

А. Я. Григоренко¹, И. А. Лоза²

О СВОБОДНЫХ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛЫХ
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ
С РАДИАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

²Национальный транспортный университет,
ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: dukeigor@mail.ru.

Abstract. A problem on natural non-axisymmetrical vibrations of hollow piezoceramic cylinders with radial polarization is considered. To solve this problem, the effective numerical-analytical method is proposed. The initial three-dimensional problem of the theory of electroelasticity is reduced to the two-dimensional one by use of representation of vector displacement components in the form of standing waves in the circumferential direction. Using the method of spline-collocations in the direction of axial coordinate, the two-dimensional problem in hand is reduced to the boundary value problem in direction of radial coordinate. The last problem is solved by the stable method of discrete orthogonalization together with the step-by-step method. The results of numerical analysis of frequencies of natural vibrations in the wide range of changing the geometrical characteristics of piezoceramic cylinders are given.

Key words: natural vibrations, three-dimensional problem of the theory of electroelasticity, hollow piezoceramic cylinder, spline-collocation.

Введение.

Пьезокерамические активные элементы цилиндрической формы являются одними из наиболее распространенных в акустоэлектронике. Поэтому важное значение имеет исследование динамических процессов, происходящих в пьезокерамических цилиндрах. Решение динамических задач для толстостенных элементов как пространственных задач теории упругости связано со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных, а также необходимостью удовлетворять краевым условиям на ограничивающих тело поверхностях. Эти трудности существенно возрастают в условиях связанности полей и анизотропии пьезоэлектрических материалов. Несмотря на большое количество публикаций, посвященных этому вопросу в научной литературе, известны лишь отдельные работы о колебаниях пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [4 – 6, 11, 12]. Как показано в работах [7 – 10], для исследования механического поведения пластин и оболочек различной структуры с успехом может применяться метод, основанный на сплайн-аппроксимации функций. В работах [1 – 3] получил дальнейшее развитие этот метод для решения задач об осесимметричных продольных и крутильных колебаниях пьезокерамических цилиндров. Целью данной работы является решение более общей задачи о неосесимметричных колебаниях пьезокерамических цилиндров, частным случаем которой являются описанные выше осесимметричные задачи.

1. Постановка задачи.

В настоящей работе исследуем спектр собственных неосесимметричных колебаний полого пьезокерамического цилиндра с радиальным направлением поляризации пьезокерамики. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. На торцах цилиндра рассматриваются условия жесткой закреплениия.

Представим полную систему уравнений, описывающих данную задачу. Уравнения гармонических колебаний в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

соотношения Коши:

$$\begin{aligned} s_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad s_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad s_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2s_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}; \\ 2s_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad 2s_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

В равенствах (1) – (3) приняты обозначения: σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала; ω – круговая частота; u_i – компоненты вектора перемещений; D_i – компоненты вектора электрической индукции; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; φ – электростатический потенциал; s_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = c_{33}s_{rr} + c_{13}s_{\theta\theta} + c_{13}s_{zz} - e_{33}E_z; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}s_{rr} + c_{11}s_{\theta\theta} + c_{12}s_{zz} - e_{31}E_z; \\ \sigma_{zz} = c_{13}s_{rr} + c_{12}s_{\theta\theta} + c_{11}s_{zz} - e_{31}E_z; \quad \sigma_{\theta z} = 2c_{66}s_{\theta z}; \\ \sigma_{rz} = 2c_{55}s_{rz} - e_{15}E_z; \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{55}s_{r\theta} - e_{15}E_\theta; \end{aligned} \quad (4)$$

$$D_r = e_{33}s_{rr} + e_{13}s_{\theta\theta} + e_{13}s_{zz} + \varepsilon_{33}E_z; \quad D_\theta = 2e_{15}s_{r\theta} + \varepsilon_{11}E_\theta; \quad D_z = 2e_{15}s_{rz} + \varepsilon_{11}E_z,$$

где c_{ij} – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R \pm h$) задаются следующие:

поверхности свободны от внешних усилий ($\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$) и либо покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$, либо неэлектродированы: ($D_r = 0$);

торцы цилиндра (при $z = \pm L/2$) свободны от электродов ($D_z = 0$) и жестко зашпелены ($u_r = u_\theta = u_z = 0$).

Здесь введены обозначения: R_0 – радиус срединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра; L – его длина.

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнения (1) и (2) и разрешив их относительно $\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ &+ \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\Delta_9}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} \right) u_\theta - \\ &- \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}; \quad (5) \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} u_z - \\ &- \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \\ &- \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta = \tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{33} + \tilde{e}_{33}^2; \quad \Delta_1 = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15} - \tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{33}; \quad \Delta_2 = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15} - (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}) \tilde{\epsilon}_{33};$$

$$\Delta_3 = \tilde{c}_{33} (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) - (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{\epsilon}_{33}; \quad \Delta_4 = (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}) \tilde{\epsilon}_{33} + \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13};$$

$$\Delta_5 = \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{15} \tilde{\epsilon}_{33}; \quad \Delta_6 = \tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{\epsilon}_{33};$$

$$\Delta_7 = (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}) \tilde{\epsilon}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{\epsilon}_{33}; \quad \Delta_8 = (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{\epsilon}_{33} + (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) \tilde{\epsilon}_{33}; \quad \Delta_9 = (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}) \tilde{\epsilon}_{33} - \tilde{e}_{13} \tilde{\epsilon}_{33};$$

$$\Delta_{10} = \tilde{e}_{33} \tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{15} \tilde{\epsilon}_{33}, \quad (6)$$

а также безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \quad (7)$$

где $\lambda = 10^{10}$ Па; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

2. Метод решения.

Для решения данной трехмерной задачи предлагается эффективный численно-аналитический подход. Используя замкнутость цилиндра в окружном направлении, представим компоненты вектора смещения в виде стоячих волн по окружной координате. Полученная двумерная система дифференциальных уравнений в частных производных после применения метода сплайн-коллокаций по продольной координате сводится к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях, которая решается с использованием метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Для компонент вектора смещения и электростатического потенциала имеем:

$$u_r = hu_1(r, z) \cos m\theta;$$

$$u_\theta = hu_2(r, z) \sin m\theta; \quad u_z = hu_3(r, z) \cos m\theta; \quad \varphi = h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} u_4(r, z) \cos m\theta. \quad (8)$$

Подставляя значения компонент вектора перемещений и электростатического потенциала из (8) в систему уравнений (5), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11} \tilde{\varepsilon}_{33} + m^2 \Delta_6}{r^2} - \tilde{\varepsilon}_{33} \Omega^2 \right) u_1 - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{m}{r^2} u_2 + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \\ &+ \frac{\Delta_9}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial z} - \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{m^2}{r^2} u_4 + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + \frac{\tilde{e}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_4}{\partial r}; \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r^2} u_1 + \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{55} + m^2 \tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}} u_2 - \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \\ &+ \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r^2} u_4 + \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_4}{\partial r}; \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{r} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \\ &+ \left(\frac{m^2 \tilde{c}_{66}}{r^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}} u_3 - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_4}{\partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_4}{\partial r \partial z}; \\ \frac{\partial^2 u_4}{\partial r^2} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{11} \tilde{\varepsilon}_{33} + m^2 \Delta_1}{r^2} - \tilde{\varepsilon}_{33} \Omega^2 \right) u_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \\ &- \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{m}{r^2} u_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{m}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{m \Delta_3}{\Delta} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{m^2}{r^2} u_4 - \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_4}{\partial r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия на боковых поверхностях принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{13} \frac{1}{r} u_1 + \tilde{c}_{33} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \tilde{c}_{13} \frac{m}{r} u_2 + \tilde{c}_{13} \frac{\partial u_3}{\partial z} + \tilde{e}_{13} \frac{\partial u_4}{\partial z} &= 0; \\ -\tilde{c}_{55} \frac{m}{r} u_1 - \tilde{c}_{55} \frac{1}{r} u_2 + \tilde{c}_{55} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \tilde{e}_{15} \frac{m}{r} u_4 &= 0; \\ \tilde{c}_{55} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \tilde{c}_{55} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \tilde{e}_{15} \frac{\partial u_4}{\partial z} &= 0; u_3 = 0 \end{aligned}$$

в случае, когда боковые поверхности цилиндра покрыты бесконечно тонкими закороченными электродами. Если боковые поверхности цилиндра свободны от электродов, последнее из уравнений примет такой вид:

$$\tilde{e}_{13} \frac{1}{r} u_1 + \tilde{e}_{33} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \tilde{e}_{13} \frac{m}{r} u_2 + \tilde{e}_{13} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \tilde{e}_{13} \frac{\partial u_4}{\partial z} = 0.$$

На торцах цилиндра имеют место следующие граничные условия:

$$\text{шарнирное опирание: } \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0; \quad u_3 = 0; \quad \frac{\partial u_4}{\partial z} = 0;$$

$$\text{жесткое закрепление: } u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0; \quad \frac{\partial u_4}{\partial z} = 0.$$

Далее используя метод разделения переменных – функции $u_1(r, z)$, $u_2(r, z)$, $u_3(r, z)$, $u_4(r, z)$ определим:

$$\begin{aligned} u_1(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_1(x) \varphi_{1i}(z); \quad u_2(r, z) = \sum_{i=0}^N v_2(x) \varphi_{1i}(z); \\ u_3(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_3(x) \varphi_{2i}(z); \quad u_4(r, z) = \sum_{i=0}^N v_4(x) \varphi_{2i}(z), \end{aligned} \quad (10)$$

где $x = \frac{r-R}{h}$, v_k ($k = \overline{1,4}$) – искомые функции по переменной x ; $\varphi_{ij}(z)$ ($j = \overline{1,2}$; $i = \overline{0,1,\dots,N}$) – линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке Δ ; $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$. Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при $z = \pm L/2$, можно заметить, что в систему входят производные от компонент вектора решения не выше второго порядка; следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка

$$B_3^i = \begin{cases} 0; & -\infty < z < z_{i-2}; \\ \tilde{z}^3; & z_{i-2} \leq z < z_{i-1}; \\ -3\tilde{z}^3 + 3\tilde{z}^2 + 3\tilde{z} + 1; & z_{i-1} \leq z < z_i; \\ 3\tilde{z}^3 - 6\tilde{z}^2 + 4; & z_i \leq z < z_{i+1}; \\ (1 - \tilde{z})^3; & z_{i+1} \leq z < z_{i+2}; \\ 0; & z_{i+2} \leq z < \infty, \end{cases} \quad (11)$$

где $\tilde{z} = \frac{(z - z_k)}{h_z}$ на интервале $[z_k; z_{k+1}]$, $k = \overline{i-2, i+1}$; $i = \overline{-1, N+1}$;

$h_z = z_{k+1} - z_k = \text{const}$.

При этом функции φ_{ji} формируются таким образом:

а) если соответствующий компонент вектора решения равняется нулю при $z = \pm L/2$, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); \varphi_{j_1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z); \varphi_{j_i}(z) = B_3^i(z); \\ \varphi_{j_{N-1}}(z) &= B_3^{N-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \varphi_{j_N}(z) = -4B_3^{N+1}(z) + B_3^N(z); \\ &(i = \overline{2, N-2}); \end{aligned} \quad (12)$$

б) если производная по z от соответствующего компонента вектора решения равняется нулю при $z = \pm L/2$, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0}(z) &= B_3^0(z); \varphi_{j_1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z); \varphi_{j_i}(z) = B_3^i(z); \\ \varphi_{j_{N-1}}(z) &= B_3^{N-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \varphi_{j_N}(z) = B_3^N(z); \\ &(i = \overline{2, N-2}); \end{aligned} \quad (13)$$

в) если соответствующий компонент вектора решения равняется нулю при $z = -L/2$, а при $z = +L/2$ производная по z от соответствующего компонента вектора решения равняется нулю, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j_0}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); \varphi_{j_1}(z) = B_3^{-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^0(z) + B_3^1(z); \varphi_{j_i}(z) = B_3^i(z); \\ \varphi_{j_{N-1}}(z) &= B_3^{N-1}(z) - \frac{1}{2}B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \varphi_{j_N}(z) = B_3^N(z) \quad (i = \overline{2, N-2}). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим решение (10) в систему (9) и потребуем, чтобы уравнения удовлетворялись в заданных точках коллокаций $\xi_k \in [-L/2; L/2]$, $k = \overline{0, N}$. Рассмотрим случай, когда количество узлов сетки четное, т. е. $N = 2n + 1$ ($n \geq 3$) (учитывается z_0), в точках коллокаций они удовлетворяют условиям $\xi_{2i} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда на отрезке $[z_{2i}, z_{2i+1}]$ имеем по два узла коллокаций, а на соседних отрезках $[z_{2i+1}, z_{2i+2}]$ узлов коллокаций нет. На каждом из отрезков $[z_{2i+1}, z_{2i+2}]$ точки коллокаций выбираются следующим образом: $\xi_{2i} = z_{2i} + w_1 h_z$, $\xi_{2i+1} = z_{2i} + w_2 h_z$, ($i = \overline{1, n}$), где w_1 та w_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равняются: $w_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Та-

кой выбор точек коллокаций является оптимальным и существенно увеличивает порядок точности аппроксимации. Число точек коллокаций при этом – $\bar{N} = N + 1$. В результате получаем систему $8(N + 1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций v_i, \tilde{v}_i $i = \overline{1, 4}$.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_j &= [\varphi_{ji}(\xi_k)]; \quad v_n = [u_{n0}, u_{n1}, \dots, u_{nN}]^T; \\ \bar{a}_{kl}^T &= \{a_{kl}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{kl}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{kl}(x, \xi_N, \Omega^2)\}; \\ k, i &= \overline{0, N}; \quad j = 1, 2; \quad (k, l) \in \{(k, l) | k, l = \overline{1, 6}; n = \overline{1, 4}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

тогда приходим к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dx} &= \tilde{v}_i \quad (i = \overline{1, 4}); \\ \frac{d\tilde{v}_1}{dx} &= \Phi_1^{-1} [(a_{18}\Phi_1 + a_{19}\Phi_1'')v_4 + \bar{a}_{110}\Phi_1\tilde{v}_4]; \\ \frac{d\tilde{v}_2}{dx} &= \Phi_2^{-1} [a_{21}\Phi_1v_1 + a_{22}\Phi_1\tilde{v}_1 + (a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2'')v_2 + \\ &+ a_{25}\Phi_2\tilde{v}_2 + a_{26}\Phi_1'v_3 + a_{27}\Phi_1v_4 + a_{28}\Phi_1\tilde{v}_4]; \\ \frac{d\tilde{v}_3}{dx} &= \Phi_1^{-1} \times \\ &\times [a_{31}\Phi_1'v_1 + a_{32}\Phi_1'\tilde{v}_1 + a_{33}\Phi_2'v_2 + (a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1'')v_3 + a_{36}\Phi_1\tilde{v}_3 + a_{37}\Phi_1'v_4 + a_{38}\Phi_1'\tilde{v}_4]; \\ \frac{d\tilde{v}_4}{dx} &= \Phi_1^{-1} (a_{41}\Phi_1 + a_{42}\Phi_1'')v_1 + a_{43}\Phi_2\tilde{v}_1 + a_{44}\Phi_2v_2 + a_{45}\Phi_2\tilde{v}_2 + \\ &+ a_{46}\Phi_1'v_3 + a_{47}\Phi_1\tilde{v}_3 + (a_{48}\Phi_1 + a_{49}\Phi_1'')v_4 + a_{410}\Phi_1\tilde{v}_4], \end{aligned} \quad (16)$$

где принято:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{m^2\Delta_6 + \tilde{c}_{11}\tilde{\epsilon}_{33}}{x^2} - \tilde{\epsilon}_{33}\Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}; \quad a_{12} = -\frac{\Delta_6}{\Delta}; \quad a_{13} = -\left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}_{13}\tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{x}; \\ a_{14} &= \frac{m\Delta_7}{x^2\Delta}; \quad a_{15} = \frac{m\Delta_8}{x\Delta}; \quad a_{16} = \frac{\Delta_9}{x\Delta}; \quad a_{17} = \frac{\Delta_8}{\Delta}; \quad a_{18} = -\frac{m^2\Delta_{10}}{x^2\Delta}; \\ a_{19} &= \frac{\Delta_{10}}{\Delta}; \quad a_{110} = \frac{\tilde{\epsilon}_{13}\tilde{\epsilon}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}; \\ a_{21} &= \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x^2}; \quad a_{22} = \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x}; \quad a_{23} = \left(\frac{m^2\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; \quad a_{24} = -\frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{25} &= -\frac{1}{x}; \quad a_{26} = \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x}; \quad a_{27} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x^2}; \quad a_{28} = \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x}; \\
a_{31} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}; \quad a_{32} = -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{33} = -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x}; \\
a_{34} &= \left(\frac{m^2 \tilde{c}_{66}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; \quad a_{35} = -\frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}}; \quad a_{36} = -\frac{1}{x}; \quad a_{37} = -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}; \quad a_{38} = -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}; \\
a_{41} &= \left(\frac{\tilde{c}_{11} \tilde{e}_{33} - m^2 \Delta_1}{x^2} - \tilde{e}_{33} \Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}; \quad a_{42} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad a_{43} = \frac{\tilde{e}_{33} \tilde{c}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}; \quad a_{44} = -\frac{m \Delta_2}{x^2 \Delta}; \quad a_{45} = \frac{m \Delta_3}{x \Delta}; \\
a_{46} &= \frac{\Delta_4}{x \Delta}; \quad a_{47} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad a_{48} = \frac{m^2 \Delta_5}{x^2 \Delta}; \quad a_{49} = -\frac{\Delta_5}{\Delta}; \quad a_{410} = \left(\frac{\tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Эту систему можно привести к виду

$$\frac{d\bar{R}}{dx} = A(x, \Omega) \bar{R}, \quad (17)$$

где вектор $\bar{R} = \{v_1, \tilde{v}_1, v_2, \tilde{v}_2, v_3, \tilde{v}_3, v_4, \tilde{v}_4\}$, а ненулевые элементы матрицы A равны:

$$\begin{aligned}
A_{12} &= 1; \quad A_{21} = \Phi_1^{-1} (a_{11} \Phi_1 + a_{12} \Phi_1''); \quad A_{22} = \Phi_1^{-1} a_{13} \Phi_1; \\
A_{23} &= \Phi_1^{-1} a_{14} \Phi_2; \quad A_{24} = \Phi_1^{-1} a_{15} \Phi_2; \quad A_{25} = \Phi_1^{-1} a_{16} \Phi_1'; \\
A_{26} &= \Phi_1^{-1} a_{17} \Phi_1'; \quad A_{27} = \Phi_1^{-1} (a_{18} \Phi_1 + a_{19} \Phi_1''); \quad A_{28} = \Phi_1^{-1} a_{110} \Phi_1; \\
A_{34} &= 1; \quad A_{41} = \Phi_2^{-1} a_{21} \Phi_1; \quad A_{42} = \Phi_2^{-1} a_{22} \Phi_1; \\
A_{43} &= \Phi_2^{-1} (a_{23} \Phi_2 + a_{24} \Phi_2''); \quad A_{44} = \Phi_2^{-1} a_{23} \Phi_2'; \\
A_{45} &= \Phi_2^{-1} a_{26} \Phi_1'; \quad A_{47} = \Phi_2^{-1} a_{27} \Phi_1; \quad A_{48} = \Phi_2^{-1} a_{28} \Phi_1; \quad A_{56} = 1; \\
A_{61} &= \Phi_1^{-1} a_{31} \Phi_1'; \quad A_{62} = \Phi_1^{-1} a_{32} \Phi_1'; \quad A_{63} = \Phi_1^{-1} a_{33} \Phi_2'; \\
A_{65} &= \Phi_1^{-1} (a_{34} \Phi_1 + a_{35} \Phi_1''); \quad A_{66} = \Phi_1^{-1} a_{36} \Phi_1; \\
A_{67} &= \Phi_1^{-1} a_{37} \Phi_1'; \quad A_{68} = \Phi_1^{-1} a_{38} \Phi_1'; \quad A_{78} = 1; \\
A_{81} &= \Phi_1^{-1} (a_{41} \Phi_2 + a_{42} \Phi_2''); \quad A_{82} = \Phi_1^{-1} a_{43} \Phi_1; \quad A_{83} = \Phi_1^{-1} a_{44} \Phi_2; \\
A_{84} &= \Phi_2^{-1} a_{45} \Phi_2; \quad A_{85} = \Phi_1^{-1} a_{46} \Phi_1'; \quad A_{86} = \Phi_1^{-1} a_{47} \Phi_1'; \\
A_{87} &= \Phi_1^{-1} (a_{48} \Phi_1 + a_{49} \Phi_1''); \quad A_{88} = \Phi_1^{-1} a_{410} \Phi_1.
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид: $B_1 \bar{R}(-1) = 0$, $B_2 \bar{R}(1) = 0$. Здесь ненулевые элементы матриц B_1 и B_2 будут равны:

$$b_{11} = \tilde{c}_{13} \frac{1}{x} \Phi_1; \quad b_{12} = \tilde{c}_{33} \Phi_1; \quad b_{13} = \tilde{c}_{13} \frac{m}{x} \Phi_1; \quad b_{15} = \tilde{c}_{13} \Phi_2'; \quad b_{18} = \tilde{e}_{33} \Phi_1; \quad b_{21} = -\tilde{c}_{55} \frac{m}{x} \Phi_1;$$

$$b_{23} = -\tilde{c}_{55} \frac{1}{x} \Phi_1; \quad b_{24} = \tilde{c}_{55} \Phi_1; \quad b_{28} = \tilde{e}_{15} \frac{1}{x} \Phi_1; \quad b_{31} = \tilde{c}_{55} \Phi_1';$$

$$b_{36} = \tilde{c}_{55} \Phi_2; \quad b_{37} = \tilde{e}_{15} \Phi_1'; \quad b_{47} = \Phi_1$$

для случая, когда торцы цилиндра покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами; если же торцы цилиндра неэлектродированы, то последняя строка матрицы будет иметь такой вид:

$$b_{41} = \tilde{e}_{15} \Phi_1'; \quad b_{46} = \tilde{e}_{15} \Phi_2; \quad b_{47} = -\tilde{e}_{11} \Phi_1'.$$

3. Анализ результатов.

Представим результаты численного анализа решений конкретных задач. В качестве материала цилиндра принята пьезокерамика PZT 4. На рис. 1 показана зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра L/h ($R_+ = 5; R_- = 3$). Здесь R_+ – внешний радиус цилиндра, R_- – внутренний. Сплошными линиями показано изменение значений первых пяти собственных частот (Ω) в зависимости от изменения безразмерной длины цилиндра (L/h) с учетом пьезоэффекта, пунктирными – без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Из приведенных результатов видно, что влияние пьезоэффекта приводит к «ужесточению» материала, т. е. к повышению значения собственных частот. В этом случае при определении первой и второй собственных частот влиянием пьезоэффекта можно пренебречь для всех длин цилиндрических оболочек, вплоть до относительной длины ($L \geq 5$). Для более высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров.

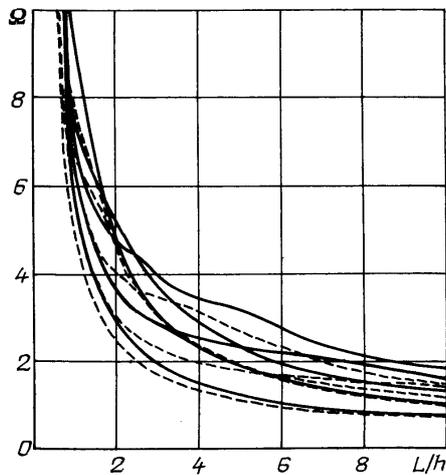


Рис. 1

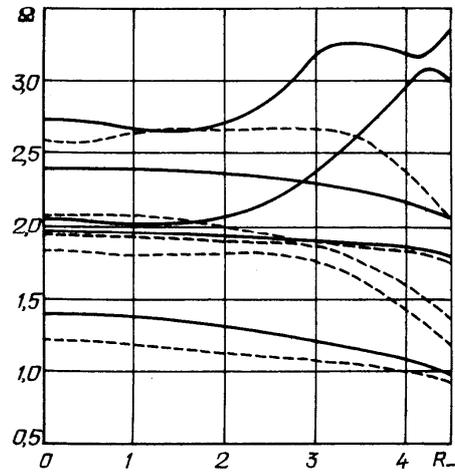


Рис. 2

На рис. 2 представлены графики зависимостей первых пяти собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра (R_-), при этом длина цилиндра ($L = 5$) и внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными. Анализ приведенных результатов показывает, что влияние пьезоэффекта является довольно существенным во всем рассматриваемом диапазоне. Наименьшее его влияние заметно лишь для первой собственной частоты. Для более высоких частот наблюдается существенная перестройка спектра собственных частот колебаний.

На рис. 3 показана зависимость первых шести частот собственных колебаний от числа m полуволн в окружном направлении. Хотя промежуточные значения собственных частот между целыми значениями числа полуволн не имеют физического смысла, они соединены линией для большей наглядности зависимости. Сплошной линией соединены значения частот собственных колебаний для случая пьезокерамического цилиндра, пунктирной – для случая упругого цилиндра ($e_{ij} = 0$). Из представленных данных можно заметить, что наименьшее влияние пьезоэффект оказывает на первые две частоты для малых значений m . С ростом числа полуволн в окружном направлении наблюдается усиление влияния пьезоэффекта на спектр собственных частот.

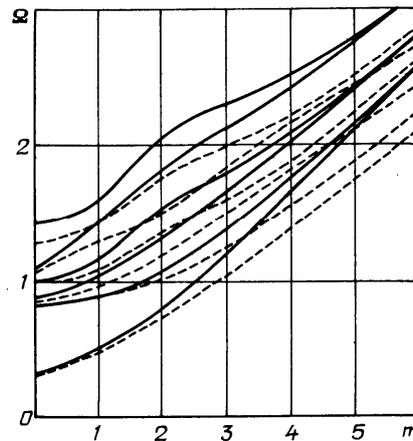


Рис. 3

4. Заключение.

В данной работе предложен эффективный численно-аналитический подход для исследования свободных колебаний пьезокерамических цилиндров с различной поляризацией в пространственной постановке. Трехмерная задача теории электроупругости для тел цилиндрической формы в частных производных сводится к двумерной путем представления компонент вектора перемещений и электростатического потенциала в виде стоячих волн в окружном направлении. Применение метода сплайн-коллокации по осевой координате дает возможность перейти от двумерной к краевой задаче на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Были проведены расчеты по предложенной методике в случае радиальной поляризации для конкретного пьезоэлектрического материала. Показано влияние пьезоэффекта на характер распределения динамических характеристик для различных геометрических параметров цилиндра.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто тривимірну задачу про власні неосесиметричні коливання порожнистих п'єзокерамічних циліндрів з осовою поляризацією. Запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод для розв'язання крайових задач. Початкова тривимірна задача теорії електропружності в частинних похідних зводиться до двовимірної шляхом представлення компонент вектора переміщень у вигляді стоячих хвиль в коловому напрямі. Використовуючи метод сплайн-колокацій в напрямку осової координати, вказана двовимірна задача зведена до крайової задачі на власні значення в напрямку радіальної координати, яка розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку. Наведені результати чисельного аналізу частот власних коливань в широкому діапазоні зміни геометричних характеристик п'єзокерамічних циліндрів.

1. Григоренко О.Я., Єфімова Т.Л., Лоза І.А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 112 – 119.
2. Григоренко О.Я., Єфімова Т.Л., Лоза І.А. Применение сплайн-аппроксимации и метода дискретной ортогонализации для решения задач о свободных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – 44. – С. 133 – 137.
3. Григоренко О.Я., Єфімова Т.Л., Лоза І.А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины // Доп. НАН України. – 2009. – № 6. – С. 61 – 67.

4. Лазуткин В.Н., Михайлов А.И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – **22**, № 3. – С. 393 – 399.
5. Шульга Н.А., Борисенко Л.В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1990. – **25**, № 10. – С. 41 – 47.
6. Шульга Н.А., Борисенко Л.В. Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями боковыми поверхностям // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 1. – С. 43 – 47
7. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Free Axisymmetric Vibrations of Solid Cylinders: Numerical Problem Solving // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 499 – 508.
8. Grigorenko A.Ya., Maltsev S.A. On Natural Vibrations on Thin Conical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11. – P. 1152 – 1163.
9. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu. Free Vibrations of Shallow Non Thin Shells with Variable Thickness and Rectangular Planform // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 7. – P. 776 – 789.
10. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko A.Yu. Free Vibrations of Shallow Rectangular in Plane Non-Thin Orthotropic Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 8. – P. 834 – 846.
11. Hussein M., Heyliger P.R. Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders // J. Sound and Vibr., Volume May. – 1996. – **192**, N 5. – P. 995 – 1013.
12. Kharouf N., Heyliger P.R. Axisymmetric Free Vibrations of Homogeneous and Laminated Piezoelectric Cylinders // J. Sound and Vibr. – 1994. – **174**. – N 4. – P. 539 – 561.

Поступила 25.11.2009

Утверждена в печать 15.06.2010