

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: gavr@inmech.kiev.ua*

Abstract. The method of calculation of critical loads of stiffened cylindrical shells is suggested. The shells are subjected of combined loading (external pressure and longitudinal axial loads). An effect of influence on critical loads quantity of ribs is studied analytically.

Key words: shells, stability, critical loads.

Введение.

Применение ребристых оболочек в качестве элементов конструкций обусловило интенсивное развитие исследований, посвященных изучению их устойчивости и появлению большого числа публикаций, в которых освещаются различные вопросы этой проблемы. В известных теоретических работах [1 – 10] проведен анализ работ по расчету цилиндрических оболочек подверженных продольному сжатию. Обнаружен ряд эффектов, обусловленных наличием подкрепляющих ребер.

Методики аналитического и численного расчетов на устойчивость гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек приведены в работах [1 – 10]. В работах [2, 4] описан аналитический подход к оценке минимальных параметров верхних критических нагрузок для продольно сжатых оболочек. В отличие от обычной конструктивно-ортотропной схемы расчета подкрепленных оболочек в них предложено анализировать не только общий случай потери устойчивости, но и частные случаи. В рассмотрение вводятся случаи потери устойчивости, при реализации которых критические напряжения зависят только от части жесткостных характеристик ребер и числа волн и полуволн связаны определенным образом с числом ребер того или иного направления. Это накладывает определенные условия на формы потери устойчивости. Анализ этих случаев позволяет выделить минимальный параметр критической нагрузки для любого вида нагружения.

Влияние параметров ребер на устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек на основе теории, учитывающей различные типы деформирования, изучено ранее в работе [4]. Ниже эти исследования проведены для оболочек, подверженных совместному действию осевых сжимающих сил и внутреннего (внешнего) давления.

1. Методика расчета.

Рассмотрена устойчивость подкрепленных стрингерами и шпангоутами цилиндрических оболочек при совместном действии осевых сжимающих сил и внутреннего (внешнего) давления. Докритическое напряженное состояние оболочки при совместном действии нагрузок характеризуется напряжениями

$$\{N_x^F, N_\theta^F\} = \{-\sigma h \alpha_1, \mp q r \alpha_2\}, \quad (1)$$

где σ – докритическое сжимающее нормальное напряжение; q – радиальная нагрузка; знак (+) соответствует внутреннему давлению, знак (–) – внешнему; $\alpha_1 = 1 + F_s / h \ell_s$, $\alpha_2 = 1 + F_r / h \ell_r$; F_s, ℓ_s – площадь поперечного сечения стрингера и расстояние между

стрингерами; F_r, ℓ_r – аналогичные величины для шпангоутов; $\ell_s = 2\pi r / k_s$; $\ell_r = \ell / (k_r + 1)$; k_s, k_r – число стрингеров и шпангоутов; h, r, ℓ – толщина, радиус срединной поверхности и длина оболочки.

Величину осевой сжимающей силы, которая при заданном внешнем или внутреннем давлении приводит к потере устойчивости замкнутой ребристой цилиндрической оболочки, определим на основании энергетического метода.

Выражения для потенциальной энергии системы (V_2) и работы внешних сил (A_2) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \alpha_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\alpha_r}{r^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{z_r}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r dx d\theta + \\
 & + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{r \partial x} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \beta_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \beta_r \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right)^2 + \beta_{x\theta s} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} \right)^2 + \beta_{x\theta r} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dx d\theta; \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{K(1-\mu^2)}{2} \frac{2\pi}{E} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[\sigma \alpha_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \pm q \frac{r}{h} \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] r dx d\theta. \quad (3)$$

Перемещения оболочки при потере устойчивости аппроксимируем выражениями

$$\begin{aligned}
 u &= (u_{1ij} \cos i_1 \theta + u_{2ij} \sin i_2 \theta) \cos \lambda x / r; \\
 v &= (v_{1ij} \sin i_1 \theta + v_{2ij} \cos i_2 \theta) \sin \lambda x / r; \\
 w &= (w_{1ij} \sin i_1 \theta + w_{2ij} \cos i_2 \theta) \sin \lambda x / r,
 \end{aligned} \quad (4)$$

где $u_{1ij}, v_{1ij}, w_{1ij}, u_{2ij}, v_{2ij}, w_{2ij}$ – произвольные постоянные; $\lambda = j\pi r / \ell$, j – число полуволн по длине; i_1 и i_2 – числа окружных волн. Функции $u_{1ij}, v_{1ij}, w_{1ij}$ описывают изгиб ребер, $u_{2ij}, v_{2ij}, w_{2ij}$ – их кручение, причем используются они раздельно, а не вместе. В последующих формулах индексы 1 и 2 опускаются.

Из условий минимума полной энергии системы $\partial V / \partial u_{ij} = 0$, $\partial V / \partial v_{ij} = 0$, $\partial V / \partial w_{ij} = 0$ можно определить критические значения продольных сжимающих нагрузок $(\sigma / E)_{cr}$ и критическое значение внешнего давления q_{cr}

$$(\sigma / E)_{cr} = \left[P_{mm} - \frac{q}{Eh} (1-\mu^2) i^2 \right] \frac{1}{Q_{33}}; \quad (5)$$

$$q_{cr} = qr / Eh = P_{mm} / (1-\mu^2) i^2, \quad (6)$$

где

$$P_{mn} = \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2};$$

$$A_{11} = \alpha_x \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} i^2 (1 + \beta_{x\theta r} / a); \quad A_{12} = -i \lambda \frac{1+\mu}{2}; \quad A_{13} = \lambda (\mu - \alpha_s z_{sr} \lambda^2) + i^2 \lambda \beta_{x\theta r} / a;$$

$$A_{22} = \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 + c_\theta i^2 + \frac{1}{a} [i^2 \beta_\theta + 2(1-\mu) \lambda^2];$$

$$A_{23} = -i - i \alpha_r (1 - z_{rr}) (1 - i^2 z_{rr}) - \frac{i}{a} (\beta_\theta i^2 + (2-\mu) \lambda^2);$$

$$A_{33} = 1 + \alpha_s z_{sr}^2 \lambda^4 + \alpha_r (1 - z_{rr} i^2)^2 + [(\lambda^2 + i^2)^2 + \beta_s \lambda^4 + \beta_r i^4 + \beta_{s\theta} i^2 \lambda^2] / a;$$

$$Q_{33} = (1 - \mu^2) \alpha_1 \lambda^2; \quad z_{sr} = z_s / r; \quad z_{rr} = z_r / r; \quad c_\theta = 1 + \alpha_r (1 - z_{rr})^2; \quad (7)$$

$$\alpha_x = 1 + \alpha_s; \quad \alpha_s = E_s F_s / K \ell_s; \quad \alpha_\theta = 1 + \alpha_r; \quad \alpha_r = E_r F_r / K \ell_r;$$

$$\beta_x = 1 + \beta_s; \quad \beta_s = E_s I_s / D \ell_s; \quad \beta_\theta = 1 + \beta_r; \quad \beta_r = E_r I_r / D \ell_r;$$

$$\beta_{x\theta} = \beta_{x\theta s} + \beta_{x\theta r}; \quad \beta_{x\theta s} = G_s I_{kps} / D \ell_s; \quad \beta_{x\theta r} = G_r I_{kpr} / D \ell_r;$$

$$c_\theta = 1 + \alpha_r (1 - z_{rr})^2; \quad a = 12r^2 / h.$$

Учитывая наличие ребер при определении критических нагрузок, кроме общего случая деформирования оболочки, рассматриваются и частные случаи, при реализации которых на деформации подкрепляющих ребер наложены ограничения [3]. Случаи деформаций и условия для числа волн и полуволн приведены в таблице. Кроме того, рассмотрены различные варианты учета жесткостных характеристик ребер (они обозначены цифрами от 0 до 5).

Случай деформации	Условия для чисел волн и полуволн	Варианты характеристик ребер	
		стрингеры	шпангоуты
общий	$j = t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	1	1
первый частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	2	1
		4	3
второй частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	5	1
		5	3
третий частный подслучай	$j = t_1(k_r + 1); 2i \neq tk_s$	1	2
		3	4
четвертый частный подслучай	$j = t_1(k_r + 1); 2i \neq tk_s$	1	5
		3	5
пятый частный подслучай	$j = t_1(n_r + 1); 2i = m_s$	2	5
		4	5
шестой частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	5	2
		5	4
седьмой частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	2	2
		4	4
восьмой частный подслучай	$j = t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	5	5
		0	0

Здесь приняты такие обозначения: 1 – ребра работают на растяжение-сжатие, изгиб, кручение; 2 – ребра работают на растяжение-сжатие, изгиб; 3 – ребра работают на изгиб и кручение; 4 – ребра работают только на изгиб; 5 – ребра работают только на кручение; 0 – жесткости ребер не учитываются; $t = 0, 1, 2, \dots$; $t_1 = 1, 2, \dots$.

2. Числовые результаты.

Как пример, рассмотрена ребристая оболочка [4], подкрепленная 32 стрингерами и 4 шпангоутами с параметрами $\ell / r = 2,25$; $r / h = 400$. Подкрепляющие ребра углового поперечного сечения имели такие размеры: стрингеры – $4 \times 3,5 \times 0,5$ мм; шпангоуты – $4 \times 8 \times 0,5$ мм. Стрингеры крепились широкой полкой с внешней стороны оболочки, шпангоуты – узкой полкой с внутренней стороны.

На рис. 1 и 2 представлены зависимости минимальных нагрузок внешнего давления от числа стрингеров (k_s) и шпангоутов (k_r) при изменении высоты стрингеров (рис. 1) и высоты шпангоутов (рис. 2). Здесь $q_1 = q_{cr} / q_{cl}$; $q_{cl} = 0,92(k_r + 1)(r/\ell)\sqrt{h/r}$.

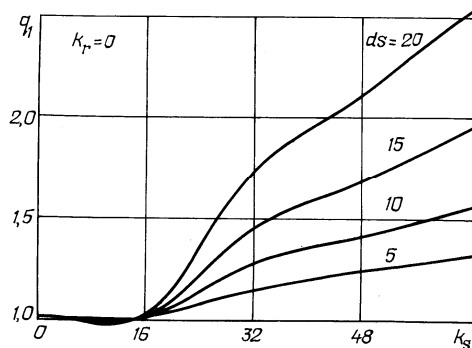


Рис. 1

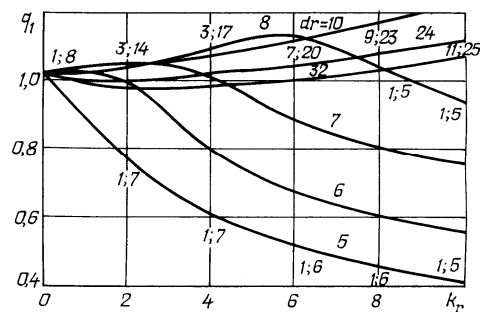


Рис. 2

Для оболочек, подкрепленных стрингерами, минимальными оказались критические нагрузки четвертого подслучая, т.е. стрингеры работают только на изгиб и кручение. При $k_s > 16$ критические нагрузки при увеличении числа стрингеров и их относительной высоты возрастают.

Для оболочек, подкрепленных шпангоутами, при $d_r < 10$ – минимальны критические нагрузки шестого частного случая, т.е. шпангоуты только изгибаются, а при $d_r \geq 10$ – минимальны критические нагрузки 8 частного случая, т.е. шпангоуты только закручиваются.

Оболочки, подкрепленные шпангоутами, обладают некоторыми особенностями. При увеличении высоты шпангоута до $d_r = 10$ при малом числе шпангоутов критические нагрузки сначала возрастают, а потом уменьшаются. Это можно объяснить тем, что при достижении шпангоутами некоторой жесткости происходит местная потеря устойчивости обшивки между ребрами. При дальнейшем увели-

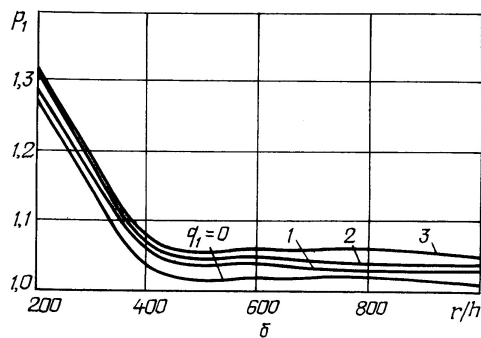
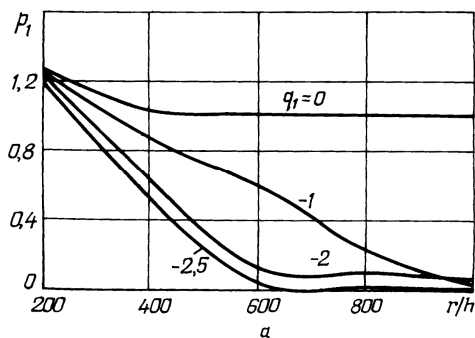


Рис. 3

чении высоты шпангоута критическая нагрузка увеличивается. При увеличении высоты шпангоута увеличивается количество волн, по которым оболочка теряет устойчивость. Значения продольных и окружных волн оболочки приведены на рис. 2.

На рис. 3 представлены результаты вычисления параметра осевой сжимающей силы от толщины оболочки ($p_1 = f(r/h)$) для оболочек, подкрепленных стрингерами и шпангоутами при различном значении внешнего (a) и внутреннего (b) давлений. ($p_1 = \sigma_{cr} / \sigma_{cl}$; $\sigma_{cl} = 0,605Eh/r$). Каждая линия отвечает определенной величине давления. При увеличении внешнего давления критические нагрузки резко уменьшаются (рис. 3, a). Для тонких оболочек ($r/h > 400$) критические нагрузки почти не зависят от величины внутреннего давления (рис. 3, b).

Заключение.

Анализ устойчивости ребристых оболочек, нагруженных осевыми сжимающими силами и внутренним (внешним) давлением, позволяет сделать такие выводы: эффект влияния параметров ребер может быть детально изучен и на основе зависимостей конструктивно-ортотропной теории, учитывающей различные типы деформирования; эти результаты сближаются с данными, которые можно получить на основе теории устойчивости ребристых оболочек, т.е. при учете дискретности размещения ребер.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано новий підхід до проблеми стійкості ребристих циліндричних оболонок при дії поздовжніх сили і тиску. Наведено результати розрахунків для оболонок, підсилених ребрами в двох напрямках.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. *Гавриленко Г.Д.* Устойчивость гладких и ребристых оболочек вращения при неоднородном напряженно-деформированном состоянии (обзор) // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 7. – С. 3 – 25.
3. *Гавриленко Г.В.* Несущая способность несовершенных оболочек. – Днепропетровск: Барвикс, 2007. – 294 с.
4. *Гавриленко Г.Д., Мацнер В.И.* Аналитический метод определения верхних и нижних критических нагрузок для упругих подкрепленных оболочек. – Днепропетровск: Барвикс, 2007. – 185 с.
5. *Гавриленко Г.Д., Трубицина О.А.* Колебания и устойчивость ребристых оболочек вращения. – Днепропетровск: Барвикс, 2008. – 155 с.
6. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость круговых цилиндрически оболочек. Итоги науки. Механика тверд. деформ. тел. 1967. – М.: ВИНТИ, 1969. – 348 с.
7. *Заруцкий В.А.* Особенности потери устойчивости ребристых оболочек // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 5. – С. 3 – 32.
8. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Ostapchuk V.V.* Nonlinear Axisymmetric Deformation of Anisotropic Spherical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1101 – 1111.
9. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* Stability and Initial Postbuckling Behaviour of Anisotropic Cylindrical Shells Subject to Torsion // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 1. – P. 41 – 61.
10. *Trach V.M.* Stability of Composite Shell of Revolution // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 331 – 344.

Поступила 21.12.2009

Утверждена в печать 21.10.2010