

Л. П. Хорошун

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ ТЕЛА
С ТРЕЩИНОЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A plane problem on tension of a body with crack with piece-wise diagram of deformation is reduced by the Fourier-transform method to the system of nonlinear algebraic equations. The body contains a crack. Basing on numerical solution of the system for the plane strain and stress state of perfect elasto-plastic material, the plastic strain zones, stresses and strains distribution, displacements of crack sides are studied.

Key words: crack; discretization of nonlinear problem; plastic strain zone; stress, strain and displacement distribution.

Введение.

Одним из основных направлений механики разрушения является механика трещин, изучающая напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины с целью установления критериев и закономерностей ее развития. Строгий подход к определению предельного равновесного состояния деформируемого твердого тела с трещиной должен базироваться, как известно [3], на применении классических критериев прочности относительно напряжений или деформаций в вершине трещины с учетом всех участков реальной диаграммы деформирования. Однако, ввиду определенных трудностей постановочного и вычислительного характера в механике трещин сложились альтернативные подходы, в основу которых положены дополнительные упрощающие предположения о характере распределения напряжений и механизме разрушения в вершине трещин. Наиболее распространенные из этих подходов известны как энергетические, силовые и деформационные критерии разрушения.

Замена строгого подхода приближенными, естественно, ставит вопрос о степени адекватности упрощающих предположений и связанных с ними критериев разрушения реальным физико-механическим процессам в вершине трещины и строгости математической формулировки задачи. Ответить на этот вопрос можно только на основе более глубокого анализа упрощенных критериев разрушения, экспериментальных результатов и точного решения задачи в ее строгой постановке.

Одним из основополагающих в механике трещин принято считать энергетический критерий Гриффитса [9] для хрупкого разрушения и его модификацию, согласно концепции Орована – Ирвина [11, 19], на случай квазихрупкого разрушения. В основу этого критерия положено представление о балансе освобождающейся упругой энергии линейного деформирования и приращения поверхностной энергии при увеличении длины трещины в случае хрупкого разрушения или работы пластической деформации в тонком слое у вершины трещины перед его квазихрупким разрушением. Однако, такое представление нельзя признать корректным [14]. В самом деле, решение линейной задачи приводит к неограниченным напряжениям у вершины трещины, приращение же поверхностной энергии и работа пластической деформации содержат ограниченные значения напряжений, соответствующие реальной диаграмме деформирования. Это значит, что на границе упругой области и области разрушения соответствующие на-

пряжения терпят разрыв вопреки представлениям механики сплошной среды. Если же исходить из ограниченности напряжений в области освобождающейся упругой энергии, то критерий Гриффитса получить невозможно. Кроме того, приращение поверхностной энергии, равной работе разделения двух соседних слоев атомов, как минимум на порядок меньше освобождающейся упругой энергии, которая накоплена не менее чем в десяти слоях атомов согласно концепции сплошности, т.е. величины эти несоизмеримы.

Обобщением энергетического критерия Гриффитса является критерий J -интеграла или критерий Черепанова – Райса [8]. Сущность его связана со способом определения освобождающейся упругой энергии при увеличении длины трещины – прием Ирвина заменяется интегрированием определенного выражения по произвольному контуру, охватывающему вершину трещины. При этом принимается, что механические свойства твердого тела могут быть произвольными. Однако, построение J -интеграла не является строгим. Во-первых, погрешность замены интеграла по всей области тела интегралом по части области, содержащей вершину трещины и ограниченной произвольным контуром, может быть большой при приближении произвольного контура к вершине трещины. Во-вторых, замена производной по длине трещины производной по координате вдоль трещины является необоснованной и весьма приближенной. Строгий подход, изложенный для линейно-упругой задачи [16], приводит к результату, совершенно отличному от J -интеграла, причем для нелинейной задачи подобное построение является невозможным.

В основе силовых критериев лежит общепринятое представление о предельной поверхности в пространстве напряжений. Однако, в случае линейно-упругой задачи в вершине трещины возникают бесконечные напряжения. Поэтому, согласно концепции Ирвина, принято строить предельную поверхность относительно коэффициентов интенсивности, являющихся множителями в сингулярных составляющих и характеризующих асимптотическое распределение напряжений вблизи вершины трещины. Естественно, возникает вопрос об адекватности подобной замены. Если исходить из реальной нелинейной диаграммы деформирования материала, которая всегда имеет ограниченное напряжение, то вполне логично, что бесконечных напряжений в вершине трещины быть не может. Поэтому понятие «коэффициент интенсивности» в асимптотическом представлении решения вблизи вершины является результатом идеализированной диаграммы деформирования, допускающей бесконечные напряжения. Следовательно, возможность достоверного экспериментального определения его предельного значения не является обоснованной. К такому выводу приходит ряд авторов [18, 20 и др.].

Исходным представлением деформационных критериев является классический критерий прочности в виде предельной поверхности в пространстве деформаций. Однако, ввиду трудности определения деформаций в вершине трещины вместо них вводится понятие раскрытия или смещения берегов трещины в ее тупиковой части, относительно которых строится предельная поверхность. Здесь также возникает вопрос о корректности такой замены, так как раскрытие в вершине трещины в действительности равно нулю при отличной от нуля растягивающей или сдвиговой деформации, а понятие «тупиковая часть трещины» не имеет строгого определения. Это приводит к трудностям как решения соответствующих задач, так и экспериментального определения предельных значений вводимых параметров.

Таким образом, анализ упрощенных критериев трещиностойкости, сформулированных с целью избежать трудности строгой постановки и решения задач на основе классических критериев прочности, не дает оснований считать их адекватными реальному распределению напряжений и связанному с ним разрушению материала в вершине трещин. Об этом свидетельствуют также литературные данные [10], согласно которым результаты статических испытаний на трещиностойкость по упрощенным критериям для одного и того же материала существенно отличаются друг от друга. Причина таких расхождений видится [6] в отсутствии единой обоснованной трактовки физического смысла критического состояния трещины, а также механизма его образования и соответствующей адекватной математической модели.

Вполне очевидно, что физический смысл критического состояния трещины заключается в достижении в ее вершине предельного состояния материала, приводящего к разрушению. Механизм образования предельного состояния непосредственно связан с реальной диаграммой деформирования, состоящей из линейного упругого

участка и нелинейного, обусловленного законом Леннарда – Джонса [15], пластичностью или повреждаемостью материала. При этом максимальное напряжение всегда ограничено. При нагружении в вершине трещины достигаются максимальные напряжения и происходит нелинейное деформирование материала, которое стеснено окружающей частью материала, работающей в линейно-упругой области. Поэтому разрушение в вершине трещины происходит при достижении предельного состояния в пространстве деформаций. Отсюда следует, что адекватная математическая модель разрушения должна базироваться на точном решении задачи о напряженно-деформированном состоянии в вершине трещины для полной реальной диаграммы деформирования материала, включающей предельную деформацию. Так как строгое аналитическое решение такой задачи построить невозможно, то единственным осуществимым подходом является дискретизация исходных континуальных уравнений с целью их численного решения.

В настоящей работе рассмотрена плоская задача о растяжении тела с трещиной для кусочно-линейной диаграммы деформирования материала, которая описывается соответствующей зависимостью модуля сдвига от второго инварианта девиатора деформаций при постоянном коэффициенте Пуассона. На основе преобразования Фурье задача сводится к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая заменой интегралов суммами и производных разностями преобразуется в систему нелинейных алгебраических уравнений. Проведено численное решение системы для идеального упруго-пластического материала в случае плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Исследованы зоны пластических деформаций, распределение напряжений и деформаций, а также перемещения берега трещины. Установлено обоснованность моделирования пластических зон трещинами-разрезами, к берегам которых приложена простая нагрузка, соответствующая пределу текучести, а также невозможность построения критерия развития трещины на основе асимптотического приближения линейно-упругой задачи. Сильное влияние нелинейности деформирования на монотонную зависимость перемещения берегов трещины и деформаций у ее вершины от нагрузки дает основание связать с этими параметрами критерий развития трещины.

§1. Исходные уравнения.

Исходим из нелинейной связи между девиаторами напряжений σ'_{ij} и деформаций ε'_{ij} для изотропного материала

$$\sigma'_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\varepsilon'_{ij}, \quad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij})^{1/2} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

при постоянном коэффициенте Пуассона ν . Тогда зависимости между напряжениями и деформациями можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Для диаграммы деформирования с линейным законом упрочнения модуль сдвига $\mu(J)$ определяется выражением

$$\mu(J) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \frac{k}{2\mu_0}; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right)\frac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geq \frac{k}{2\mu_0}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где μ_0 , μ' , $k = \sigma_0\sqrt{2/3}$ – постоянные (σ_0 – предел текучести материала). При $\mu' = 0$ из (1.2), (1.3) следует диаграмма идеального упруго-пластического деформирования материала.

Если ввести замену

$$\sigma_{ij} = \bar{\mu} \hat{\sigma}_{ij}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (1.4)$$

то модифицированные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$, как следует из (1.2), будут линейно зависеть от деформаций, т.е.

$$\hat{\sigma}_{ij} = 2\mu_0 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right) \quad (i, j, r = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.6)$$

где F_i – объемные силы, приходим к уравнениям равновесия относительно модифицированных напряжений

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \hat{f}_i = 0; \quad \hat{f}_i = \frac{1}{\bar{\mu}} (\hat{\sigma}_{ij} \bar{\mu}_{,j} + F_i). \quad (1.7)$$

Для формулировки плоской задачи в напряжениях, полагая, соответственно, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ и $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, находим из (1.1), (1.5) выражения инварианта J_ε в случае плоского деформированного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\mu_0} J_{\hat{\sigma}}; \quad J_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(1-\nu+\nu^2)(\hat{\sigma}_{11}^2 + \hat{\sigma}_{22}^2) - (1+2\nu-2\nu^2)\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22} + 3\hat{\sigma}_{12}^2 \right]^{1/2} \quad (1.8)$$

и плоского напряженного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\mu_0} J_{\hat{\sigma}}; \quad J_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\hat{\sigma}_{11}^2 + \hat{\sigma}_{22}^2 - \hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22} + 3\hat{\sigma}_{12}^2)^{1/2}. \quad (1.9)$$

При этом безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$, согласно (1.3), (1.4), (1.8), (1.9), определяется формулой

$$\bar{\mu}(J_{\hat{\sigma}}) = \begin{cases} 1, & J_{\hat{\sigma}} < k; \\ \bar{\mu}' + (1-\bar{\mu}') \frac{k}{J_{\hat{\sigma}}}, & J_{\hat{\sigma}} \geq k; \end{cases} \quad \left(\bar{\mu}' = \frac{\mu'}{\mu_0} \right). \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.5) следуют выражения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu_0} (\hat{\sigma}_{ij} - \hat{\nu} \hat{\sigma}_{rr} \delta_{ij}) \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.11)$$

где $\hat{\nu} = \nu$ – для плоского деформированного и $\hat{\nu} = \nu / (1+\nu)$ – для плоского напряженного состояний.

Подставляя (1.11) в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad (1.12)$$

приходим к уравнению совместности относительно модифицированных напряжений

$$\left[(1-\hat{\nu}) \hat{\sigma}_{11} - \hat{\nu} \hat{\sigma}_{22} \right]_{,22} + \left[(1-\hat{\nu}) \hat{\sigma}_{22} - \hat{\nu} \hat{\sigma}_{11} \right]_{,11} = 2\hat{\sigma}_{12,12}. \quad (1.13)$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (1.7), (1.13) определяется через функцию напряжений

$$\hat{\sigma}_{11}^0 = \varphi_{,22}; \quad \hat{\sigma}_{22}^0 = \varphi_{,11}; \quad \hat{\sigma}_{12}^0 = -\varphi_{,12}, \quad (1.14)$$

которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,ijij} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.15)$$

Частное решение неоднородных уравнений (1.7), (1.13), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [7], представляется через интегралы по области D тела

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^* + \hat{\sigma}_{22}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2; \\ \hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}_{22}^* &= \frac{1-2\hat{\nu}}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) e_{ij}(x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\ \hat{\sigma}_{12}^* &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij}(x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий, которым должно удовлетворять общее решение $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^0 + \hat{\sigma}_{ij}^*$, состоящее из суммы (1.14) и (1.16). В результате приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений $\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{22}$, $\hat{\sigma}_{12}$.

§2. Плоская задача о растяжении тела с трещиной.

Рассмотрим плоскую задачу о распределении напряжений в бесконечном двумерном теле, ослабленном внутренней трещиной ($-c \leq x \leq c$, $y = 0$), при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной нагрузке p_0 , действующей вдоль оси y . Вследствие симметрии распределения напряжений относительно осей x и y достаточно ограничиться первым квадрантом D_1 области тела D , учитывая при этом влияние остальных квадрантов D_2 , D_3 , D_4 при построении частного решения (1.16). В результате приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \hat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \hat{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \hat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_{12}^*(x, y) = \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \hat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left(\hat{f}_i = \hat{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}}; \quad i, j = 1, 2 \right), \quad (2.1)$$

где функции влияния определяются формулами

$$\begin{aligned} P_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_4} \right); \\ P_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_4}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} \right); \\ Q_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\ Q_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\ S_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right); \\ S_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right); \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 = x - \xi; \quad \alpha_2 = x + \xi; \quad \alpha_3 = y - \eta; \quad \alpha_4 = y + \eta;$$

$$\beta_1 = \alpha_1^2 + \alpha_3^2; \quad \beta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2;$$

$$\beta_3 = \alpha_2^2 + \alpha_4^2; \quad \beta_4 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2; \quad \gamma_1 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2; \quad \gamma_2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2; \quad \gamma_3 = \alpha_2^2 - \alpha_4^2; \quad \gamma_4 = \alpha_1^2 - \alpha_4^2.$$

Нагрузку p_0 принимаем меньшей предела текучести k , приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, так что на бесконечности, согласно (1.4), (1.10), выполняются граничные условия: $\hat{\sigma}_{22}|_{\infty} = p_0$, $\hat{\sigma}_{11}|_{\infty} = \hat{\sigma}_{12}|_{\infty} = 0$.

На оси $y=0$ граничные условия формулируются в виде $\hat{\sigma}_{22}(x,0)=0$ для $|x|\leq c$; $u_2(x,0)=0$ для $|x|\geq c$; $\hat{\sigma}_{12}(x,0)=0$ для $0\leq|x|<\infty$, где $u_2(x,0)$ – перемещение вдоль оси y .

На основе преобразования Фурье [7] решение сформулированной задачи представим в виде

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11}(x,y) &= \hat{\sigma}_{11}^*(x,y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) (1-\xi y) e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\ \hat{\sigma}_{22}(x,y) &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x,y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) (1+\xi y) e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi;\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\hat{\sigma}_{12}(x,y) = \hat{\sigma}_{12}^*(x,y) - \frac{2y}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \xi e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi,$$

где функция $\tilde{p}(\xi)$ определяется из дуальных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \cos \xi x d\xi &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x,0) \quad (0 \leq x \leq c); \\ \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi &= 0 \quad (x \geq c).\end{aligned}\quad (2.4)$$

при этом перемещение берега трещины определяется формулой

$$u_2(x,0) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu_0} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi \quad (0 \leq x \leq c).\quad (2.5)$$

Таким образом, приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (2.1) – (2.4) относительно модифицированных напряжений $\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{22}$, $\hat{\sigma}_{12}$.

Численное решение системы (2.1) – (2.4) связано с необходимостью определения функции $\tilde{p}(\xi)$ в пространстве изображений в области $0 \leq \xi < \infty$, что существенно усложняет задачу. В связи с этим, учитывая соотношение

$$\tilde{u}_2(\xi,0) = \frac{1-\nu}{\mu_0} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi},\quad (2.6)$$

преобразуем уравнения (2.3) к виду

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11}(x,y) &= \hat{\sigma}_{11}^*(x,y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\nu)} \int_0^c [R_1(x,y,\eta) - yR_2(x,y,\eta)] u_2(\eta,0) d\eta; \\ \hat{\sigma}_{22}(x,y) &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x,y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\nu)} \int_0^c [R_1(x,y,\eta) + yR_2(x,y,\eta)] u_2(\eta,0) d\eta; \\ \hat{\sigma}_{12}(x,y) &= \hat{\sigma}_{12}^*(x,y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\nu)} \int_0^c R_3(x,y,\eta) u_2(\eta,0) d\eta,\end{aligned}\quad (2.7)$$

где функция $u_2(\eta,0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, 0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_0^c R(x, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta \quad (0 \leq x \leq c), \quad (2.8)$$

а ядра определяются формулами

$$\begin{aligned} R(x, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta} \right); \quad R_1(x, y, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{x+\eta}{(x+\eta)^2 + y^2} - \frac{x-\eta}{(x-\eta)^2 + y^2} \right]; \\ R_2(x, y, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{y(x+\eta)}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{y(x-\eta)}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}; \\ R_3(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x+\eta)^2 - y^2}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если ввести безразмерные параметры

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{k}; \quad \bar{\sigma}_{ij}^* = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^*}{k}; \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{k}; \quad \bar{u}(\eta, 0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta, 0)}{\pi(1-\hat{\nu})kc}, \quad (2.10)$$

то соотношения (2.7) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta; \\ \bar{\sigma}_{22}(x, y) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta; \\ \bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - cy \int_0^c R_3(x, y, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где функция $\bar{u}(\eta, 0)$, как следует из (2.8), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = c \int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta \quad (0 \leq x \leq c). \quad (2.12)$$

При этом частное решение, согласно (2.1), определяется интегралами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left(\bar{f}_i = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_{,j}}{\bar{\mu}}, \quad i, j = 1, 2 \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

а безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$, согласно (1.10), можно представить в виде

$$\bar{\mu}(J_{\bar{\sigma}}) = \begin{cases} 1, & J_{\bar{\sigma}} < 1; \\ \bar{\mu}' + (1 - \bar{\mu}') \frac{1}{J_{\bar{\sigma}}}, & J_{\bar{\sigma}} \geq 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

где инвариант $J_{\bar{\sigma}}$ определяется выражениями:

$$J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(1 - \nu + \nu^2) (\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - (1 + 2\nu - 2\nu^2) \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} + 3\bar{\sigma}_{12}^2 \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

– для плоского деформированного состояния и

$$J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} + 3\bar{\sigma}_{12}^2)^{1/2} \quad (2.16)$$

– для плоского напряженного состояния.

§3. Дискретизация задачи.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (2.11) – (2.16) в аналитическом виде не представляется возможным. Для применения численных методов необходимо их преобразовать из континуальной в дискретную форму. С этой целью разобьем интервал $(0, c)$ на N частей, представив интеграл в (2.12) суммой

$$\int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta = \sum_{k=1}^N \bar{u}(x_k, 0) \int_{x_k - a_k}^{x_k + a_k} R(x, \eta) d\eta \quad \left(\sum_{k=1}^N 2a_k = c \right). \quad (3.1)$$

Тогда с учетом (2.9) приведем интегральное уравнение (2.12) относительно $\bar{u}(\eta, 0)$ к системе алгебраических уравнений

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik} \bar{u}(x_k, 0) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3.2)$$

где матрица I_{ik} с безразмерными элементами определяется формулой

$$I_{ik} = -\bar{a}_k \left[\frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} + \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right] \left(\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; \quad i, k = 1, \dots, N \right). \quad (3.3)$$

Аналогично на основе (2.9), (2.11) получим представление решения в произвольной точке x_i, y_j области D_1 , включая границу, через суммы

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N I_{ijk}^{(3)} \bar{u}(x_k, 0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где матрицы $I_{ijk}^{(1)}$, $I_{ijk}^{(2)}$, $I_{ijk}^{(3)}$ определяются формулами

$$I_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{r_2}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{r_4}{r_4^2 + r_5^2} \right);$$

$$I_{ijk}^{(2)} = r_5^2 \left[\frac{r_1}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right];$$

$$I_{ijk}^{(3)} = \frac{r_5}{2} \left[\frac{r_1^2 - r_5^2}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2^2 - r_5^2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3^2 - r_5^2}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4^2 - r_5^2}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right];$$

$$r_1 = \bar{x}_i + \bar{x}_k + \bar{a}_k; \quad r_2 = \bar{x}_i + \bar{x}_k - \bar{a}_k; \quad r_3 = \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{a}_k; \quad r_4 = \bar{x}_i - \bar{x}_k - \bar{a}_k; \quad r_5 = \bar{y}_j. \quad (3.5)$$

Частное решение (2.13) представляется через двойные суммы по прямоугольным ячейкам области D_1

$$\bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) = 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) + Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{a}_k \bar{b}_n;$$

$$\bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) = 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) - Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{a}_k \bar{b}_n;$$

$$\bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) = 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{a}_k \bar{b}_n \quad (r=1, 2), \quad (3.6)$$

где введены обозначения:

$$P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = cP_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \quad Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = cQ_r(x_i, y_j; x_k, y_n);$$

$$S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = cS_r(x_i, y_j; x_k, y_n);$$

$$\bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) = \frac{\bar{\sigma}_{r1}(x_k, y_n)}{\bar{a}_k + \bar{a}_{k+1}} \left[\frac{\bar{\mu}(x_{k+1}, y_n)}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] + \frac{\bar{\sigma}_{r2}(x_k, y_n)}{\bar{b}_n + \bar{b}_{n+1}} \left[\frac{\bar{\mu}(x_k, y_{n+1})}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] \quad (r=1, 2). \quad (3.7)$$

При этом безразмерные координаты и величины определяются отношениями

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \quad \bar{y}_j = \frac{y_j}{c}; \quad \bar{x}_k = \frac{x_k}{c}; \quad \bar{y}_n = \frac{y_n}{c}; \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{c} \quad (i, j = 0, 1, \dots; k, n = 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

где a_k, b_n – половины размеров прямоугольных ячеек области D_1 с координатами центров x_k, y_n .

Если принять равномерное разбиение области D_1 с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, т.е.

$$\bar{a}_k = \bar{b}_n = a = \frac{1}{2N} \quad (k, n = 1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

то безразмерные координаты \bar{x}_i, \bar{y}_j в области D_1 могут быть представлены в виде

$$\bar{x}_i = (2i-1)a; \quad \bar{y}_j = (2j-1)a \quad (i, j = 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Границе $\bar{y} = 0$ соответствует значение индекса $j = 1/2$. Подставляя (3.9), (3.10) в (3.3), (3.5), получаем

$$I_{ik} = -\frac{1}{a} \left[\frac{1}{4(i-k)^2 - 1} + \frac{1}{4(i+k-1)^2 - 1} \right] \quad (i, k = 1, \dots, N), \quad (3.11)$$

а также

$$I_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{s_1}{s_1^2 + s_5^2} - \frac{s_2}{s_2^2 + s_5^2} + \frac{s_3}{s_3^2 + s_5^2} - \frac{s_4}{s_4^2 + s_5^2} \right);$$

$$I_{ijk}^{(2)} = \frac{s_5^2}{a} \left[\frac{s_1}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right];$$

$$I_{ijk}^{(3)} = \frac{s_5}{2a} \left[\frac{s_1^2 - s_5^2}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2^2 - s_5^2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3^2 - s_5^2}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4^2 - s_5^2}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right];$$

$$s_1 = 2(i+k) - 1, \quad s_2 = 2(i+k) - 3, \quad s_3 = 2(i-k) + 1;$$

$$s_4 = 2(i-k) - 1; \quad s_5 = 2j - 1 \quad (i, j = 1/2, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, N). \quad (3.12)$$

Частное решение (3.6) с учетом (3.9), (3.10) принимает вид

$$\bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n)] g_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n)] g_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \bar{S}_r(i, j; k, n) g_r(k, n) \quad (r = 1, 2), \quad (3.13)$$

где приняты обозначения

$$\bar{P}_1(i, j; k, n) = -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_3} + \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_4} \right);$$

$$\bar{P}_2(i, j; k, n) = -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1} + \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4} \right);$$

$$\bar{Q}_1(i, j; k, n) = -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right);$$

$$\bar{Q}_2(i, j; k, n) = -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_3 \bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3 \bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_4 \bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4 \bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_1(i, j; k, n) = & -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\bar{\alpha}_3 \bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3 \bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_4 \bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4 \bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
& -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2 \bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2 \bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_2(i, j; k, n) = & -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
& -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_1 = i - k; \quad \bar{\alpha}_2 = i + k - 1; \quad \bar{\alpha}_3 = j - n; \quad \bar{\alpha}_4 = j + n - 1; \quad \bar{\beta}_1 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_3^2; \quad \bar{\beta}_2 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_3^2;$$

$$\bar{\beta}_3 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_4^2; \quad \bar{\beta}_4 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_4^2; \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_3^2; \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_3^2; \quad \bar{\gamma}_3 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_4^2; \quad \bar{\gamma}_4 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_4^2;$$

$$g_r(k, n) = \bar{\sigma}_{r1}(x_k, y_n) \left[\frac{\bar{\mu}(x_{k+1}, y_n)}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] + \bar{\sigma}_{r2}(x_k, y_n) \left[\frac{\bar{\mu}(x_k, y_{n+1})}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] \quad (r=1, 2). \quad (3.14)$$

Таким образом, при равномерном разбиении области D_1 на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (3.2), (3.4), (3.13) относительно переменных $\bar{u}(x_k, 0)$, $\bar{\sigma}_{ij}(x_k, y_n)$, $\bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n)$, где коэффициенты определяются формулами (3.11), (3.12), (3.14), а безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$ связан с напряжениями $\bar{\sigma}_{ij}$ зависимостями (2.14) – (2.16). Полученную систему можно упростить, исключив переменные $\bar{u}(x_k, 0)$, $\bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n)$. Для этого представим уравнения (3.2) в виде

$$\bar{u}(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik}^{-1} \left[\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_k, 0) \right] \quad (i=1, \dots, N), \quad (3.15)$$

где I_{ik}^{-1} – матрица, обратная к I_{ik} , и воспользуемся представлением

$$\bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r \left(i, \frac{1}{2}; k, n \right) - \bar{Q}_r \left(i, \frac{1}{2}; k, n \right) \right] \bar{g}_r(k, n), \quad (3.16)$$

вытекающем из (3.13), (3.14). Тогда из (3.4), (3.13), (3.15), (3.16) следует система нелинейных алгебраических уравнений относительно напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$

$$\bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) = -\bar{p}_0 T_{11}(x_i, y_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n) - E_r(i, j; k, n) \right] \bar{g}_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) = \bar{p}_0 [1 - T_{22}(x_i, y_j)] + \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n) - L_r(i, j; k, n)] g_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) = -\bar{p}_0 T_{12}(x_i, y_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{S}_r(i, j; k, n) - M_r(i, j; k, n)] g_r(k, n); \quad (r=1,2), \quad (3.17)$$

где обозначено

$$T_{11}(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1}; \quad T_{22}(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1};$$

$$T_{12}(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^N I_{ijk}^{(3)} I_{kn}^{-1};$$

$$E_r(i, j, k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \left[\bar{P}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) - \bar{Q}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) \right];$$

$$L_r(i, j, k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \left[\bar{P}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) - \bar{Q}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) \right];$$

$$M_r(i, j, k, n) = \sum_{p,q=1}^N I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} \left[\bar{P}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) - \bar{Q}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) \right]. \quad (3.18)$$

Следует отметить, что в уравнениях (3.17) суммирование распространяется только на область нелинейного деформирования материала, где $g_r(k, n) \neq 0$. При этом слагаемые $-\bar{p}_0 T_{11}(x_i, y_j)$, $\bar{p}_0 [1 - T_{22}(x_i, y_j)]$, $-\bar{p}_0 T_{12}(x_i, y_j)$ представляют собой решение линейной задачи для случая $\bar{\mu} = 1$.

§4. Анализ численных результатов.

В качестве конкретной задачи исследовано напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины для идеального упруго-пластического материала ($\mu' = 0$) с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Половина длины трещины разбивалась на $N = 200$ одинаковых частей при равномерном разбиении области D_1 с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, равными $2a = 1/N = 0,005$ в безразмерных координатах. Это приводит к решению системы 200 линейных уравнений относительно 200 неизвестных в случае линейной задачи, которое определяется выражением (3.15) при $\bar{\sigma}_{22}^*(x_k, 0) = 0$.

В случае нелинейной задачи заданный шаг равномерного разбиения ставит определенное ограничение на нижнее значение действующей нагрузки \bar{p}_0 с тем, чтобы область нелинейного деформирования содержала достаточное число ячеек разбиения, так как всегда найдется настолько малая нагрузка \bar{p}_0 , что центр первой ячейки в вершине трещины окажется вне области нелинейности. Верхнее значение нагрузки \bar{p}_0 может быть произвольным в интервале $0 < \bar{p}_0 < 1$, необходимо лишь принять достаточное число ячеек, покрывающих область нелинейности.

В рассматриваемой задаче нагрузка задавалась в интервале $0,3 \leq \bar{p}_0 \leq 0,5$. Для покрытия области нелинейного деформирования принято 30×24 квадратных ячеек. В результате задача сведена к решению системы 2160 нелинейных алгебраических урав-

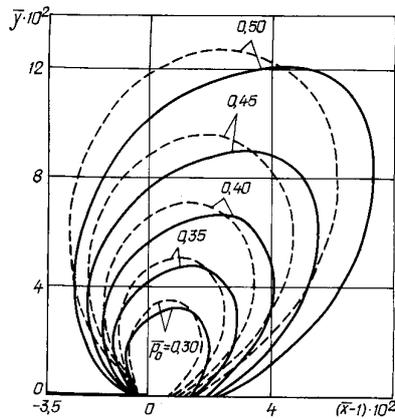


Рис. 1

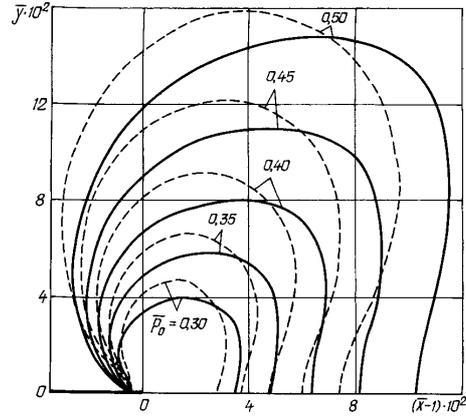


Рис. 2

нений (3.17) относительно 2160 неизвестных $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$. Решение системы нелинейных уравнений строилось на языке программы Mathcad [2] с применением вычислительного блока Given/Find. При этом нулевым приближением служило решение соответствующей линейной задачи, т.е. первые слагаемые правой части нелинейной системы уравнений (3.17).

На рис. 1, 2 сплошными линиями приведены зоны пластических деформаций, именуемые также зонами предразрушения, соответственно, для плоского деформированного и плоского напряженного состояний для растягивающих нагрузок $\bar{p}_0 = p_0/k$, принимающих значения 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5. Штриховыми линиями обозначены зоны, в которых по линейно-упругому решению превзойден предел текучести. Как видим, в случае плоского напряженного состояния размеры зон пластичности по обеим осям превосходят соответствующие размеры при плоском деформированном состоянии. Узкие пластические зоны, наблюдающиеся в экспериментах с тонкими пластинами из мягкой стали [1], свидетельствуют об образовании шейки.

Следует также отметить, что отношение поперечных размеров зон пластичности к продольным размерам имеют порядок 0,7 – 0,8 для плоского деформированного состояния и 0,8 – 1,0 – для плоского напряженного состояния, причем в зоне пластичности имеет место неоднородное сложное напряженное состояние. Это свидетельствует о том, что абсолютно нет оснований моделировать зоны пластичности полосами нулевого поперечного размера или трещинами-разрезами [12, 13, 17] с неопределенными длиной и наклоном, к берегам которых приложена простая нагрузка, соответствующая пределу текучести. Очевидно, что такая упрощенная модель не имеет ничего общего с реальным напряженным состоянием.

На рис. 3, 4 сплошными линиями представлены кривые зависимостей нормальных

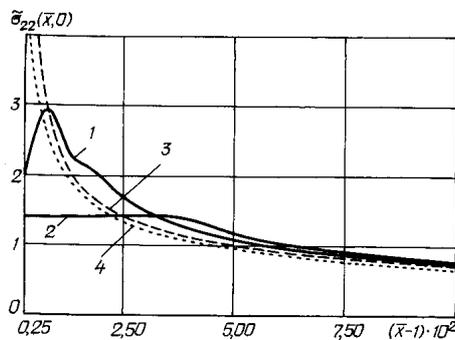


Рис. 3

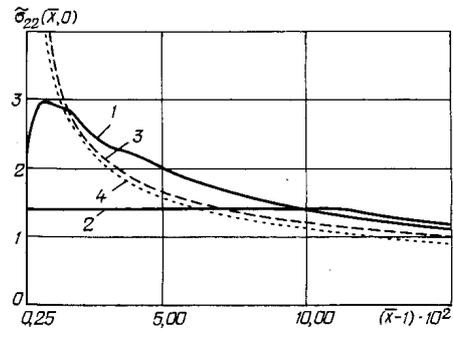


Рис. 4

напряжений $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = \frac{1}{k} \sigma_{22}(\bar{x}, 0)$ в окрестности трещины от расстояния $\bar{x} - 1$ до ее вершины, соответственно, для нагрузок $\bar{p}_0 = 0,3$ и $\bar{p}_0 = 0,5$. Кривые 1, 2 относятся, соответственно, к плоскому деформированному и плоскому напряженному состояниям. Здесь же приведены соответствующие зависимости для линейно-упругой задачи (штриховая кривая 3) и асимптотического приближения линейно-упругой задачи (пунктирная кривая 4). Как видим, действительные растягивающие напряжения $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ для идеального упруго-пластического материала в окрестности вершины трещины ограничены, что, естественно, должно быть для любой ограниченной по напряжению диаграммы деформирования. Максимальные напряжения $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ для нагрузок \bar{p}_0 в интервале 0,3 – 0,5 приближаются к значениям 3 – для плоского деформированного состояния и 1,4 – для плоского напряженного состояния. С увеличением расстояния от вершины трещины $\bar{x} - 1$ напряжения $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ приближаются к соответствующим значениям линейной задачи, равным \bar{p}_0 на бесконечности. В то же время асимптотическое приближение линейной задачи пересекается с реальной кривой распределения напряжений $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ лишь в одной точке, бесконечно удаляясь от нее в вершине трещины и стремясь к нулю на бесконечности. Отсюда можно сделать вывод, что для реальных диаграмм деформирования материалов асимптотическое распределение напряжений в окрестности вершины трещины с соответствующими коэффициентами интенсивности, являющимися мерой сингулярности [3], не имеет места. Поэтому экспериментальное определение критического значения коэффициента интенсивности напряжений лишено смысла, что подтверждается большими различиями между литературными данными о таких характеристиках для одного и того же материала [10].

Однако, в механике разрушения принято представление [3, 5], что за пластической зоной возле вершины трещины, составляющей даже 20 % длины трещины, поле напряжений определяется асимптотическими формулами. Проведенные вычисления показывают, что это не соответствует действительности. Так, например, при нагрузке $\bar{p}_0 = 0,3$ в случае плоского деформированного состояния пластическая зона по оси \bar{x} составляет 1,5% полудлины трещины, а минимальное отличие действительных напряжений $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ от асимптотики линейно-упругой задачи наблюдается в интервале $0,1125 \leq \bar{x} - 1 \leq 0,1625$ и равно 0,073, что составляет 14%. В случае плоского напряженного состояния пластическая зона составляет 3,5% полудлины трещины, а минимальное отличие $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ от асимптотики линейно-упругой задачи имеет место в интервале $0,1675 \leq \bar{x} - 1 \leq 0,1875$ и равно 0,083, что составляет 17%. По отношению к полному решению линейно-упругой задачи действительные напряжения $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ отличаются в этих же интервалах, соответственно, на величины 0,01 – 0,019 (до 3 %) и 0,015 – 0,018 (до 3%). При нагрузке $\bar{p}_0 = 0,5$ протяженности пластических зон по оси \bar{x} составляют 2,5 % и 10,25% полудлины трещины, соответственно, для плоских деформированного и напряженного состояний, а минимальные отличия действительных напряжений $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ от асимптотики линейно-упругой задачи, имеющие место соответственно в интервалах $0,2525 \leq \bar{x} - 1 \leq 0,2975$ и $0,3175 \leq \bar{x} - 1 \leq 0,3625$, равны 0,165 и 0,181, составляя 25% и 30%. Отличие действительных напряжений $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ от полных решений линейно-упругой задачи в этих же интервалах составляет соответственно 0,027 – 0,037 (до 4%) и 0,031 – 0,039 (до 5%).

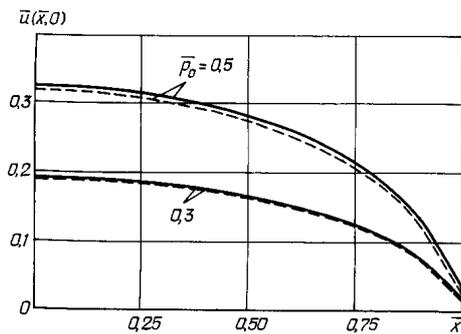


Рис. 5

Как видим, действительные напряжения существенно отличаются от асимптотики линейно-упругой задачи и достаточно близки к полным решениям линейно-упругой задачи вне пластической зоны. Однако оба приближения не могут составить основу критерия развития трещины, так как действительные напряжения у вершины трещины ограничены для идеального упруго-пластического материала. Поэтому критическое состояние трещины необходимо связывать с предельными значениями деформационных параметров.

На рис. 5 сплошными линиями представлены кривые перемещения берега трещины $\bar{u}(\bar{x}, 0)$ на ее полудлине при плоском деформированном состоянии для значений нагрузок $\bar{p}_0 = 0,3$ и $\bar{p}_0 = 0,5$. Штриховыми линиями представлены соответствующие перемещения для линейно-упругой задачи. Различие между ними растет от 0,5% до 24% при изменении \bar{x} от нуля до 0,9975 для $\bar{p}_0 = 0,3$ и от 1,6% до 43% – для $\bar{p}_0 = 0,5$. Визуально кривые перемещения берега трещины для нелинейной и линейной задач практически совпадают и обнаружить по ним существование тупиковой части трещины, принимаемой в КРТ – критерии [3], невозможно, что ставит под вопрос применимость этого термина при моделировании трещины разрезом нулевой ширины. Однако здесь, в отличие от распределения напряжений в окрестности вершины трещины, наблюдается монотонная зависимость раскрытия трещины от нагрузки \bar{p}_0 и сильное влияние на нее нелинейности у вершины трещины.

Это дает основание связать критерий развития трещины с предельной величиной раскрытия трещины на некотором малом расстоянии (в единицах длины трещины) от ее вершины.

На рис. 6, 7 сплошными линиями представлены кривые зависимостей от расстояния $\bar{x}-1$ до вершины трещины соответственно растягивающих деформаций $\bar{\epsilon}_{22}(\bar{x}, 0) = \frac{2\mu_0}{k} \epsilon_{22}(\bar{x}, 0)$ и инварианта девиатора деформаций $\bar{J}_e(\bar{x}, 0) = \frac{2\mu_0}{k} J_e(\bar{x}, 0) = J_\sigma(\bar{x}, 0)$ для плоского деформированного состояния при нагрузках $\bar{p}_0 = 0,3$ и $\bar{p}_0 = 0,5$. Штриховыми линиями приведены аналогичные кривые для линейно-упругой задачи. В отличие от напряжений деформации в нелинейной задаче имеют сингулярный характер в вершине трещины, существенно превышая соответствующие деформации задачи в линейно-упругой постановке. Если в линейно-упругой задаче напря-

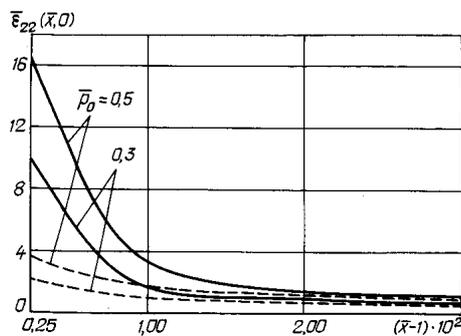


Рис. 6

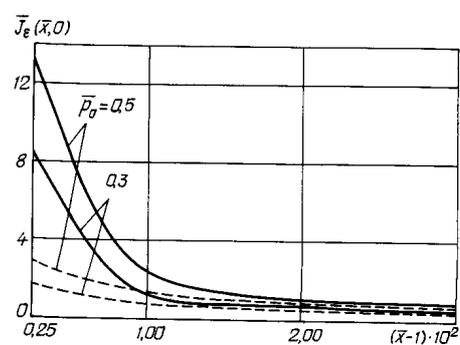


Рис. 7

жения и деформации в вершине трещины имеют интегрируемую корневую особенность, то в рассматриваемой нелинейной задаче степень особенности больше единицы, т.е. она неинтегрируемая.

Очевидно, что сингулярность деформаций в вершине трещины при идеальном упругопластическом деформировании материала обусловлена идеализированной моделью трещины, базирующейся на представлении о ее нулевой ширине. Так как реальная трещина в материале имеет конечную ширину, в идеальном варианте не меньшую двух межатомных расстояний, и база измерения деформаций существенно превосходит межатомные расстояния, то в эксперименте обнаружить сингулярность невозможно. Подтверждением этому может служить ограниченность деформаций в вершине трещины, определяемых экспериментально даже самыми точными голографическими методами [4]. В то же время на участке ускоренного возрастания деформации при подходе к вершине трещины характер изменения экспериментально определяемой деформации [4] соответствует степени особенности больше единицы, как и на рис. 6.

Как видим, у вершины трещины проявляется сильная монотонная зависимость деформации $\bar{\varepsilon}_{22}(\bar{x}, 0)$ и инварианта $\bar{J}_\varepsilon(\bar{x}, 0)$ от нагрузки \bar{p}_0 . Поэтому в качестве критерия развития трещины можно принять предельное значение одного из этих параметров на некотором малом расстоянии (в единицах длины трещины) от ее вершины.

Выводы.

1. Сложившиеся в механике разрушения упрощенные подходы к установлению критериев развития трещины, обусловленные определенными трудностями постановочного и вычислительного характеров [3], ставят вопрос о степени их адекватности реальным процессам и точному решению задачи в строгой постановке. Адекватная математическая модель разрушения должна базироваться на точном решении задачи о напряженно-деформированном состоянии в вершине трещины для полной реальной диаграммы деформирования материала. Ввиду невозможности построения строгого аналитического решения такой задачи единственным осуществимым подходом является дискретизация исходных континуальных уравнений с целью их численного решения.

2. Плоская задача о растяжении тела с трещиной для материала с кусочно-линейной диаграммой деформирования на основе преобразования Фурье сводится к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая путем аппроксимации интегралов суммами и производных разностями представляется системой нелинейных алгебраических уравнений. В результате численного решения системы для идеального упруго-пластического материала исследованы зоны пластических деформаций, распределение напряжений и деформаций, а также перемещения берега трещины.

3. Установлены следующие закономерности.

Отношение поперечных размеров зон пластичности к продольным имеют порядок 0,7 – 0,8 для плоского деформированного состояния и 0,8 – 1,0 для плоского напряженного состояния, причем в зоне пластичности имеет место неоднородное сложное напряженное состояние. Это свидетельствует о том, что нет оснований моделировать зоны пластичности трещинами-разрезами с неопределенными длиной и наклоном, к берегам которых приложена простая нагрузка, соответствующая пределу текучести.

Действительные нормальные напряжения у вершины трещины ограничены и пересекаются с асимптотическим приближением линейной задачи лишь в одной точке. За пластической зоной минимальное различие между ними весьма значительное и превышает в 5 – 6 раз различие между действительными напряжениями и полным решением линейной задачи. Это свидетельствует о невозможности построения критерия развития трещины на основе асимптотического приближения линейно-упругой задачи.

В отличие от напряжений, ограниченных у вершины трещины, деформации в нелинейной задаче имеют сингулярный характер, существенно превышая соответствующие деформации в линейно-упругой задаче. При этом степень особенности больше единицы, в то время как в линейно-упругой задаче напряжения и деформации имеют интегрируемую корневую особенность.

Кривые перемещения берега трещины при приближении к ее вершине, а также деформации растяжения и второй инвариант девиатора деформаций извне трещины существенно зависят от нелинейности деформирования и проявляют сильную монотонную зависимость от нагрузки. Это дает основание связать критерий развития трещины с предельной величиной раскрытия трещины на некотором малом расстоянии (в единицах длины трещины) от ее вершины или с предельным значением деформации растяжения либо интенсивности деформаций на некотором малом расстоянии (в единицах длины трещины) при приближении извне к ее вершине.

РЕЗЮМЕ. Плоска задача про розтяг тіла з тріщиною при кусково-лінійній діаграмі деформування зведена методом Фур'є-перетворення до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. На основі чисельного розв'язання системи для плоских деформівного і напруженого станів ідеального пружно-пластичного матеріалу досліджено зони пластичних деформацій, розподіл напружень і деформацій, переміщення берега тріщини.

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
2. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ – Петербург, 2007. – 704 с.
3. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук.думка, 1988. – 487 с. – (Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах; Т.1).
4. Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
5. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
6. Писаренко Г.С., Науменко В.П., Неделчев Н.И. Характеристика трещиностойкости хрупкого материала. Что это такое? // Пробл. Прочности. – 1985. – № 11. – С. 17 – 24.
7. Снеддон И.Н., Бери Д.С. Классическая теория упругости. – М.: Гос. Изд-во физ.-матем. литературы, 1961. – 219 с.
8. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
9. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. – 1920. – A 221. – P. 163 – 198.
10. Hoysou S.F., Sinclair G.B. On the variability of fracture toughness // Int. J. of Fract. – 1993. – **60**. – P. 43 – 49.
11. Irwin G.P. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. of Appl. Mech., 1957. – **24**, N 4. – P. 361 – 364.
12. Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A. Inicial Kinking of an Interface Crack between Two Elastic Media under Tension and Shear // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 6. – P. 635 – 542.
13. Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A. Model of the Fracture Process Zone at the Tip of a Crack Reaching the Nonsmooth Interface between Elastic Media // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1084 – 1092.
14. Khoroshun L.P. On the Correctness of the Energy Criterion in Fracture Mechanics // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 10. – P. 799 – 805.
15. Khoroshun L.P. Construction of Continuum-Mechanics Equations on the Basis of the Lenard-Jones Potential // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 7. – P. 521 – 532.
16. Khoroshun L.P. Integral Relations in the Vicinity of a Crack Tip // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 8. – P. 601 – 607.
17. Kipnis L.A., Polishchuk T.V. Analysis of the Plastic Zone at the Corner Point of Interface // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 159 – 168.
18. Liu S., Chao Y.I. Variation of fracture toughness with constraint // Int. J. of Fract. – 2003. – **124**. – P. 113 – 117.
19. Orowan E.O. Fundamentals of brittle behavior of metals. In: Fatigue and fracture of metals. – Wiley, New York, 1950. – P. 139 – 167.
20. Sinclair G.B. Some inherently unreliable practices in present day fracture mechanics // Int. J. of Fract. – 1985. – **28**. – P. 3 – 16.

Поступила 29.12.2009

Утверждена в печать 21.10.2010