

М. Е. Бабешко, Ю. Н. Шевченко

**ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ
СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК В ПРОЦЕССАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО
НАГРУЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ТРЕТЬЕГО ИНВАРИАНТА ДЕВИАТОРА
НАПРЯЖЕНИЙ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique of numerical study of the thermoelastoplastic stress-strain state of thin compound shell of revolution is proposed for processes of axisymmetric non-isometric loading with taking into account the third invariant of stress deviator. The constitutive equations are used, which describe the thermoelastoplastic deformation of isotropic materials along trajectories of small curvature with taking into account the third invariant of stress deviator. A numerical example is given.

Key words: thermoelastoplastic stress-strain state; incorporating the stress mode constitutive equations; method of successive approximations; shell of revolution; third invariant of stress deviator..

Введение.

В работах [1, 5, 8] изложен метод последовательных приближений решения осесимметричных краевых задач пластичности для тонких оболочек с использованием определяющих уравнений [11 – 13], описывающих процессы упругопластического деформирования изотропных материалов по траекториям малой кривизны с учетом третьего инварианта девиатора напряжений. В работе [14] определяющие уравнения [11 – 13] обобщены на случай неизотермических процессов нагружения. Как и в [11 – 13], в уравнениях [14] используется угол вида напряженного состояния [2], который определяется через второй и третий инварианты девиатора напряжений и представляет собой угол между направлением октаэдрического касательного напряжения и отрицательным направлением проекции на октаэдрическую плоскость главной оси девиатора напряжений, вдоль которой главные напряжения минимальные. Уравнения [14] связывают компоненты тензоров напряжений и линейных частей деформаций, которые ниже будем называть деформациями. Эти уравнения записаны в предположении, что деформации могут быть представлены в виде суммы упругих и пластических составляющих, а девиаторы напряжений и дифференциалов пластических деформаций соосны. Уравнения содержат две нелинейные функции, зависящие от третьего инварианта девиатора напряжений и температуры. Одна из этих функций выражает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая – между вторыми инвариантами этих тензоров. Эти функции определяются по результатам опытов на одноосное растяжение и внутреннее давление трубчатых образцов при пропорциональном нагружении со скоростями, при которых деформации ползучести пренебрежимо малы по сравнению с упругими и пластическими составляющими, при различных постоянных значениях угла вида напряженного состояния и нескольких постоянных значениях температуры. В случае, когда нелинейные функции принимаются независимыми от третьего инварианта девиатора напряжений и

связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций предполагается линейной, рассматриваемые определяющие уравнения превращаются в соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4], которые при активных процессах аналогичны классическим уравнениям теории течения [9, 2 и др.] с условием текучести Мизеса.

В настоящей работе, в отличие от [1, 5, 8], разработана методика решения осесимметричной задачи пластичности для составных оболочек в условиях неизотермического нагружения с использованием уравнений [14].

§1. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассмотрим оболочку вращения, находящуюся в начальный момент времени в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре $T = T_0$, а затем подвергнутую осесимметричному неравномерному нагреву и действию произвольных нагрузок, кроме крутящих. Оболочка может состоять из участков оболочек вращения разной геометрии, в частности, сферической, цилиндрической, конической и тороидальной оболочек, а также круглых пластин. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат s, θ, ζ , связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью. Меридиональная координата обозначена через s ($s_a \leq s \leq s_b$), s_a, s_b – координаты, соответствующие торцам оболочки; θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – окружная координата; ζ – координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности ($\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$), ζ_0 и ζ_k соответствуют внутренней и наружной поверхностям оболочки. В качестве координатной поверхности может быть выбрана либо срединная поверхность оболочки, либо ее внутренняя или наружная поверхность. Части оболочки, имеющие различную геометрию, могут быть изготовлены из разных изотропных материалов. Предполагаем, что в процессе нагружения оболочки ее материалы деформируются в пределах и за пределами упругости и в областях пластических деформаций может происходить разгрузка без возникновения вторичных пластических деформаций. Далее рассматриваем только такие процессы, в которых деформации ползучести пренебрежимо малы по сравнению с упругими и пластическими составляющими.

При формулировке задачи используем подход Коши [3, 11, 13], в соответствии с которым все уравнения запишем в вышеприведенной системе координат, связанной с недеформированной координатной поверхностью. Задачу решаем в геометрически линейной квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа – Лява. Для описания деформирования материалов используем соотношения теории термопластичности [14], учитывающие вид напряженного состояния, а также соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4]. Задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) составной оболочки решаем методом последовательных приближений.

Для решения этой задачи процесс нагружения необходимо разбить на ряд малых этапов таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала разгрузки в элементах оболочки, а траектории деформирования хорошо аппроксимировались соответствующими разбиению ломаными линиями. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия элемента осесимметрично нагруженной оболочки вращения при отсутствии кручения, геометрические соотношения и физические уравнения. Уравнения равновесия имеют вид [3, 4]

$$\frac{d(rN_s)}{ds} - \cos \varphi N_\theta + \frac{r}{R_s} Q_s + r q_s = 0; \quad \frac{d(rQ_s)}{ds} - \sin \varphi N_\theta - \frac{r}{R_s} N_s + r q_\zeta = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{d(rM_s)}{ds} - \cos \varphi M_\theta - r Q_s = 0,$$

где N_s, N_θ, Q_s – усилия; M_s, M_θ – моменты; ϑ_s – угол поворота нормали к координатной поверхности в меридиональной плоскости; r – радиус параллельного круга; R_s – радиус кривизны меридиана координатной поверхности оболочки; $\pi - \varphi$ – угол между нормалью к координатной поверхности и осью z , совмещенной с осью вращения оболочки; q_s, q_ζ – распределенные нагрузки, приведенные к координатной поверхности. Геометрические соотношения имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_s}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \\ \kappa_s &= \frac{d\vartheta_s}{ds}; \quad \kappa_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s; \quad \vartheta_s = -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_s}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$ – деформации и изменения кривизны координатной поверхности оболочки в направлениях s и θ ; u, w – перемещения ее точек в направлениях s, ζ . Компоненты деформаций в произвольной точке оболочки $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}$ связаны с компонентами деформаций координатной поверхности оболочки $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$ формулами

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_s + \zeta \kappa_s; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_\theta + \zeta \kappa_\theta, \quad (1.3)$$

записанными в предположении, что можно пренебречь по сравнению с единицей величинами $\zeta/R_s, \zeta/R_\theta$, где R_θ – радиус кривизны координатной поверхности в окружном направлении.

Для записи связи между компонентами напряжений и деформаций воспользуемся уравнениями термопластичности [14], учитывающими вид напряженного состояния. Линеаризуя эти уравнения с помощью метода дополнительных напряжений [4] и разрешив относительно компонент напряжений, получим связь между компонентами тензоров напряжений $\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}$ и деформаций $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\zeta\zeta}$ в произвольной точке рассматриваемой оболочки на M -ом этапе в форме закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\sigma_{ss} = A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{1D}; \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{2D}; \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon_T - \frac{1-2\nu}{1-\nu}(e_{ss}^{(p)} + e_{\theta\theta}^{(p)}) + \frac{1+\nu}{1-\nu}(\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|}\right); \quad (1.5)$$

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad A_{12} = \nu A_{11}; \quad (1.6)$$

E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала, зависящие от температуры; $E = 2G(1+\nu)$; G – модуль сдвига материала; $K = \frac{E}{1-2\nu}$; $e_{ss}^{(p)}$ ($s \rightarrow \theta$) – компоненты девиатора пластических составляющих деформаций; $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$ – тепловая деформация; α_T – коэффициент линейного теплового расширения материала; T – температура элемента оболочки; F_1 – нелинейная функция,

$$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0, T, \omega_\sigma), \quad (1.7)$$

выражающая зависимость между средним напряжением $\sigma_0 = (\sigma_{ss} + \sigma_{\theta\theta})/3$, средней деформацией $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\zeta\zeta})/3$, температурой и углом вида напряженного состояния ω_σ [3, 12]

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{3\sqrt{3} I_3(D_\sigma)}{2 S^3} \right] \quad \left(0 \leq \omega_\sigma \leq \frac{\pi}{3} \right); \quad (1.8)$$

$I_3(D_\sigma)$ – третий инвариант девиатора напряжений.

Угол ω_σ (1.8) определяется через компоненты девиатора напряжений, в отличие от параметра Лоде, который определяется через главные значения тензора напряжений. Этот угол связан с параметром Лоде μ_σ простой зависимостью [2] и между их значениями существует такое соответствие: при растяжении – $\omega_\sigma = \pi/3$; $\mu_\sigma = -1$; при равенстве главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ – $\omega_\sigma = 0$; $\mu_\sigma = 1$; при сдвиге или соотношении главных напряжений $2\sigma_1 = \sigma_2$ – $\omega_\sigma = \pi/6$; $\mu_\sigma = 0$.

Входящие в (1.4) слагаемые A_{1D}, A_{2D} имеют следующий вид:

$$A_{1D} = A_{11} \left(e_{ss}^{(p)} + \nu e_{\theta\theta}^{(p)} \right) + A_{11} (1 + \nu) \varepsilon_T + \frac{E}{1 - \nu} (\varepsilon_o - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K |\varepsilon_o - \varepsilon_T|} \right);$$

$$A_{2D} = A_{11} \left(e_{\theta\theta}^{(p)} + \nu e_{ss}^{(p)} \right) + A_{11} (1 + \nu) \varepsilon_T + \frac{E}{1 - \nu} (\varepsilon_o - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K |\varepsilon_o - \varepsilon_T|} \right). \quad (1.9)$$

Компоненты девиатора пластических составляющих деформаций $e_{ss}^{(p)}$ ($s \rightarrow \theta$) определяются как суммы приращений $\Delta_k e_{ss}^{(p)}$ ($s \rightarrow \theta$) этих составляющих в конце N этапа

$$e_{ss}^{(p)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k e_{ss}^{(p)} \quad (s \rightarrow \theta). \quad (1.10)$$

Приращения $\Delta_k e_{ss}^{(p)}$ ($s \rightarrow \theta$) на произвольном k -ом этапе нагружения определяются выражением

$$\Delta_k e_{ss}^{(p)} = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{3S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^{(p)} \quad (s \rightarrow \theta), \quad (1.11)$$

где S – интенсивность касательных напряжений

$$S = \left[(\sigma_{ss}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{ss} \sigma_{\theta\theta}) / 3 \right]^{1/2}; \quad (1.12)$$

$\Delta_k \Gamma^{(p)}$ – приращение интенсивности пластических деформаций сдвига

$$\Gamma^{(p)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k \Gamma^{(p)}. \quad (1.13)$$

Угловыми скобками в (1.11) обозначено среднее за этап значение заключенной в них величины.

Для определения $\Delta_k \Gamma^{(p)}$ используется предположение о существовании зависимости вида

$$S = F_2(\Gamma, T, \omega_\sigma) \quad (1.14)$$

между интенсивностью касательных напряжений S (1.12), интенсивностью деформаций сдвига Γ , температурой и углом вида напряженного состояния ω_σ . При конкретизации функции F_2 будем предполагать, что

$$\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma^{(p)}. \quad (1.15)$$

Функции F_1 (1.7) и F_2 (1.14) вычисляются по результатам опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов растягивающим осевым усилием и равномерным внутренним давлением при нескольких постоянных значениях угла $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$ для нескольких постоянных значений температуры из рассматриваемого диапазона. При этом используются компоненты деформаций, не содержащие чисто тепловой деформации ε_T . Подробно вычисление функций F_1 (1.7) и F_2 (1.14) по результатам опытов при значениях $\omega_\sigma = 0, \pi/6, \pi/3$ описано в работах [6, 11 – 14]. В этих опытах $(\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \geq 0$ и функции $F_1 \geq 0$, поэтому в расчетах используем значение $F_1(|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|)$.

Таким образом, рассматриваемые определяющие уравнения для описания процессов деформирования изотропных материалов включают соотношения (1.4) – (1.7), (1.9), (1.14). Эти уравнения имеют такой же вид, как и соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4], линеаризованные методом дополнительных напряжений, за исключением слагаемых в (1.5) и (1.9), содержащих

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|} \right).$$

В том случае, когда входящая в (1.5), (1.9) функция F_1 (1.7) линейна, т.е. имеет вид $\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T)$, выражение $\left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|} \right) = 0$ и (1.5), (1.9) зависят только от пластических составляющих деформаций (1.10), которые вычисляются с использованием функции $F_2(\Gamma, T, \omega_\sigma)$ (1.14). Этот случай соответствует варианту определяющих уравнений [7, 10]. Если предположить, что функция F_2 (1.14) не зависит от вида напряженного состояния и определяется по результатам опытов на одноосное растяжение образцов (т.е. $\omega_\sigma = \pi/3$), то уравнения (1.4), (1.5) превращаются в уравнения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4].

Используем соотношения (1.4) для получения связи между усилиями, моментами и деформациями координатной поверхности оболочки. Для этого в выражения для усилий и моментов подставим (1.4), в которых заменим деформации в произвольной точке оболочки их выражениями (1.3). Тогда получим

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} \kappa_s + C_{12}^{(1)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(0)}; \\ N_\theta &= C_{12}^{(0)} \varepsilon_s + C_{22}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} \kappa_s + C_{22}^{(1)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(0)}; \\ M_s &= C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} \kappa_s + C_{12}^{(2)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(1)}; \\ M_\theta &= C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} \kappa_s + C_{22}^{(2)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$C_{mn}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} A_{mn} \zeta^j d\zeta; \quad N_{mD}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} A_{mD} \zeta^j d\zeta \quad (m, n = 1, 2; j = 0, 1, 2). \quad (1.17)$$

Таким образом, имеем все основные соотношения для решения задачи термопластичности об осесимметричном НДС слоистой оболочки с учетом вида напряженного состояния – уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения.

§2. Система разрешающих уравнений.

Соотношения (1.16) вместе с (1.1) и (1.2) образуют систему 12 уравнений. Выберем в качестве основных неизвестных функции $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$, позволяющие непосредственно формулировать различные граничные условия. Выразив через основные неизвестные функции остальные неизвестные, приведем указанную систему к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = P(s)\bar{Y} + \bar{f}(s) \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$B_1\bar{Y}(s_a) = \bar{b}_1; \quad B_2\bar{Y}(s_b) = \bar{b}_2, \quad (2.2)$$

где \bar{Y} – вектор-столбец разрешающих функций, $\bar{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$; $P(s)$ – матрица системы; $\bar{f}(s)$ – вектор-столбец дополнительных слагаемых; B_1, B_2 – заданные матрицы; \bar{b}_1, \bar{b}_2 – заданные векторы-столбцы граничных условий. Матрица системы $P(s)$ и вектор $\bar{f}(s)$ имеют такой же вид, как в работе [1]. Как и в [1], матрица системы зависит от упругих характеристик материалов оболочки и параметров ее геометрии, а компоненты вектора $\bar{f}(s)$ зависят еще и от тепловой деформации и пластических составляющих девиатора деформаций, которые необходимо уточнять в процессе последовательных приближений с использованием функций (1.7), (1.14).

§3. Алгоритм решения задачи.

Предполагаем, что известно количество частей оболочки, форма меридиана каждой части и соответствующие толщины, а также условия закрепления, действующие нагрузки и распределение температуры в меридиональном сечении оболочки на каждом этапе, на которые необходимо разбить процесс нагружения. Для каждого материала оболочки известны модули упругости (модули сдвига), коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного теплового расширения в зависимости от температуры. Также необходимо задать функции F_1 (1.7) и F_2 (1.14) при значениях угла $\omega_\sigma = 0$, $\omega_\sigma = \pi/3$ и нескольких промежуточных значениях этого угла для начального, конечного и нескольких промежуточных значений температуры из диапазона температур исследуемой оболочки. Для решения задачи на первом этапе удобно выбрать уровень нагрузок так, чтобы оболочка деформировалась в пределах упругости. Тогда в уравнениях (1.4) полагаем $A_{1D} = A_{2D} = 0$ и решаем задачу упругости для рассматриваемой оболочки. Получим НДС оболочки на первом этапе. Строя процесс последовательных приближений на втором и любом из следующих этапов, используем компоненты НДС, соответствующие концу предыдущего этапа. Начиная процесс последовательных приближений на произвольном k -ом этапе, предполагаем, что известны значения

$$(\varepsilon_{ss})_{k-1}, (\varepsilon_{\theta\theta})_{k-1}, (\varepsilon_{s\theta})_{k-1}; (\sigma_{ss})_{k-1}, (\sigma_{\theta\theta})_{k-1}; (e_{ss}^{(p)})_{k-1}, (e_{\theta\theta}^{(p)})_{k-1}; (\Gamma^{(p)})_{k-1};$$

$$(e_0^{(p)})_{k-1} = \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|} \right) \right]_{k-1}.$$

Используя $(e_{ss}^{(p)})_{k-1}, (e_{\theta\theta}^{(p)})_{k-1}$ и $(e_0^{(p)})_{k-1} = \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|} \right) \right]_{k-1}$, вычисляем

A_{1D}, A_{2D} (1.9) и решаем краевую задачу при температуре, нагрузках и граничных условиях, соответствующих данному этапу. Имея значения компонент деформаций и

напряжений, определим значения $\varepsilon_0 - \varepsilon_T$ и ω_σ (1.8) в первом приближении на текущем этапе. Путем линейной интерполяции по температуре и углу ω_σ определим кривую F_1 и на этой кривой вычислим значение, соответствующее $|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|$. Затем вычислим приращение интенсивности деформаций сдвига $\Delta_k \Gamma^{(p)}$. Для этого путем линейной интерполяции по температуре и углу ω_σ найдем соответствующую кривую F_2 и на этой кривой определим значение $S^{(d)}$, соответствующее значению интенсивности деформаций сдвига $\Gamma = (\Gamma^{(p)})_{k-1} + S/2G$, где S вычислено по формуле (1.12).

Тогда $\Delta_k \Gamma^{(p)} = \frac{S - S^{(d)}}{2G}$. Используя это значение, определим приращения компонент девиатора пластических составляющих деформаций (1.11) и значения компонент этого девиатора (1.10). Далее определим значения A_{1D}, A_{2D} (1.9) и решим краевую задачу в новом приближении. В общем случае, в произвольном M -ом приближении на k -ом этапе приращение интенсивности пластических деформаций сдвига определяем, используя следующее выражение:

$$\Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)} + \frac{S - S^{(d)}}{2G}, \quad (3.1)$$

где значение интенсивности касательных напряжений S вычислено по формуле (1.12), а значение $S^{(d)}$ найдено с использованием функции F_2 (1.14), соответствующей значению температуры в конце этапа, и значению ω_σ (1.8), вычисленному по результатам предыдущего приближения, при значении интенсивности деформаций

$$\Gamma = \Gamma_{k-1}^{(p)} + \Delta_k \Gamma^{(p)} + \frac{S}{2G}; \quad \Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)}. \quad (3.2)$$

Вычисленное значение $\Delta_k \Gamma^{(p)}$ (3.1) используем для определения приращений компонент девиатора пластических деформаций (1.11), а с помощью значений этих компонент (1.10) уточняем A_{1D}, A_{2D} (1.9). Для этого же используем и значение функции F_1 , найденное при соответствующих значениях температуры, ω_σ и $|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|$. Таким образом, каждое новое приближение на текущем этапе выполняем, вычислив A_{1D}, A_{2D} с использованием результатов решения задачи в предыдущем приближении и на предыдущем этапе. Процесс последовательных приближений на этапе продолжаем до выполнения условий

$$\left| \frac{\sigma_0 - F_1(\varepsilon_0, T, \omega_\sigma)}{K} \right| \leq \delta_1; \quad (3.3)$$

$$\left| \frac{S - F_2(\Gamma, T, \omega_\sigma)}{2G} \right| \leq \delta_2, \quad (3.4)$$

где δ_1 и δ_2 – заданные числа, характеризующие точность, с которой полученные в результате расчета значения $\omega_\sigma, \varepsilon_0, \sigma_0$ удовлетворяют уравнению (1.7), а значения ω_σ, S, Γ – уравнению (1.14) при соответствующих значениях температуры. Расчетная практика показала, что при проведении вычислений достаточно задавать δ_2 и следить за выполнением условия (3.4), так как $\delta_1 < \delta_2$.

Описанный алгоритм реализуется в том случае, когда в элементах тела происходит процесс активного нагружения. Для того, чтобы определить – происходит процесс активного нагружения или разгрузка – на произвольном этапе в каждом элементе те-

ла, в котором возникли пластические деформации ($\Gamma^{(p)} > 0$), после решения задачи в первом приближении необходимо выполнить проверку условия $\Delta\Gamma^{(p)} > 0$. Если это условие выполнено, то в данном элементе происходит активное нагружение и вычисления проводятся по вышеописанному алгоритму. В противном случае в данном элементе происходит разгрузка и для ее учета в этом элементе тела необходимо положить $\Delta\Gamma^{(p)} = 0$ и при определении A_{1D}, A_{2D} использовать значения [5] $e_{ss}^{(p)}, e_{\theta\theta}^{(p)}$ и

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \left(1 - \frac{F_1}{K|\varepsilon_0 - \varepsilon_T|} \right) = \varepsilon_0^{(p)},$$

соответствующие концу предыдущего этапа, и с этими

значениями A_{1D}, A_{2D} решать краевую задачу в следующих приближениях данного этапа. Правильность определения моментов перехода от активного нагружения к разгрузке и наоборот и выбора величины этапов проверяется путем повторного расчета при уменьшении величины этапов в два раза. Процесс дробления этапов необходимо выполнять до тех пор, пока результаты расчетов компонент НДС оболочки в конце исследуемого процесса не совпадут с заданной точностью.

§4. Числовые результаты.

Применим вышеописанную методику к определению термоупругопластического НДС составной оболочки, изготовленной из материала X18H10T, которая представляет собой цилиндрическую оболочку со сферическими днищами. Четверть меридиана оболочки представлена на рис. 1. Длина цилиндрической части оболочки $L = 60$ см, а радиус ее средней поверхности $R = 20$ см. Толщина

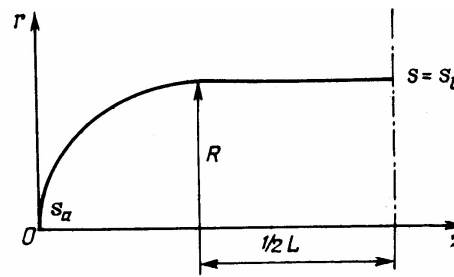


Рис. 1

оболочки постоянна, $h = 1$ см. Начальная температура оболочки $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Оболочка подвергнута нагреву, в результате которого установилась температура, линейно изменяющаяся по толщине от $T = 20^\circ\text{C}$ на внутренней поверхности $\zeta = -h/2$ до $T = 120^\circ\text{C}$ на внешней поверхности $\zeta = h/2$ и не меняющаяся по меридиану, и действию возрастающего равномерного внутреннего давления. Процесс нагружения оболочки разбит на 19 этапов. Давление на этапах задавалось следующими значениями: q_ζ , МПа = 1; 2,5; 5; 7; 9; 10; 11; 12; ..., 23. В силу симметрии геометрии и условий нагружения решение задачи получено при следующих граничных условиях:

$$s = s_a = 0; \quad Q_s = u = v_s = 0; \quad s = s_b = (\pi R / 2 + L / 2); \quad Q_s = u = v_s = 0.$$

Данные о свойствах материала приняты из работ [12 – 14]. Значения функций (1.7) и (1.14) заданы табл. 1, 2, соответственно. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$, коэффициент линейного теплового расширения $\alpha_T = 0,12 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$.

Таблица 1

$\varepsilon_0 - \alpha_T (T - T_0)$	$T = 20^\circ\text{C}$			$T = 500^\circ\text{C}$		
	$\omega_\sigma = 0$	$\omega_\sigma = \pi / 6$	$\omega_\sigma = \pi / 3$	$\omega_\sigma = 0$	$\omega_\sigma = \pi / 6$	$\omega_\sigma = \pi / 3$
0,0002	88,9	88,9	88,9	71,8	71,8	71,8
0,0006	243,8	207,1	121,4	165,9	131,2	88,1
0,001	261,9	214,9	133,1	178,5	138,8	99,9
0,0024	295,7	233,4	154,2	205,3	151,4	115,5
0,003	306,0	240,4	160,7	207,4	154,0	119,4
0,004	316,6	252,0	169,0	211,4	159,0	123,9
0,006	336,6	262,0	179,5	215,4	164,0	129,3
0,008	356,6	282,0	186,2	219,0	169,0	133,0
0,02	373,0	365,0	188,0	239,8	197,0	154,0

Таблица 2

Г	T = 20°C			T = 500°C		
	$\omega_\sigma = 0$	$\omega_\sigma = \pi/6$	$\omega_\sigma = \pi/3$	$\omega_\sigma = 0$	$\omega_\sigma = \pi/6$	$\omega_\sigma = \pi/3$
0,0002	32,2	32,2	32,2	26,0	26,0	26,0
0,01	166,6	166,6	166,6	104,3	104,3	104,3
0,02	188,9	168,2	191,6	128,6	128,6	128,6
0,04	220,5	201,4	223,0	149,0	134,3	164,6
0,06	243,0	222,8	247,8	173,4	145,2	187,6
0,08	261,9	235,3	268,0	178,6	152,6	200,4
0,10	276,1	246,3	287,9	183,8	156,7	211,9
0,16	310,0	279,3	325,3	199,4	169,0	231,8

Выполнено три варианта расчета упругопластического НДС оболочки: 1) с учетом вида напряженного состояния и действия давления и температуры; 2) с учетом вида напряженного состояния и действия давления; 3) без учета вида напряженного состояния, с учетом действия давления и температуры. Результаты расчетов, полученные в конце исследуемого процесса нагружения, приведены в виде графиков на рис. 2 – 6; вариантам 1) – 3) соответствуют сплошные, штриховые и пунктирные линии. В результате расчетов установлено, что в конце процесса вся цилиндрическая часть и примыкающий к ней участок сферической части оболочки деформировались за пределами упругости материала без возникновения разгрузки, а участок сферической части в окрестности полюса $0 \leq s \leq 20$ см деформировался практически в пределах упругости. Это видно из рис. 2, на

котором приведены графики изменения интенсивности накопленных пластических деформаций сдвига (1.13) при $\zeta = -h/2$ (а) и $\zeta = h/2$ (б). Из этого же рисунка видно, что максимальные значения интенсивности накопленных пластических деформаций сдвига получены в варианте 1); в варианте 2) они на 13%, а в

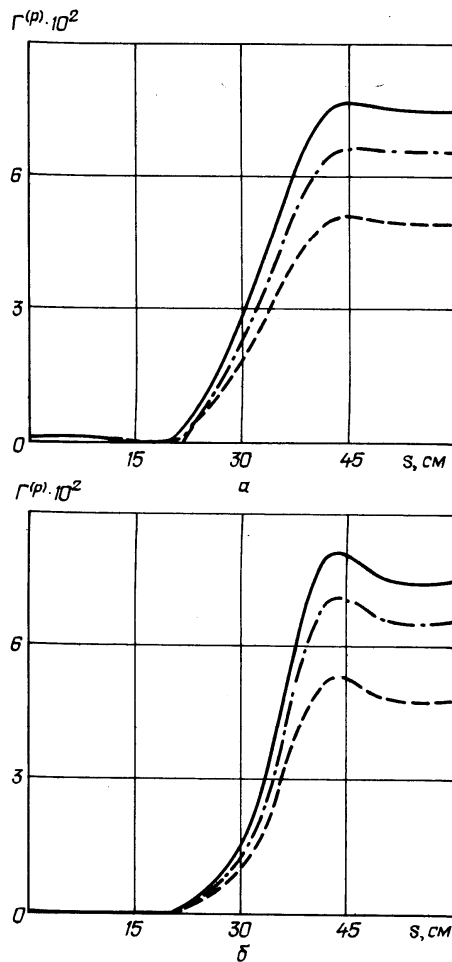


Рис. 2

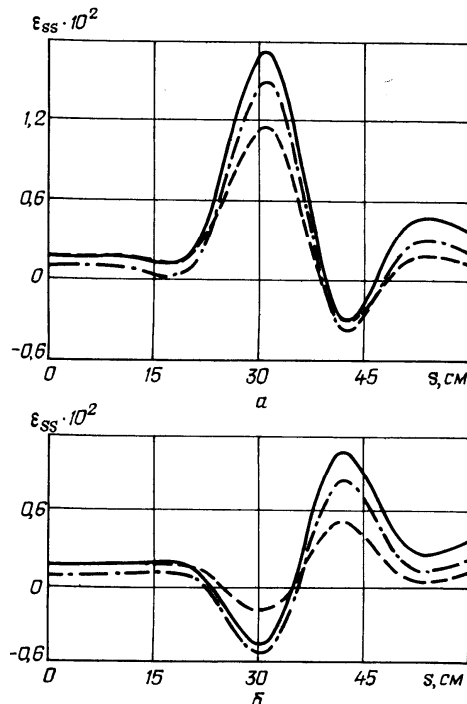


Рис. 3

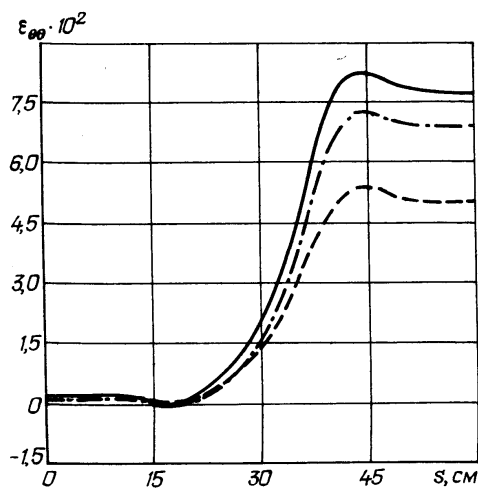
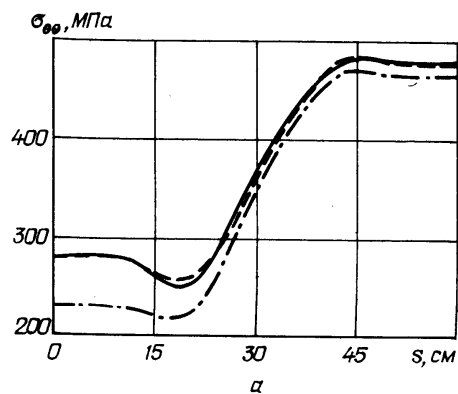
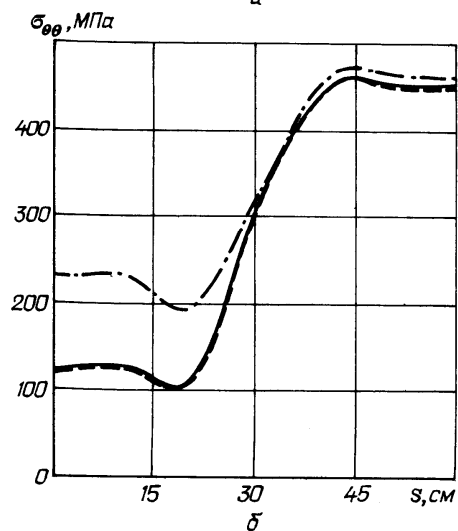


Рис. 4



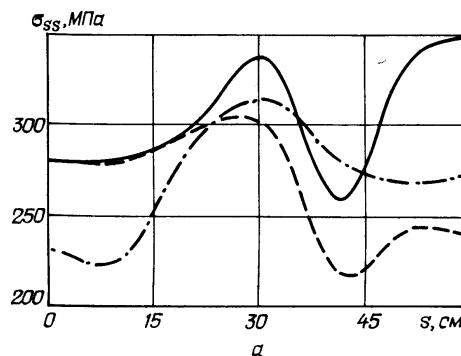
а



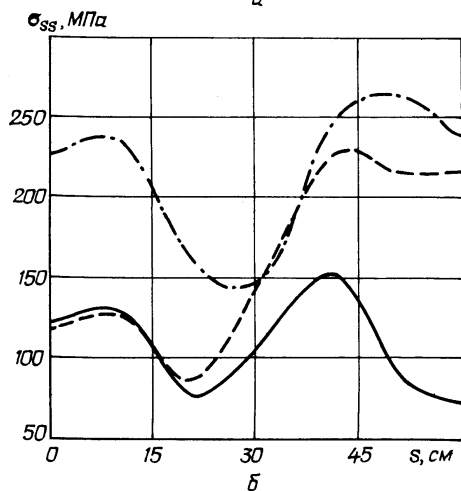
б

Рис. 6

аналогично показано изменение окружных напряжений. Из рис. 5 видно, что максимальные значения меридиональных напряжений, полученные в вариантах 1) и 2), различаются, примерно, в 2 раза. Существенное различие значений окружных напряжений (рис. 6), полученных в этих же расчетах, наблюдается только в сферической части



а



б

Рис. 5

варианте 3) на 35% меньше чем в варианте 1). В зоне пластических деформаций меридиональные деформации по абсолютной величине значительно меньше, чем окружные.

На рис. 3 показаны графики изменения меридиональных деформаций при $\zeta = -h/2$ (а) и $\zeta = h/2$ (б), а на рис. 4 показано изменение вдоль меридиана окружных деформаций, которые не менялись по толщине оболочки.

В зоне упругого деформирования материала значения деформаций, полученные в вариантах 1) и 3), совпали, а в зоне деформирования за пределами упругости максимальные значения окружных деформаций в вариантах 2) и 3) меньше, чем в варианте 1) на 13% и 35%, соответственно. На рис. 5 показаны графики изменения меридиональных напряжений при $\zeta = -h/2$ (а) и $\zeta = h/2$ (б), а на рис. 6

оболочки в окрестности полюса. Максимальные значения меридиональных напряжений, полученные в вариантах 1) и 3), в цилиндрической части оболочки различаются более, чем в 2 раза, в то время как окружные напряжения в этих расчетах отличаются незначительно.

Заключение.

Таким образом, в данной статье разработана методика определения осесимметричного термоупругопластического НДС составных изотропных оболочек с учетом третьего инварианта девиатора напряжений. Выполненные расчеты свидетельствуют о существенном влиянии учета третьего инварианта девиатора напряжений и действия температуры на результаты расчета и сложном характере этого влияния. Это подтверждает необходимость разработки методик численного исследования упругопластического НДС элементов конструкций в виде тонких оболочек вращения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений и действия температуры.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику чисельного дослідження пружнопластичного напружено-деформованого стану тонких складених оболонок обертання в процесах осесиметричного неізотермічного навантаження з урахуванням третього інваріанта девіатора напружень. Використано визначальні рівняння, які описують термопружнопластичне деформування ізотропних матеріалів по траєкторіях малої кривизни з урахуванням третього інваріанта девіатора напружень. Наведено числовий приклад.

1. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н.* Упругопластическое деформирование слоистых оболочек в процессах осесимметричного нагружения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С.14 – 24.
2. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
3. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
4. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
5. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N.* On the Method of Successive Approximations to Solve of the Boundary-Value Problems of Plasticity with Allowance for the Form of Stress State // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 7. – P. 744 – 752.
6. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations of Elastoplastic Isotropic Materials that Allow for the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11. – P. 1189 – 1195
7. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Approximate Description of the Inelastic Deformation of an Isotropic Material with Allowance for the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 139 – 148.
8. *Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N.* Determination of Axisymmetric Elastoplastic State of Thin Shells Taking into Account the Stress Deviator Third Invariant // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 8. – P. 865 – 873.
9. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 350 p.
10. *Savchenko V.G.* Method of Investigation of Non-axisymmetric Non-elastic Deformation of Solids of Revolution with Allowance for View of Stress State // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 921 – 929.
11. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P. 421 – 430.
12. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Linear Relationship between the First Invariants of the Stress and Strain Tensors in Theories of Plasticity with Strain Hardening // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 3. – P. 291 – 302.
13. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Elastoplastic Deformation of Elements of an Isotropic Solid along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Incorporating the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 6. – P. 621 – 630.
14. *Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations of Thermoplasticity Taking into Account the Third Invariant // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 6. – P. 613 – 624.

Поступила 31.03.2010

Утверждена в печать 21.10.2010