7. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек. – М.: Физ.-мат. лит, 2008. – 432с.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
9. Григорюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек. – М.: НИИ механики Моск. ун-та, 1999. – 215 с.
10. Григоренко А.Я. Расчет собственных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины методом сплайн-коллокации // Прикл. механика – 1990. – 27, № 2. – С. 123 – 126.
11. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Соколова Л.В. Свободные колебания незамкнутых ортотропных оболочек переменной толщины // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – 13. – С. 99 – 105.
12. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Пузырев С.В. Анализ свободных колебаний ортотропных прямоугольных пластин с линейно-переменной толщиной // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2006. – 49, № 3. – С. 153 – 161.
13. Григоренко А.Я., Мальцев С.А. Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной величины // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 63 – 69.
14. Григоренко А.Я., Мальцев С.А. О свободных колебаниях конических оболочек переменной в двух направлениях толщины // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 60 – 66.
15. Григоренко А.Я., Пархоменко А.Ю. Численное решение задачи о свободных колебаниях пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С.50 – 54.
16. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
17. Григоренко Я. М., Беренов М.Н. Решение двумерных задач об изгибе прямоугольных пластин на основе сплайн-аппроксимации // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 8. – С. 22 – 25.
18. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т., Петрова Л.Н. О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении // Тр. IV Всесоюз. конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. – 1965. – К.: Наук. думка, 1968. – С. 46 – 51.
19. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Численное решение на ЭЦВМ краевых задач о напряженном состоянии оболочек вращения: Аннот. докл. V Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – М.: Наука, 1965. – С. 18 – 19.
20. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
21. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
22. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
23. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
24. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н. и др. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 1).
25. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.М. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
26. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
27. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
28. Муштари Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия // Прикл. математика и механика. – 1939. – 2, № 14. – С. 439 – 456.
29. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 43 с.
30. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судостроение, 1962. – 324 с.
31. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 246 с.
32. Avramenko O.A. Stress-strain analysis of nonthin conical shells with thickness varying in two coordinate directions // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 3. – P. 332 – 342.

33. *Birman V.* Plate Structures. In Series “Solids Mechanics and Applications” – Berlin: Springer, 2011. – 346 p.
34. *Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Puzyrev S. V.* Solution describing the natural vibrations of rectangular shallow shells with varying thickness // *Int. Appl. Mech.* –2007. –**43**, N4. – P. 432 – 441.
35. *Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Puzyrev S. V.* Free vibrations of rectangular orthotropic shallow shells with varying thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 670 – 682.
36. *Donnel, L.H.* Beams, Plates, and Shells. –New York: McGraw-Hill, 1976. – 466 p.
37. *Flugge W.* Stresses in Shells. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 499 p.
38. *Grigorenko A.Ya.* Investigation of the dynamical characteristics of anisotropic in homogeneous cylinders with circular and non-circular cross section on the base of the numerical research // Full Paper on Enclosed CD-ROM 2 -nd Eur. Conf. Comput. Mech. (Cracow, Poland, June 26-29, 2001): Abst. – **1**. – P. 846 – 847.
39. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 10. – P. 1161–1168.
40. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Application of the spline-approximation method for solving the problems on axisymmetric natural vibrations of thick-wall orthotropic cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N.10. – P. 1137 – 1147.
41. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Free axisymmetric vibrations of solids cylinders: numerical problem solving // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N.5. – P. 499 – 508.
42. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V.* On the approach to studying free vibrations of cylindrical shells of variable thickness in the circumferential direction within a refined statement // *J. Math. Sci.* – 2010. – **181**, N 4. – P. 548 – 563.
43. *Grigorenko A.Ya., Dyyak I.I., Makar V.M.* Influence anisotropic on dynamic characteristics of free vibrations of finite cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 5. – P. 628 – 637.
44. *Grigorenko A.Ya., Loza I.A.* Axisymmetric waves in layered hollow cylinders with axially polarized piezoceramics // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P.707 – 713.
45. *Grigorenko A., Makar V.* Free vibrations of the thick hollow anisotropic cylinders // Abst. 8 -th Int. Conf. Modern Building Materials, Structures and Techniques (19–21 May 2004): Selected Papers. – Vilnius: Technika, 2004. – P. 759 – 764.
46. *Grigorenko A. Ya, Maltsev S.A.* Natural vibrations on thin conical panels of variable thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N.11. – P. 1221 – 1231.
47. *Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N.* Numerical solution of the problem on the stress-strain state in hollow cylinders using spline –approximations // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, N 2. – P. 135 – 145.
48. *Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu.* Free vibrations of shallow nothin shells with variable thickness and rectangular planform // *Int. Appl. Mech.* –2010. – **46**, N 7, – P. 776 – 789.
49. *Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu.* Free vibrations of orthotropic shallow shells with variable thickness and rectangular planform // *Int. Appl. Mech.* – 2010. –**46**, N 8.–P. 877 – 889.
50. *Grigorenko A.Ya., Tregubenko T.V.* Numerical and experimental analysis of natural vibration of rectangular plates with variable thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 2. – P. 268 – 271.
51. *Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G.* Some problems of the theory of elasticity for anisotropic shells of non-circular cross-section // The 7 -th Conf. “Shell Structures, Theory and Applications”. – Golansk-Jurata (Poland), 2002. – P. 97 – 98.
52. *Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G.* Some problems of the theory of elasticity for anisotropic bodies of cylindrical form. – Kyiv: Inst. Mech. NAS Ukraine and Techn. Center NAS Ukraine, 2002. – 217 p.
53. *Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G.* Numerical analysis of anisotropic circular and non-circular cylinder // CMM-2003-Computer Methods in Mechanics (June 3–6, 2003, Gliwice, Poland): Abst. and Full Paper on Enclosed CD-ROM. – P. 141 – 142.
54. *Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G.* Investigation of the static and dynamic behaviour of anisotropic cylindrical bodies with noncircular cross-section // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – **41**. – P. 2781 – 2798.
55. *Grigorenko A.Ya., Vovkodav O.V, Yaremchenko S.N.* Stress-strain state of nothing orthotropic spherical shells of variable thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 1.– P. 80 – 93 .
56. *Grigorenko A Ya., Yaremchenko N.P.* Stress-strain state of shallow shells with rectangular planform varying thickness: refined formulation // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 10. – P. 1132 – 1141.
57. *Grigorenko A Ya., Yaremchenko N.P.* Stress-state of nothin orthotropic shells with varying thickness and rectangular planform // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 8. – P. 905 – 915.
58. *Grigorenko A., Yaremchenko N, Yaremchenko S.,* Spline-based investigation of stress–strain of anisotropic rectangular shallow shells of variable thickness in refined formulation // *Proc. Int. Symp. on Advances in Applied Mechanics and Modern Information Technology.* – Baku: Azerbaijan, 2011 – P.171 – 175.

59. *Grigorenko A., Yaremchenko S.* Spline-approximation method for investigation of mechanical behavior of anisotropic inhomogeneous shells // The 9th international conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques”: Selected Papers. – Vilnius: Technika, 2007. – P. 918 – 924.
60. *Grigorenko A., Yaremchenko S.* Investigation of static and dynamic behaviour of anisotropic inhomogeneous shallow shells by spline approximation method // *J. of Civ. Eng. and Manag.* – 2009. – **15**, N 1. – P.87 – 93.
61. *Grigorenko A., Yaremchenko S.* Static problems for noncircular cylindrical shells: Classical and refined theories // Proceedings of the 9th conference “Shell Structures and Applications”, **2**, Gdansk-Jurata., 2009, Taylor and Francis Group, London, UK. – P. 241 – 244.
62. *Grigorenko A., Yaremchenko S.* Solution of stress-strain problems for noncircular cylindrical shells based upon different models // The 10th international conference “Modern Building Materials Structures and Techniques”: Selected papers. –**II**. Lithuania, 2010, VGTU leidykla, Technika. – P.885 – 889.
63. *Grigorenko Ya.M.* Solution of problems in the theory of shells by numerical-analysis methods // *Int. Appl. Mech.* – 1984. – **20**, N 10. – P. 881 – 897.
64. *Grigorenko Ya.M.* Some approaches to modelling and numerical solution of the deformation problems of the flexible shells of revolution // *Eur. Mech. Colloq. EUROMECH 292, Modelling of Shells with Nonlinear Behaviour* (Germany, Sept. 2–4, 1992). – P. 12.1 – 12.2.
65. *Grigorenko Ya.M.* Influence of anisotropy and non-homogeneity on the deformation of flexible shells // *EuroMech Colloq. 317, Buckling Strength of Imperfection-Sensitive Shells* (21–23 March 1994). – Liverpool, 1994. – P. 44.
66. *Grigorenko Ya.M.* Some approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problems on deforming of elastic shell systems // The 3rd Int. Congr. Industr. and Appl. Math. (Germany, Hamburg, 3 – 7 July 1995). – P. 294.
67. *Grigorenko Ya. M.* Nonconventional approaches static problems for noncircular cylindrical shells in different formulations // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 1. – P.35 – 53.
68. *Grigorenko Ya. M.* Using discrete Fourier series to solve boundary-value stress problems for elastic bodies with complex geometry and structures // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 5. – P. 470 – 513.
69. *Grigorenko Ya.M., Avramenko O.A.* Stress–strain analysis of closed nonthin orthotropic conical shells of varying thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 6. – P. 635 – 643.
70. *Grigorenko Ya. M., Avramenko O. A.* Influence of geometrical and mechanical parameters on the stress-strain state of closed nonthin conical shells stress–strain analysis of closed nonthin orthotropic conical shells of varying thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1119 – 1127.
71. *Grigorenko Ya. M., Avramenko O. A., Yaremchenko S. N.* Spline-approximations solution of two – dimensional problems of static for orthotropic conical shells in a refined formulations // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 1218 – 1227.
72. *Grigorenko Ya. M., Berenov M. N.* Numerical solution of problems in the statics of flattened shells on the basis of the spline collocation method // *Int. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 5. – P. 458 – 463.
73. *Grigorenko Ya. M., Berenov M. N.* Solution of problems of the statics of shallow shells and plates with hinged and rigidly–fastened opposing edges // *Int. Appl. Mech.* – 1990. – **26**, N 1. – P.25 – 31.
74. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Efimova T.L.* Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories // *J. of Mech. and Struct.* – 2008. – **3**, N.5. – P. 929 – 952.
75. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Rozhok L.S.* Solving the stress problems for solid cylinders with different end conditions // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 6. – P. 629 – 635.
76. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G.G.* Problems of Mechanics for Anisotropic Inhomogeneous Shells on the Basis of Different Models. – K.: Akadempriodika, 2009. – 550 p.
77. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichenko L. I.* Stress-strain analysis of orthotropic closed and open noncircular cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 7. – P.778 – 785.
78. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichenko L. I.* Stress analysis of noncircular cylindrical shells with cross-section in the form of convex half-corrugations // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 4. – P. 431 – 438.
79. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichenko L. I.* Influence of geometrical parameters on the stress-strain of longitudinally corrugated cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 778 – 785.
80. *Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N.* Solution of problems of the theory of plates and shells with spline functions (survey) // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 6. – P. 413 – 434.
81. *Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N.* Investigation of the asymmetric stressed-strained state of transversely isotropic cylinders under different boundary conditions at the ends // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 607 – 614.

82. Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N., Ivanova Yu. I. Solution of two-dimensional problems of the statics of flexible shallow shells by spline approximation // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 4. – P. 255 – 261.
83. Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N., Ivanova Yu. I. Spline-approximation solution of problems of the statics of orthotropic shallow shells with variable parameters // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 7. – P. 888 – 897.
84. Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N., Yakovenko N. S. Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 413 – 420.
85. Grigorenko Ya. M., Tumashova O. V. Stress-strain state of flexible cylindrical panels with variable geometric parameters // *Int. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, N 5. – P. 454 – 461.
86. Grigorenko Ya. M., Tumashova O. V. Computation of flexible finite-size cylindrical panels of noncircular cross section // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 12. – P. 839 – 842.
87. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Stress analysis of orthotropic noncircular cylindrical shells of variable thickness in a refined formulation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 3. – P. 266 – 274.
88. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Influence of variable thickness on displacements and stresses in nonthin cylindrical orthotropic shells with elliptic cross-section // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 8. – P. 900 – 907.
89. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Refined design of corrugated noncircular cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 1. – P. 7 – 13.
90. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 11. – P. 1218 – 1226.
91. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 2. – P. 205 – 211.
92. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Solution of the problem of the stress state of noncircular cylindrical shells of variable thickness // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 12. – P. 1196 – 203.
93. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Analysis of the stress-strain state of non-circular cylindrical shells subject to thickness variation and weight retention // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 6. – P. 567 – 576.
94. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Design of corrugated cylindrical shells under different end conditions // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 9. – P. 897 – 905.
95. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Studying the effect of the spatial frequency and amplitude of corrugation on the stress-strain state of cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 12. – P. 1429 – 1435.
96. Librescu L., *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures.* Noordhoff Inter. Publishing. – Leyden, Netherlands, 1975. – 598 p.
97. Love A.E.H. *Mathematical Theory of Elasticity.* – Cambridge at the Univer. Press, repr in USA 1952. – 643 p.
98. Ramm E., Wall W.A. Shell structures – a sensitive interrelation between physics and numerics // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* – 2002. – **60**. – P. 381 – 427.
99. Ramm E., Wall W.A. Computational methods for shells // *Special Issue of Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2005. – **184**. – P. 2285 – 2707.
100. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
101. Timoshenko S.P. *History of the Strength of Materials.* – New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. – 480 p.

Поступила 05.06.2012

Утверждена в печать 26.06.2012