

В. Н. Чехов

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛОСКОСТИ СЛОЕВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e - mail: vchekhov@i.com.ua*

Abstract. The stability of equilibrium state of layered bodies is studied for biaxial loading. It is assumed that deformation is absent in the layer plane. The three-dimensional linearized theory of stability jointly with the model of piece-wise bodies are used. Two models of layered bodies are considered. A solution of concrete problems for layered bodies of different structure is obtained. The critical values of waveformation parameters and loads corresponding the loss stability of layered bodies are found.

Key words: three-dimensional linearized theory of stability; stability; deformation; load; coating; layered bodies; waveformation parameter.

Введение.

Проблема устойчивости состояния равновесия слоистых материалов при действии сжимающих нагрузок является актуальной в горной механике, механике конструкционных материалов, материаловедении и различных отраслях современной техники [1, 6 – 11, 13, 14]. В частности, в горной механике согласно гипотезе Динника предполагается отсутствие деформаций в направлении простирания слоев в слоистом горном массиве. Поэтому при действии веса вышележащих горных пород на слоистую ее часть возникает реакция отпора боковых пород и, как следствие, рассматриваемый слоистый массив находится в условиях двухосного нагружения сжимающими распределенными поверхностными нагрузками «мертвого» или следящего характера. В металлургическом производстве и машиностроении аналогичная проблема возникает при прокатке и штамповке многослойных материалов и изделий из них, когда слоистый материал расположен между неподвижными боковыми преградами (стенками) и т.д. Поэтому представляет практический интерес задача определения параметров внешнего нагружения и физико-механических свойств слоев, при которых возможна потеря устойчивости таких тел под действием поверхностных нагрузок обжатия и реакции отпора боковой неподвижной преграды. Подобные задачи для структурно-однородных тел рассмотрены в работах [2, 6], а для неоднородных тел – в [3, 4, 11].

В настоящей работе указанная проблема рассмотрена для слоистых тел различного вида, объединенных сформулированным выше условием отсутствия тангенциальных деформаций. Для этого используется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел при малых и конечных докритических деформациях.

В качестве объекта исследования выбраны единичный слой и многослойный пакет, сопряженный с однородным полупространством. При малых деформациях свойства слоев описываются в рамках модели сжимаемого линейно-упругого изотропного и ортотропного тел; при конечных деформациях для несжимаемых тел – с помощью упругого потенциала Трелоара. Для конкретных примеров определены критические значения параметров нагружения и волнообразования, при которых реализуется явление потери устойчивости рассматриваемых тел.

§1. Постановка задачи и основные соотношения.

Постановку задач рассмотрим в рамках плоской деформации на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел. Для этого каждый элемент слоистой среды отнесем к лагранжевым координатам $x_i^{(k)}$, до деформирования совпадающим с декартовой системой координат $x_1^{(k)} O x_3^{(k)}$. Представим основные соотношения трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ГЛУДУТ) [3]. В рамках первого варианта ГЛУДУТ (конечные докритические деформации) уравнения равновесия имеют вид

$$\left[S_{in}(\delta_{jn} + u_{j,n}^0) + S_{in}^0 u_{j,n} \right]_i + X_j = 0. \quad (1.1)$$

Линеаризированные граничные условия на части поверхности F_1 запишем в виде

$$N_i \left[S_{in}(\delta_{jn} + u_{j,n}^0) + S_{in}^0 u_{j,n} \right]_{F_1} = P_j, \quad (1.2)$$

где S_{in} – компоненты возмущений симметричного тензора обобщенных напряжений, отнесенных к элементарной площадке в недеформированном состоянии; индексом «0» отмечены компоненты основного (докритического) состояния. Аналогично на части поверхности F_2 [3] в возмущениях перемещений имеем условие

$$u_m|_{F_2} = 0. \quad (1.3)$$

Линеаризированное выражение для тензора деформаций Грина имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = (\delta_{ni} + u_{n,i}^0)u_{n,j} + (\delta_{nj} + u_{n,j}^0)u_{n,i}. \quad (1.4)$$

Связь возмущений компонент несимметричного тензора Кирхгофа t и обобщенных напряжений S принимает вид

$$t_{ij} = S_{in}(\delta_{jn} + u_{j,n}^0) + S_{in}^0 u_{j,n}. \quad (1.5)$$

Для условий несжимаемости имеем следующие равенства:

$$G_{ij}^0 (\delta_{nj} + u_{n,j}^0)u_{n,j} = 0, \quad (1.6)$$

где величина G_{ij}^0 определяется по формуле

$$G_{ij}^0 = \frac{\partial}{\partial(\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}^0)} \det \left\| \delta_{rs} + 2\varepsilon_{rs}^0 \right\|. \quad (1.7)$$

При «мертвой» поверхностной нагрузке имеем $P_j = 0$, а при следящей –

$$P_j = \tilde{p} N_k (g^{0*} g^{-1})^{1/2} [(\delta_{jn} + u_{j,n}^0)(\delta_{am} + u_{a,m}^0)(g_{kn}^{0*} g_{m\beta}^{0*} - g_{nm}^{0*} g_{\beta k}^{0*} -$$

$$-g_{n\beta}^{0*} g_{m\alpha}^{0*}) + g_{k\beta}^{0*} g_{j\alpha}^{0*} u_{\alpha,\beta}]. \quad (1.8)$$

Здесь модуль вектора нагрузки \tilde{p} не изменяется в процессе ее приложения. Приведем выражения для связи компонент возмущений тензоров S и ε , соответственно, для сжимаемых и несжимаемых тел

$$S_{ij}^{cж} = \lambda_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}; \quad S_{ij}^{ncж} = S_{ij}^{cж} + g_{in}^{0*} p; \quad t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}. \quad (1.9)$$

Значения компонент тензоров четвертого ранга $\omega_{ij\alpha\beta}$, $\lambda_{ij\alpha\beta}$ здесь не приводятся ввиду громоздкости их записи. В случае третьего варианта ТЛТУДТ (малые докритические деформации) имеем следующие зависимости:

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{in}^0 u_{j,n}),_i = 0; \quad (1.10)$$

$$N_i (\sigma_{in} + \sigma_{in}^0 u_{j,n}) \Big|_{F_1} = P_j; \quad u_m \Big|_{F_2} = 0; \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{n,j} + u_{n,j};$$

$$t_{ij} = \sigma_{in} + \sigma_{in}^0 u_{j,n}; \quad u_{n,n} = 0; \quad P_j = \tilde{p} (N_j u_{\alpha,\alpha} - N_\alpha \delta_{j\beta} u_{\alpha,\beta}). \quad (1.11)$$

Ниже будут рассмотрены задачи при однородном докритическом состоянии. Перемещения при конечных деформациях определяются выражением [3]

$$u_m^0 = (\lambda_m^0 - 1)x_m; \quad \lambda_m^0 = \text{const}; \quad m = \overline{1,3}, \quad (1.12)$$

где λ_m^0 – коэффициент удлинения вдоль координатной оси x_m . Докритические деформации в этом случае имеют вид

$$2\varepsilon_{ij}^0 = \delta_{ij} (\lambda_i^{0^2} - 1). \quad (1.13)$$

При этом многие соотношения ТЛТУДТ существенно упрощаются.

Линеаризированные условия несжимаемости (1.6) принимают вид [3]

$$\lambda_j^{0^{-1}} u_{j,j} = 0. \quad (1.14)$$

Формула для компонент «следящей» нагрузки записывается в виде

$$P_j = \tilde{p} \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 \sum_{i=1}^3 \lambda_j^{0^{-1}} \lambda_i^{0^{-1}} (N_j u_{i,j} - N_i u_{i,j}). \quad (1.15)$$

Уравнение устойчивости для всех вариантов ТЛТУДТ можно записать так :

$$(\lambda_j^0 S_{ij} + S_{in}^0 u_{j,n}),_i = 0. \quad (1.16)$$

В работах [3, 4] операторным методом при малых и конечных докритических деформациях построены общие решения этих уравнений, которые будут приведены при рассмотрении конкретных задач. Для определения компонент докритического состояния в случае конечных деформаций используются соотношения (1.12), (1.13). Докритическое состояние при малых деформациях определяется в рамках линейной теории упругости. Уравнения равновесия и граничные условия принимают вид

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad N_i \sigma_{ij} \Big|_{F_1} = P_j; \quad u_j \Big|_{F_2} = f_j. \quad (1.17)$$

Согласно определению в плоскости простираения слоев докритические деформации должны быть равны нулю, т.е.

$$\varepsilon_{11}^{0(k)} = 0. \quad (1.18)$$

Для построения замкнутой системы уравнений устойчивости ТЛТУДТ в случае гиперупругих тел необходимо в явном виде записать выражения для упругого потенциала, с помощью которого описываются физико-механические свойства рассматриваемых материалов. При конечных деформациях используем потенциал Трелоара, описывающий свойства несжимаемых материалов,

$$\Phi = C_{10}(I_1 - 3), \quad (1.19)$$

где I_1 – первый алгебраический инвариант. При малых деформациях материал слоев принимаем сжимаемым изотропным и линейно-упругим. Тогда можно представить потенциал в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda A_1^2 + \mu A_2, \quad (1.20)$$

где A_1, A_2 – алгебраические инварианты; λ, μ – параметры Ламе, которые связаны с техническими постоянными E, ν зависимостями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.21)$$

Исследования выполнены в статической постановке в соответствии с принятыми критериями устойчивости [2 – 4]. Указанный подход приемлем для консервативных поверхностных нагрузок, к которым относятся «мертвые» нагрузки. Следящие нагрузки, в общем случае, такими не являются. Поэтому здесь воспользуемся достаточными условиями применимости метода Эйлера, полученными в [2, 3]. В общем виде для многослойных сред их можно записать так :

$$\int_{S_0 + \bigcup_{k=1}^T S_k} (u_j^2 P_j^1 - u_j^1 P_j^2)_{(K)} dS = 0. \quad (1.22)$$

Здесь индексы 1 и 2 обозначают первое и второе возможное состояние деформируемой среды. Если «следящие» нагрузки приложены только к поверхности S_0 , ограниченной кривой L , то из (1.22) следуют условия

$$u_3|_L = 0 \quad \text{или} \quad u_n|_L = 0. \quad (1.23)$$

Здесь u_3 – составляющая вектора \vec{u} , направленная по нормали к S_0 , а u_n – по нормали к L на поверхности S_0 .

Задача определения критических значений параметров нагружения, которые обуславливают реализацию явления потери устойчивости в рассматриваемых слоистых телах, сводится к исследованию системы (1.1) – (1.5) в статической постановке на собственные значения относительно параметров нагружения. Эти параметры неявным образом входят в уравнения устойчивости через компоненты тензоров ω или κ . Для перехода в (1.1) – (1.5) к конкретным системам координат необходимо задавать соответствующие значения компонентов метрического тензора g и g^* [3]. Постановка задачи в виде (1.1) – (1.5) справедлива при любых значениях докритических деформаций. Для перехода к малым деформациям следует выполнить замены

$$g_{nm}^{*0} = g_{nm}^0, \quad g_{*0}^{nm} = g_0^{nm}, \quad g_{*0} = g_0, \quad S_{\beta\beta}^0 = \sigma_{\beta\beta}^0, \quad (1.24)$$

где $S_{\beta\beta}^0, \sigma_{\beta\beta}^0$ – компоненты симметричных тензоров обобщенных и истинных докритических напряжений. В этом случае изменения элементарных объемов и поверхностей в процессе нагружения не учитываются, т.е.

$$\frac{dS_n^*}{dS_n} = 1; \quad \frac{dV^*}{dV} = 1. \quad (1.25)$$

При геометрически линейном основном состоянии дополнительно к (1.24) следует учесть равенства [3]

$$\lambda_n = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{nn}} = 1, \quad g_m^j + \nabla_m u_0^j = g_m^j, \quad (1.26)$$

где ε_{nn} – компоненты тензора деформаций в докритическом состоянии.

Таким образом, приходим к следующему заключению. Исходную задачу можно свести к исследованию системы (1.1) – (1.5) в статической постановке на собственные значения относительно параметров нагружения p_{ii} , которые входят в выражения для компонент тензоров ω и κ и соответствующих значениях их физико-механических характеристик с учетом выполнения условий (1.18), (1.23).

§2. Устойчивость единичного слоя.

Рассмотрим задачу об устойчивости единичного слоя толщиной $2h$, к лицевым поверхностям которого приложены распределенные «мертвые» нагрузки интенсивности p_{33} . Примем, что в плоскости простираения слоя тангенциальные деформации ε_{11}^0 отсутствуют. Для этого предполагаем, что в этой плоскости он сжимается распределенной нагрузкой p_{11} . Слой отнесем к лагранжевым координатам x_i ($i=1,2,3$), до деформирования совпадающим с декартовыми. Ось ox_3 направлена по нормали к лицевым поверхностям слоя. Физико-механические свойства слоя описываются моделью сжимаемого ортотропного или трансверсально-изотропного линейно-упругого тела. Исследования проведены в рамках теории, построенной при малых докритических деформациях, когда основное состояние определяется по геометрически линейной теории (1.17), (1.18). Уравнения устойчивости в этом случае можно представить в виде

$$\left[(a_{11} + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (G_{12} + \sigma_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (G_{13} + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] u_1 + (a_{12} + G_{12}^0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (a_{13} + G_{13}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3, \text{Curl}). \quad (2.1)$$

Линеаризованные соотношения между возмущениями напряжений и перемещений имеют вид

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + (1 - \delta_{ik}) G_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.2)$$

где через δ_{ij} обозначено символ Кронеккера.; a_{ij} , G_{ij} – упругие постоянные. Граничные условия при $x_3 = \pm h$ принимают вид

$$\sigma_{33} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = P_3; \quad \sigma_{32} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = P_2; \quad \sigma_{31} + \sigma_{33}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = P_1. \quad (2.3)$$

Для «мертвых» значений нагрузки p_{33} правые части в (2.3) равны нулю.

Для случая плоской деформации в координатах x_1, x_3 имеют место [3] следующие решения:

$$u_1 = -(a_{13} + G_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \chi; \quad u_3 = \left[(a_{11} + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (G_{13} + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \chi, \quad (2.4)$$

где функция χ определяется из решения уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) \chi = 0; \quad \eta_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - \frac{(a_{11} + \sigma_{11}^0)(G_{13} + \sigma_{11}^0)}{(a_{33} + \sigma_{33}^0)(G_{13} + \sigma_{33}^0)}};$$

$$2c(a_{33} + \sigma_{33}^0)(G_{13} + \sigma_{33}^0) = (a_{11} + \sigma_{11}^0)(a_{33} + \sigma_{33}^0) +$$

$$+(G_{13} + \sigma_{33}^0)(G_{13} + \sigma_{11}^0) - (a_{13} + G_{13})^2. \quad (2.5)$$

Для *осесимметричной формы неустойчивости* в цилиндрических координатах $\theta_1 = r, \theta_2 = \vartheta, \theta_3 = x_3$ аналогично с (2.4) имеем

$$u_r = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3} \chi; \quad u_3 = \frac{a_{11} + \sigma_{11}^0}{G_{13} + a_{13}} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{G_{13} + \sigma_{33}^0}{a_{11} + \sigma_{11}^0} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \chi. \quad (2.6)$$

Функция χ определяется из решения следующего уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \chi = 0;$$

$$\xi_{2,3}^2 = D \pm \sqrt{D^2 - \frac{(a_{33} + \sigma_{33}^0)(G_{13} + \sigma_{33}^0)}{(a_{11} + \sigma_{11}^0)(G_{13} + \sigma_{11}^0)}}; \quad (2.7)$$

$$2D(a_{11} + \sigma_{33}^0)(G_{13} + \sigma_{33}^0) = (a_{11} + \sigma_{11}^0)(a_{33} + \sigma_{33}^0) + (G_{13} + \sigma_{11}^0)(G_{13} + \sigma_{33}^0) - (a_{13} + G_{13})^2.$$

В *пространственной постановке* в координатах x_i имеем

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \chi; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \Psi - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \chi; \quad (2.8)$$

$$u_3 = \frac{a_{11} + \sigma_{33}^0}{G_{13} + a_{13}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{G_{13} + \sigma_{33}^0}{a_{11} + \sigma_{11}^0} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \chi.$$

Функция χ удовлетворяет уравнению (2.7), а для функции Ψ имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \Psi = 0; \quad \xi_1^2 = \frac{(G_{13} + \sigma_{33}^0)}{(G_{13} + \sigma_{11}^0)}. \quad (2.9)$$

Таким образом, для всех трех форм потери устойчивости получаем разрешающие системы уравнений и общие представления для их решения. Подставляя решение полученных уравнений в граничные условия (2.3), после ряда преобразований в едином виде для всех трех форм потери устойчивости получаем разрешающее трансцендентное характеристическое уравнение в виде

$$\eta_1(\eta_1^2 - c_1)(\eta_2^2 + c_2) \operatorname{sh} \alpha \eta_1 \operatorname{ch} \alpha \eta_2 = \eta_2(\eta_2^2 - c_1)(\eta_1^2 + c_2) \operatorname{sh} \alpha \eta_2 \operatorname{ch} \alpha \eta_1; \quad (2.10)$$

$$c_1(a_{33} + \sigma_{33}^0)(G_{13} + \sigma_{33}^0) = (a_{11} + \sigma_{11}^0)(a_{33} + \sigma_{33}^0) - a_{13}(a_{13} + G_{13});$$

$$c_2 a_{13}(G_{13} + \sigma_{33}^0) = G_{13}(a_{11} + \sigma_{11}^0).$$

Здесь параметр волнообразования α для рассматриваемых видов деформирования определяется выражениями

$$\alpha = \pi \frac{h}{l}; \quad \alpha = \kappa_n \frac{h}{R}; \quad \alpha = \pi \sqrt{\frac{h}{a^2} + \frac{h}{b^2}}, \quad (2.11)$$

где обозначено: l, R, a, b – размеры полуовальной формы потери устойчивости, соответственно, для разных форм потери устойчивости. Из решения уравнения (2.10) определяются критические значения параметров нагружения и соответствующих им параметров волнообразования, которые обуславливают реализацию исследуемого явления. Для решения уравнения (2.10) в [6] использованы аналитические и численные методы. Аналитическое решение получено методом малого параметра при условии $\alpha \ll 1$ и $\alpha \sqrt{(1-\nu_{13}\nu_{31})^{-1} E_1 G_{13}^{-1}} \ll 1$. Окончательно в случае плоской деформации для ортотропного слоя решение имеет вид [6]:

$$t = (1+y)^{-1} \times \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{3(1+y)} \left[1 + \frac{6(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) - 2a_{13}G_{13}}{5G_{13}a_{33}} + y \left(\frac{1+y-5}{5(1+y)} \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{G_{13}a_{33}} + \frac{a_{13}^2}{a_{33}^2} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{a_{33}}{a_{13}} \right) \right) \right] \right\};$$

$$t = p_{11} / P_{Эл}; \quad y = p_{33} / p_{11} = \text{const}; \quad P_{Эл} = \alpha^2 (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) / 3a_{33}, \quad (2.12)$$

где через $P_{Эл}$ обозначена критическая нагрузка для тонкой пластины при сжатии ее усилиями, равномерно распределенными по торцам. Для линейно-упругого изотропного слоя решение уравнения (2.10) получено численно на ПЭВМ для широкого диапазона изменения параметров α, ν, y (ν – коэффициент Пуассона для слоя). Сравнение численного решения и решения, полученного по формуле (2.12), приведено в таблице, где в числителе расположено значение параметра $t = p_{11} / P_{Эл}$, подсчитанного по формуле (2.12), а в знаменателе – из уравнения (2.10).

y	$\nu = 0,2$		$\nu = 0,3$	
	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$
0	0,9870	0,9048	0,9860	0,9432
	-----	-----	-----	-----
0,9	0,9871	0,9510	0,9860	0,9467
	-----	-----	-----	-----
4,0	0,5234	0,5147	0,5231	0,5136
	-----	-----	-----	-----
4,0	0,5234	0,5149	0,5231	0,5139
	-----	-----	-----	-----
4,0	0,1995	0,1980	0,1991	0,1985
	-----	-----	-----	-----
4,0	0,1995	0,1984	0,1994	0,1981
	-----	-----	-----	-----

В докритическом состоянии, для описания которого привлекается линейная теория упругости, в случае плоской деформации имеем соотношения [2]

$$\sigma_{11}^0 = \varepsilon_{11}^0 a_{11} + \varepsilon_{33}^0 a_{13}, \quad \sigma_{33}^0 = \varepsilon_{11}^0 a_{31} + \varepsilon_{33}^0 a_{33}. \quad (2.13)$$

В случае однородного нагружения распределенной поверхностной нагрузкой имеем $\sigma_{11}^0 = -p_{11}$, $\sigma_{33}^0 = -p_{33}$. Из соотношений (2.13) при $\varepsilon_{11}^0 = 0$ находим для ортотропного слоя зависимость $p_{11} = p_{33} \frac{a_{13}}{a_{33}}$, а для изотропного – $p_{11} = \frac{\nu}{1-\nu} p_{33}$. В последнем случае имеем зависимость $y = \frac{p_{33}}{p_{11}} = \frac{1-\nu}{\nu} > 1$. Отсюда следует, что при «мертвых» значениях нагрузки p_{33} в линейно-упругом изотропном слое возможна потеря устойчивости состояния равновесия при выполнении условия $\varepsilon_{11}^0 = 0$. Заметим, что при следящей поверхностной нагрузке [2] указанный эффект отсутствует.

§3. Устойчивость многослойной среды.

В рамках плоской деформации рассмотрим задачу о поверхностной потере устойчивости в структуре слоистого тела, состоящего из слоистого пакета, жестко сопряженного со структурно-однородным полупространством. К лицевой поверхности верхнего слоя приложена сжимающая распределенная нагрузка интенсивности p_{33} . Боковые грани слоистой среды без трения защемлены между двумя абсолютно жесткими неподвижными стенками. Таким образом, вследствие неизменности расстояния между стенками под действием поверхностной нагрузки p_{33} в плоскости слоев появляется сжимающая нагрузка интенсивности p_{11} . Предполагаем, что поверхностная нагрузка p_{33} имеет «мертвый» или следящий характер.

Для исследования данной задачи привлекаем линеаризованную теорию, построенную при конечных докритических деформациях. Между нагрузками p_{33} и p_{11} , обуславливающими двухосное напряженное состояние слоистой среды, существует взаимосвязь, основанная на отсутствии деформаций в плоскости каждого k -го элемента слоистой среды. Для несжимаемых тел при однородном докритическом состоянии и указанном выше виде нагружения имеем случай всестороннего равномерного сжатия. Исследование проведено в рамках плоской деформации в лагранжевых координатах x_i для тел, свойства которых описываются с помощью потенциала Трелоара [4]. Постановку задачи представим в общем виде для несжимаемых тел

$$(\kappa_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + q_{ij} p)_{,i} = 0;$$

$$q_{ij} u_{j,i} = 0, \quad q_{ij} = G_{in}^0 (\delta_{jn} + u_{j,m}^0) \quad (x_i \in V_k); \quad (3.1)$$

$$[N_i^{(2)} (\kappa_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + q_{ij} p)_{(k-1)} + N_i^{(1)} (\kappa_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + q_{ij} p)_{(k)}] = 0;$$

$$u_{(k-1)}^j = u_{(k)}^j, \quad (N_i^{(k,2)} = -N_i^{(k,1)} \quad (x_i \in S_k); \quad (3.2)$$

$$[N_i (\kappa_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + q_{ij} p)]_{(1)} = P_j^0 \quad (x_3 \in S_0); \quad (3.3)$$

$$u_{(T+1)}^j \rightarrow 0 \quad (x_{3,T+1} \rightarrow -\infty), \quad (3.4)$$

где обозначено: V_k – объем, занимаемый k -ым элементом среды ($k = \overline{1, T+1}$),

T – количество слоев, S_k – поверхность сопряжения k -го и $(k-1)$ -го элементов слоистой среды; S_0 – граничная поверхность слоистого полуограниченного тела; $N_i^{(k)}$ – составляющие орта нормали к поверхности k -го элемента слоистой среды в недеформированном состоянии. Для верхней лицевой поверхности слоя $N_i^{(k)} = N_i^{(k,1)}$, а для нижней – $N_i^{(k)} = N_i^{(k,2)}$. Формула для компонент «следящей» нагрузки принимает вид (1.15) где \tilde{p} – интенсивность внешней нагрузки, измеряемой на единицу площади в невозмущенном начальном состоянии. Величины $\kappa_{ij\alpha\beta}$ – компоненты тензора четвертого ранга [3].

Напряженно-деформированное докритическое состояние слоистой среды при принятом нагружении является однородным. В этом случае имеем

$$u_i^{0(k)} = (\lambda_i^{(k)} - 1)x_i^{(k)}; \quad 2\varepsilon_{ij}^{0(k)} = \delta_{ij}(\lambda_i^{(k)2} - 1) \\ (i, j = 1, 3; \quad k = \overline{1, T+1}). \quad (3.5)$$

В силу постановки задачи имеем $\varepsilon_{11}^{0(k)} = 0$ и, следовательно, $\lambda_1^{(k)} = 1$. Тогда из условия несжимаемости для докритического состояния находим $\lambda_3^{(k)} = 1$. Таким образом, имеем всестороннее равномерное сжатие в пределах k -го элемента слоистой среды. Согласно [2] в докритическом состоянии имеют место равенства $S_{13}^{0(k)} = S_{31}^{0(k)} = 0$; $S_{11}^{0(k)} = S_{33}^{0(k)} = S^{0(k)}$.

Для определения величины $S^{0(k)}$ в работе [2] получена зависимость

$$S^{0(k)} = p_0^{(k)} + \left. \frac{\partial \Phi^{0(k)}}{\partial A_1^{0(k)}} \right|_{A_n^{0(k)}=0} = \text{const}. \quad (3.6)$$

В силу постановки задачи следует $S_{11}^{0(k)} = S_{33}^{0(k)} = S^0$. Докритическое состояние среды соответствует состоянию тела при равномерном всестороннем сжатии нагрузкой $S_0 = p_{33} = -\tilde{p}$, которая измеряется на единицу площади в естественном состоянии.

При однородном докритическом состоянии решение линеаризованных уравнений устойчивости представим [4] в виде

$$u_1 = \lambda_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_3}; \quad u_3 = -\lambda_3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}; \quad \chi = \chi_1 + \chi_3; \\ L_i = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \eta_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \quad L_1 L_3 \chi = 0; \quad L_1 \chi = L_3 \chi_3 = 0. \quad (3.7)$$

Коэффициенты в уравнениях для определения функций χ_i имеют вид

$$\eta_{1,3}^2 = c \pm (c^2 - q_1^2 q_3^{-2} \kappa_{1331} \kappa_{3113}^{-1})^{1/2}; \quad (3.8)$$

$$2c q_3^2 \kappa_{3113} = q_3^2 \kappa_{1111} + q_1^2 \kappa_{3333} - q_1 q_3 (\kappa_{1133} + \kappa_{3131} + \kappa_{3311} + \kappa_{1313});$$

$$\kappa_{ij\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_j [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij}] + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_{\beta\beta}^0;$$

$$q_1 = \lambda_1^{-1}; \quad q_3 = \lambda_3^{-1} \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 3).$$

Величины $\mu_{ij}, A_{i\beta}$ определяются в зависимости от выбранного потенциала по формулам, приведенным в работе [3]. В работе [8] получено матричное представление для записи компонент возмущений вектора перемещений и тензора напряжений, которые имеют вид

$$\bar{R} = L_1 \bar{Z}; \quad \bar{Z} = C \bar{\Psi}; \quad \bar{R} = \|u_1 \quad u_3 \quad S_{31} \quad S_{33} \quad S_{11}\|'; \quad \bar{\Psi} = |\Psi_1 \quad \Psi_3|', \quad (3.9)$$

где $\bar{R}, \bar{\Psi}$ – вектор-столбцы; $L_1 = [l_{ij}]_{i,j=1,4}$; $C = [c_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,5}$ – матрицы, имеющие различный вид в зависимости от модели исследуемой среды и применяемого варианта теории устойчивости. Для элементов l_{ij} диагональной матрицы L_1 и потенциалов $\Psi_{1,3}$ имеем представления

$$l_{11} = \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad l_{22} = \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad l_{33} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \quad l_{44} = l_{55} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}; \quad \Psi_i = \lambda_1 \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1}. \quad (3.10)$$

Элементы C_{ij} матрицы C для несжимаемых материалов при конечных докритических деформациях определяются по формулам

$$c_{1i} = 1; \quad c_{2i} = -\lambda_3 \lambda_1^{-1}; \quad c_{3i} = \mu_{13} (\lambda_3 c_{2i} - \lambda_1 c_{1i} \eta_j^2); \quad c_{4i} = a_{13} \lambda_1 c_{1i} + a_{33} \lambda_3 c_{2i} - \lambda_1 \lambda_3^{-2} c_i;$$

$$c_{5i} = a_{11} \lambda_1 c_{1i} + a_{13} \lambda_3 c_{2i} - \lambda_1^{-1} c_i; \quad c_i = S_{11}^0 + \lambda_1^2 a_{11} - \lambda_3^2 (\mu_{13} + a_{13}) - \eta_j^2 (S_{33}^0 + \lambda_1^2 \mu_{13}),$$

где при $i = 1$ имеем $j = 1$; при $i = 2 - j = 3$.

Функции Ψ_i можно представить в таком виде :

$$\Psi_1^{(k)} = [a_1^{(k)} \exp(mx_3^{(k)}) + b_1^{(k)} \exp(-mx_3^{(k)})] \sin mx_1^{(k)};$$

$$\Psi_3^{(k)} = \lambda_3^{(k)} [ma_3^{(k)} \exp(mx_3^{(k)}) + mb_3^{(k)} \exp(-mx_3^{(k)})] \sin mx_1^{(k)}, \quad (3.11)$$

где $a_{1,3}^{(k)}, b_{1,3}^{(k)}$ – произвольные постоянные интегрирования. Разрешающее характеристическое уравнение, минимальные корни которого определяют решение поставленной задачи, находим из условия равенства нулю определителя однородной алгебраической системы уравнений, полученной в матричном виде из условий сопряжения смежных слоев, граничных условий на поверхности слоистой среды и на «бесконечности»,

$$Q \bar{A}_T = 0; \quad Q = D \left(\prod_{k=1}^T (S_k^{-1} F_k^{-1} F_{k+1}) \right) = [q_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,4}; \quad \bar{A}_T = |a_1^{(T)} \quad b_1^{(T)} \quad a_3^{(T)} \quad b_3^{(T)}|' \quad (3.12)$$

Здесь \bar{A}_T – вектор-столбец произвольных постоянных интегрирования.

В соотношениях (3.12) введены матрицы F_k и S_k . Для их определения имеем следующие выражения:

$$F_k = \begin{vmatrix} b_{11}^{(k)}, & -b_{11}^{(k)}, & b_{12}^{(k)}(1 + \omega_1), & b_{12}^{(k)}(1 - \omega_1) \\ -b_{21}^{(k)} & -b_{21}^{(k)}, & -b_{22}^{(k)} \omega_1 & -b_{22}^{(k)} \omega_1 \\ -b_{31}^{(k)} + S_0 b_{11}^{(k)}, & -b_{31}^{(k)} + S_0 b_{11}^{(k)}, & \tilde{b}_{321}^{(k)}, & \tilde{b}_{322}^{(k)} \\ b_{41}^{(k)} + S_0 b_{21}^{(k)}, & -b_{31}^{(k)} - S_0 b_{11}^{(k)}, & \tilde{b}_{421}^{(k)}, & \tilde{b}_{422}^{(k)} \end{vmatrix}; \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{321}^{(k)} &= S_0(2 + \omega_1)b_{12}^{(k)} - b_{321}^{(k)}; & \tilde{b}_{322}^{(k)} &= S_0(\omega_1 - 2)b_{12}^{(k)} - b_{322}^{(k)}; \\
\tilde{b}_{421}^{(k)} &= S_0(1 + \omega_1)b_{22}^{(k)} + b_{421}^{(k)}; & \tilde{b}_{422}^{(k)} &= S_0(1 + \omega_3)b_{22}^{(k)} + b_{422}^{(k)}; \\
b_{321}^{(k)} &= \mu_{13}^{(k)}b_{22}^{(k)}\omega_1 - b_{12}^{(k)}\mu_{13}^{(k)}(2 + \omega_1); & b_{322}^{(k)} &= \mu_{13}^{(k)}b_{22}^{(k)}\omega_1 - b_{12}^{(k)}\mu_{13}^{(k)}(\omega_1 - 2); \\
b_{421}^{(k)} &= (1 + \omega_1)(\mu_{13}^{(k)} - A_{33}^{(k)} - A_{11}^{(k)} - S_0) + (S_0 + \mu_{13}^{(k)})(3 + \omega_1); \\
b_{422}^{(k)} &= (1 + \omega_3)(\mu_{13}^{(k)} - A_{33}^{(k)} - A_{11}^{(k)} - S_0) + (S_0 + \mu_{13}^{(k)})(3 + \omega_3); \\
\omega_1 &= \pi x_3^{(k)} / l; & \omega_3 &= -\pi x_3^{(k)} / l.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Диагональная матрица S_k имеет следующее представление

$$S_k = \begin{pmatrix} \exp(\omega_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\omega_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(\omega_3) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

При «мертвой» поверхностной нагрузке S_0 матрица D из (3.12) определяется формулой

$$D = \begin{pmatrix} -b_{41}^{(1)} + S_0b_{21}^{(1)}, & -b_{41}^{(1)} - S_0b_{21}^{(1)}, & \tilde{b}_{421}^{(1)}, & \tilde{b}_{422}^{(1)} \\ -b_{31}^{(1)} + S_0b_{11}^{(1)}, & -b_{31}^{(1)} - S_0b_{11}^{(1)}, & \tilde{b}_{321}^{(1)}, & \tilde{b}_{322}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

где элементы матрицы формируются из формул (3.14) при фиксированных значениях величины $k = 1$. При следящих значениях нагрузки S_0 матрица D принимает вид

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} - S_0b_{21}^{(1)}, & d_{12} + S_0b_{21}^{(1)}, & \tilde{d}_{13}, & \tilde{d}_{14} \\ d_{21} - S_0b_{21}^{(1)}, & d_{22} - S_0b_{21}^{(1)}, & \tilde{d}_{23}, & \tilde{d}_{24} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Здесь d_{ij} – элементы матрицы D , определяемой по формуле (3.16). Элементы q_{ij} матрицы Q (3.12) в явном виде здесь не выписаны, поскольку она формируется в процессе решения задачи. Из условия существования нетривиальных решений системы (3.12) получаем определяющее характеристическое уравнение

$$(q_{11} + q_{13})(q_{22} + q_{24}) - (q_{21} + q_{23})(q_{12} + q_{14}) = 0, \tag{3.18}$$

Минимальные корни уравнения (3.18) определяют критические значения параметров нагружения и волнообразования при заданном уровне нагружения, которые обуславливают явление поверхностной неустойчивости в слоистой среде. Для решения характеристического уравнения (3.18) составлен пакет прикладных программ на алгоритмическом языке Фортран. При фиксированных значениях геометрических параметров и механических характеристик элементов слоистой среды это уравнение зависит от параметра нагружения t и параметра волнообразования $\omega = \pi h / l$. Здесь определялась графическая зависимость $t = t(\omega)$. При решении задач исследуются интервалы изменения тех или иных характеристик элементов среды, в которых реализуется явление поверхностной структурной неустойчивости. Решение проведено по типовым программам, имеющим модульную структуру, на ПЭВМ. Для оценки состояния устойчивости слоистой среды варьировались значения различных параметров, характе-

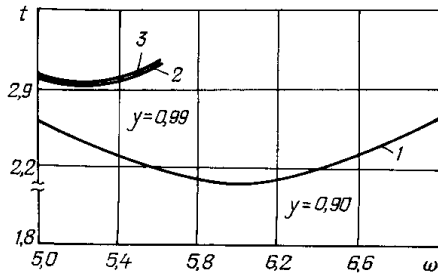


Рис. 1

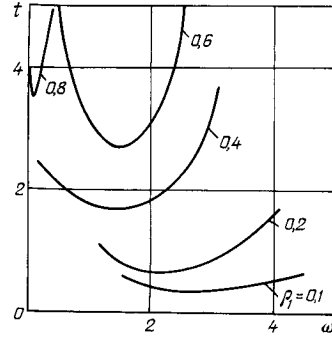


Рис. 2

ризующего физико-механического свойства отдельных элементов среды, при фиксированных значениях остальных характеристик. Характеристический определитель решался методом бисекций, а точность решения определялась величинами шагов изменения параметров нагружения и волнообразования. В качестве параметров задачи, обуславливающих потерю устойчивости в структуре рассматриваемого слоистого тела, выбираются решения, удовлетворяющие условиям

$$t_{kp} = \min t(\omega); \quad \omega \neq 0 \wedge \infty. \quad (3.19)$$

Значение ω_{kp} , соответствующее величине t_{kp} , определяет критические значения размеров формы потери устойчивости.

Числовой пример. Рассмотрим материал, состоящий из двухслойного пакета ($T=2$), жестко сопряженного с однородным полупространством. Свойства слоев и полупространства определяются в рамках модели несжимаемого упругого тела с потенциалом Трелоара

$$\Phi^{(k)} = C_{10}^{(k)} (I_1^{(k)} - 3); \quad I_1^{(k)} = 3 + 2(\varepsilon_{11}^{0(k)} + \varepsilon_{11}^{0(k)}); \quad 2\varepsilon_{ii}^{0(k)} = \lambda_i^{(k)^2} - 1. \quad (3.20)$$

Напряженное докритическое состояние слоистой среды определяется выражениями

$$S_{11}^{0(k)} = 2C_{10}^{(k)} + \lambda_1^{(k)^{-2}} p^{0(k)}; \quad S_{33}^{0(k)} = 2C_{10}^{(k)} + \lambda_3^{(k)^{-2}} p^{0(k)}. \quad (3.21)$$

Из условия равновесия рассматриваемого слоистого тела в докритическом состоянии определяем зависимость

$$\lambda_1 S_{11}^{0(3)} = -p_{11}. \quad (3.22)$$

Из (3.21) и (3.22) окончательно получаем формулу

$$p_{11} = -\frac{2C_{10}^{(3)} (\lambda_1 - \lambda_1^{-2})}{(1 - y\lambda_1^{-2})}. \quad (3.23)$$

С учетом соотношений (3.20) – (3.23) определяем значения остальных величин, необходимых для исследования задачи:

$$A_{11}^{(k)} = -2p^{0(k)} \lambda_1^{-4}; \quad A_{33}^{(k)} = -2p^{0(k)} \lambda_1^4; \quad \mu_{13}^{(k)} = -p^{0(k)}; \\ A_{43}^{(k)} = 0; \quad \eta_1^{(k)} = 1; \quad \eta_3^{(k)} = \lambda_1^{-2}. \quad (3.24)$$

Результаты решения данной задачи приведены на рис. 1 – 4. На рис. 1 дано сравнение решений двух задач: задачи рассмотренной выше (кривая 3) и аналогичной задачи, исследованной в работе [5] (кривые 1, 2), в которой внешняя нагрузка p_{11} отличается от нагрузки p_{33} и отсутствует условие $\varepsilon_{11}^0 = 0$. Кривые 1, 2 построены для

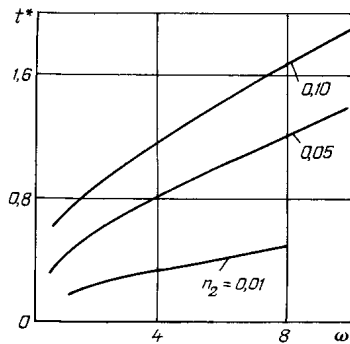


Рис. 3

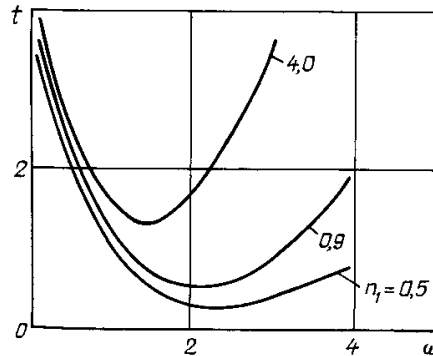


Рис. 4

случая «мертвых» нагрузок p_{33} . При этом в качестве параметра нагружения здесь задана величина $t = p_{11}/C_{10}^{(3)}$. Для задачи, рассмотренной в данной работе, в качестве параметра нагружения принята величина $t = q/C_{10}^{(3)}$.

На рис. 2 – 4 приведены решения задачи для различных фиксированных значений основных параметров при «мертвых» значениях нагрузки p_{33} . В частности, на рис. 2 приведены кривые зависимости параметра нагружения $t = q/C_{10}^{(3)}$ от параметра волнообразования $\omega = \pi H/l$ для случая $n_1 = 4$; $n_2 = 0,01$ (цифры возле кривых обозначают значение величины ρ_k , соответствующей каждой из них). Здесь приняты

обозначения: $H = \sum_{k=1}^T h_k$; $n_k = C_{10}^{(k)}/C_{10}^{(T+1)}$; $\rho_k = h_k/H$.

На рис. 3 показано изменение критических значений параметра нагружения $t^* = t_{kp} = q_{kp}/C_{10}^{(3)}$ в зависимости от параметра $\omega = n_1$ при $\rho_1 = 0,1$. Величина параметра n_2 указана цифрой возле каждой кривой. На рис. 4 показаны те же зависимости, что и на рис. 2, однако здесь фиксировались параметры $\rho_1 = 0,4$ и $n_2 = 0,01$, а цифры возле кривых указывают значение величины n_1 .

Анализ результатов, приведенных на рис. 1 – 4 показывает, что явление поверхностной неустойчивости под действием поверхностной нагрузки $p_{33} = q$ и отсутствии деформаций в плоскости слоев ($\epsilon_{11}^0 = 0$) может реализоваться при «мертвых» значениях p_{33} и отсутствует при «следящих» нагрузках p_{33} .

Этот вывод согласуется с результатами, полученными здесь для единичного слоя и данными работы [2]. Увеличение параметра ρ_1 при фиксированных значениях величин n_1 , n_2 приводит к увеличению критических значений параметров нагрузки t_{kp} и уменьшению параметра волнообразования ω . Аналогичный вывод имеет место и при увеличении параметра n_1 при фиксированных значениях ρ_1 и n_2 . С увеличением параметра n_2 при фиксированных значениях ρ_1 , n_1 критическое значение параметра нагрузки t_{kp} увеличивается.

Заключение. Таким образом, в работе в рамках модели кусочно-однородных сред рассмотрена проблема потери устойчивости слоистых материалов, под действием сжимающих поверхностных нагрузок в условиях отсутствия деформаций в плоскости простираения слоев. На примере двух слоистых тел показано возможность реализации такого явления, как при малых, так и при конечных докритических деформациях, ко-

гда поверхностная нагрузка является «мертвой». В результате решения конкретных задач изучено влияние основных характеристик материала на критические значения параметров нагружения и волнообразования, обуславливающих реализацию исследуемого явления.

РЕЗЮМЕ. Досліджено стійкість стану рівноваги шаруватих тіл при двовісному навантаженні. Прийнято гіпотезу про відсутність деформацій в площині шарів. Використано тривимірну лінеарізовану теорію стійкості у поєднанні із моделлю кусково-однорідних тіл. Розглянуто дві моделі шаруватих тіл. Отримано розв'язок конкретних задач для шаруватих тіл різної структури. Визначено критичні значення параметрів навантаження та хвилеутворення, які обумовлюють явище втрати стійкості шаруватих тіл.

1. Гузь А.Н. О задачах устойчивости в механике горных пород // Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1972. – С. 35 – 43.
2. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – К.: Наук. думка, 1979. – 144 с.
3. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища школа, 1986. – 511 с.
4. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. – К.: Наук. думка, 1990. – 630 с.
5. Гузь А.Н., Корж В.П., В.Н.Чехов. Устойчивость слоистой полуплоскости под действием поверхностных распределенных нагрузок // Докл. АН СССР. – 1990. – **313**, № 6. – С. 560 – 566.
6. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Линеаризованная теория складкообразования в толще земной коры // Прикл. механика. – 1975. – **11**, № 1. – С. 3 – 17.
7. Гузь А.Н., Чехов В.Н. О выборе нагрузок на крепь в подземных горных выработках // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 11. – С. 38 – 46.
8. Чехов В.Н. Исследование складкообразования горных пород периодической структуры // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 3. – С. 17 – 24.
9. Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистой среды, сопряженной с однородным полупространством // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 11. – С. 35 – 42.
10. Чехов В.Н. Влияние поверхностной нагрузки на устойчивость слоистых сред // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 9. – С. 37 – 45.
11. Чехов В.Н. Об условиях образования линейных складок в слоистых массивах горных пород регулярной структуры при двухосном нагружении // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 26 – 34.
12. Guz A.N. On Study of Nonclassical Problems of Fracture and Failure Mechanics and Related Mechanisms // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 1. – P. 1 – 32.
13. Guz A.N. Setting up a Theory of Stability of Fibrous and Laminated Composites // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 6. – P. 587 – 613.
14. Tkachenko E.A., Chekhov V.N. Stability of Layered Coatings under Biaxial Thermomechanical Loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1349 – 1357.

Поступила 11.01.2010

Утверждена в печать 21.10.2010