

Н. В. Никитина

## О СЛОЖНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В СИСТЕМАХ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Несетерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The principle of skew-symmetry is formulated. It describes the closed orbits of limiting cycles and the quasi-periodic trajectories of stable vibrations. The conditions of attraction of synchronized limiting cycle in the whole are listed. A bifurcational phase picture of synchronized limiting cycle is considered. It is shown that the subharmonic capture of limiting cycle with the multiple increasing the period includes the skew loss and saving the attraction.

**Key words:** skew-symmetry, limiting cycle, subharmonic capture, bifurcation.

### Введение.

Известный осциллятор Ван дер Поля в широкой области параметров приведен в [4] в качестве генератора шума. Открытие стохастических автоколебаний является наиболее ярким достоянием современной теории.

В работе обсуждается описание сложных колебаний предельных циклов, которое не имеет общего с описанием хаоса. Обращение к задаче о колебаниях в системе при сильной нелинейности связано с определением границы, отделяющей на фазовой плоскости области аперiodических точек от периодических.

### 1. О замыкании траектории в диссипативной системе.

Установление существования замкнутых плоских кривых можно осуществить с помощью принципа симметрии, включая кососимметрию [3, 10]. Смысл принципа состоит в обнаружении оси симметрии (кососимметрии). Бифуркационные процессы, происходящие в определенной окрестности нуля, могут нарушить симметрию, но при этом сохраняется замыкание траектории. Такой случай относится, например, к процессу синхронизации предельного цикла на частоте возмущающей периодической силы. Аналитическим критерием замыкания является притяжение. Для плоской кривой

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \quad (1)$$

составим уравнение в вариациях

$$\frac{d\delta x_1}{dt} = \delta x_2; \quad \frac{d\delta x_2}{dt} = a(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\delta x_1 + b(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\delta x_2. \quad (2)$$

Здесь  $\delta x_j$  – малое отклонение от некоторого частного решения  $\bar{x}_j$  системы (1),  $\delta x_j = x_j - \bar{x}_j$ ,  $a(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ,  $b(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  – коэффициенты зависящие от частного решения  $\bar{x}_j$ .

Корни квазихарактеристического уравнения системы (2)  $\lambda^2 - \lambda b(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - a(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$  имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = b(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/2 \pm \sqrt{(b(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/2)^2 + a(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}. \quad (3)$$

Уравнения в вариациях (2) в общем виде  $d\delta x/dt = A(\bar{x})\delta x$ , где  $\bar{x}$  – частное решение, устойчивость которого следует исследовать, можно представить линейной системой с периодическими коэффициентами

$$dy/dt = A(t)y \quad (4)$$

с непрерывной (или кусочно непрерывной) на  $(+\infty - \infty)$  периодической матрицей  $A(t)$ :  $A(t+T) \equiv A(t)$ , где  $T$  – период решений. Притяжение замкнутой траектории имеет место, если [5, 8]

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{Sp} A(t) dt < 0. \quad (5)$$

Здесь сумма диагональных элементов матрицы равна сумме всех корней квазихарактеристического уравнения системы (2). Условие (5) соответствует определенному физическому качеству процесса, а именно, притяжению к траектории предельного цикла в целом. Периодическое воздействие может синхронизировать частоту предельного цикла на частоте возмущения, либо на кратных частотах. Неполный захват частоты происходит, вследствие неравномерного движения изображающей точки по траектории и бифуркационных процессов. Сложные движения можно определить как определенный этап развития движения в процессе самоорганизации системы. Колебания системы с периодическим воздействием можно представить в виде системы четвертого порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) + x_3; \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4; \quad \frac{dx_4}{dt} = -\omega^2 x_3, \quad (6)$$

принимая во внимание, что начальные возмущения второго осциллятора системы (6) имеют вид при  $t = 0$   $x_3 = x_{30}$ ,  $x_4 = 0$ . Система в вариациях, соответствующая системе (6), примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x_1}{dt} &= \delta x_2; \quad \frac{d\delta x_2}{dt} = a(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\delta x_1 + b(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\delta x_2 + \delta x_3; \\ \frac{d\delta x_3}{dt} &= \delta x_4; \quad \frac{d\delta x_4}{dt} = -\omega^2 \delta x_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Корни  $\lambda_{1,2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  квазихарактеристического уравнения системы (7)  $(\lambda^2 + \omega^2) \times (\lambda^2 - \lambda b(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - a(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) = 0$  определяются выражением (3), вторая пара корней –  $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ . Корни  $\lambda_{1,2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  квазихарактеристического уравнения зависят от частного решения  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ . Для возмущенного предельного цикла сложные движения возникают вследствие бифуркаций в фазовом пространстве.

Наиболее полно теория синхронизации развита в слабо нелинейных системах. Исследование возмущенного уравнения предельного цикла продолжается более 50 лет. Затруднения возникали в системе с сильной нелинейностью. С развитием вычислительной техники усилия исследователей перенесли в область получения результатов в виде диаграмм численного эксперимента. В этом случае можно присоединиться к мнению, что понимание динамического поведения не совсем полно [6, 7, 11 – 14] и предложить свой план исследования.

Увеличение положительного параметра  $\mu$  в уравнении Ван-дер-Поля

$$d^2 x / dt^2 + x = \mu(1 - x^2) dx / dt \quad (8)$$

связано с увеличением периода автономного осциллятора, порождающего предельный цикл. Эта особенность предельного цикла Ван-дер-Поля получила название

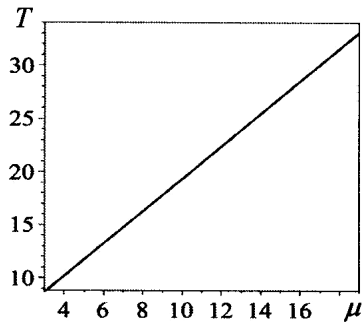


Рис. 1

«медленного дрейфа» либо «релаксационных колебаний». Объяснение природы дрейфа дано в статье [9]. Дрейф является физическим явлением. Объяснить его природу можно с помощью качественного анализа. Суть дрейфа состоит в том, что при большом значении параметра предельный цикл включает аperiодическую кривую, на которой угловая частота нелинейного осциллятора равна нулю. Движение сильно замедляется на этом участке, что приводит к увеличению периода. Увеличение периода  $T$  связано с параметром в виде диаграммы (рис. 1), построенной на основе численного эксперимента.

Что касается замыкания интегральной кривой, то «как известно, уравнение Ван-дер-Поля при любом  $\mu > 0$  имеет на фазовой плоскости  $(x, dx/dt)$  единственный предельный цикл, который является устойчивым. Этот математический факт адекватен экспериментально наблюдаемому физическому феномену ...» [2] Проблеме существования замкнутой траектории в диссипативной системе посвящены теоремы и принципы. Для большого значения параметра  $\mu$  можно применить принцип кососимметрии траектории. Уравнение (8) в виде системы второго порядка имеет вид

$$dx_1/dt = F_1(x_1, x_2); \quad dx_2/dt = F_2(x_1, x_2), \quad (9)$$

где  $x_1, x_2 \in R$  и  $F_1 \in C(R^2, R), F_2 \in C(R^2, R)$ , и  $F_i(0,0) = 0 (i = 1, 2)$ .

Принцип симметрии приведен как критерий существования периодических и квазипериодических движений в [15, 10, 11, 16]. Смысл принципа состоит в том, что если обнаружить ось симметрии, то всякая интегральная кривая слева (снизу) от оси является зеркальным отображением кривой справа (сверху) от оси. Принцип кососимметрии, который связан с кососимметрией векторного поля, определяемого системой (9), формулируется так [3]:

*в системе (9) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (9) связаны следующими условиями:*

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); \quad F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2). \quad (10)$$

Если, например, ось кососимметрии  $Ox_1$ , то область в первом квадранте  $U$  равна области в третьем квадранте. Область во втором квадранте  $V$  равна области в четвертом квадранте. Это означает, что кососимметрия связана с двумя осями координат. То есть, если ось  $Ox_1$  является осью кососимметрии, то ось  $Ox_2$  также является осью кососимметрии и тогда *в системе (9) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (9) связаны следующими условиями:*

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (11)$$

Уравнение (8) приведено к системе

$$dx_1/dt = x_2; \quad dx_2/dt = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2, \quad (12)$$

которая удовлетворяет условиям (10), (11). Таким образом, траектория уравнений (12) замкнута и имеет две оси кососимметрии.

Пусть складываются два движения. Каждое движение образует замкнутые траектории. Суммарное движение может описываться квазипериодической, либо периодической траекторией. Если движение осуществляется в малой окрестности нуля, то отсутствуют бифуркационные процессы. При сложении двух периодических движений, одно из которых имеет симметрию, другое – кососимметрию траектории требуется выполнение определенных условий.

Существование в системе

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (13)$$

где  $x(t) \in R^4$  – вектор состояния системы в момент  $t \in R$ ,  $F: R^4 \rightarrow R^4$ , квазипериодических движений определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, -x_2, -x_3, x_4) &= -F_1(-x_1, x_2, x_3, x_4); \\ F_2(-x_1, x_2, -x_3, x_4) &= -F_2(x_1, -x_2, x_3, x_4); \\ F_3(x_1, x_2, -x_3, x_4) &= F_3(x_1, x_2, x_3, x_4); \\ F_4(x_1, x_2, -x_3, x_4) &= -F_4(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение Ван-дер Поля при периодическом воздействии

$$dx_1 / dt = x_2; \quad dx_2 / dt = -x_1 + \mu(1-x_1^2)x_2 + x_{30} \cos \omega t \quad (15)$$

можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} dx_1 / dt &= x_2; \quad dx_2 / dt = -x_1 + \mu(1-x_1^2)x_2 + x_3; \\ dx_3 / dt &= x_4; \quad dx_4 / dt = -\omega^2 x_3, \end{aligned} \quad (16)$$

принимая во внимание, что начальные возмущения второго осциллятора системы (8) имеют вид при  $t = 0$   $x_3 = x_{30}$ ,  $x_4 = 0$ . Уравнения системы (16) удовлетворяют условиям (14). Это указывает на существование в системе (16) квазипериодических движений.

Заметим, что в системах (12), (16) особая точка претерпевает бифуркацию в зависимости от значения параметра. Матрица линейных систем (12) (16) при большом  $\mu$  ( $\mu \geq 2$ ) имеет действительные собственные значения  $\Lambda_{1,2} = \mu/2 \pm 1/2\sqrt{\mu^2 - 4}$ .

Устойчивость периодической траектории определяется исследованием системы в вариациях. Для системы вида (12) составляется система уравнений в вариациях (4). Синхронизированная траектория системы (16) приобретает вид предельного цикла. Условие (5) будет также соответствовать притяжению синхронизированных траекторий.

## 2. Бифуркации предельного цикла.

Введем малое отклонение  $\delta x_j$  от частного решения  $\bar{x}_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) систем (16). Уравнения в вариациях системы (16) имеют вид

$$\begin{aligned} d\delta x_1 / dt &= \delta x_2; \quad d\delta x_2 / dt = -(1 + 2\mu \bar{x}_1 \bar{x}_2)\delta x_1 + \mu(1 - \bar{x}_1^2)\delta x_2 + \delta x_3; \\ d\delta x_3 / dt &= \delta x_4, \quad d\delta x_4 / dt = -\omega^2 \delta x_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Квазихарактеристическое уравнение системы (17)

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 - \lambda\mu(1 - \bar{x}_1^2) + (1 + 2\mu \bar{x}_1 \bar{x}_2)) = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2}(\bar{x}) = \frac{\mu(1 - \bar{x}_1^2)}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2(1 - \bar{x}_1^2)^2}{4} - 2\mu \bar{x}_1 \bar{x}_2 - 1}. \quad (18)$$

Корни  $\lambda_{3,4} = \pm \omega i$  соответствуют подсистеме

$$d\delta x_3 / dt = \delta x_4, \quad d\delta x_4 / dt = -\omega^2 \delta x_3.$$

Корни (18) совпадают с корнями системы в вариациях (12). Для малых значений параметра  $\mu$  корни  $\lambda_{1,2}(\bar{x})$  будут комплексно-сопряженными на всей оси  $t$ . При большом значении параметра  $\mu$  появляются действительные корни  $\lambda_{1,2}(\bar{x})$ . Построим кривые, отделяющую на фазовой плоскости области с аperiodическими точками на траектории системы (12), (16). Граница области находится из условия обращения в нуль подкоренного выражения в формуле  $\lambda_{1,2}(\bar{x})$ . Области периодических точек (первый, третий квадранты) определяются неравенствами

$$x_2 > \frac{-4 + \mu^2(1 - \bar{x}_1^2)^2}{8\mu\bar{x}_1}, x_1 > 0, x_2 > 0; \quad x_2 < \frac{-4 + \mu^2(1 - \bar{x}_1^2)^2}{8\mu\bar{x}_1}, x_1 < 0, x_2 < 0$$

и строятся в соответствии с комплексно-сопряженными корнями  $\lambda_{1,2}(\bar{x})$ .

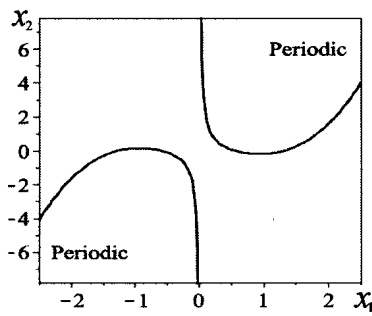


Рис. 2

На рис. 2 приведены границы областей (параметр  $\mu = 3$ ).

Система (12) не допускает разделения переменных. Выражение  $dt = dx_1 / x_2$ , найденное из первого уравнения системы (12), подставим во второе уравнение  $x_1 dx_1 - \mu(1 - x_1^2)x_2 dx_1 = -x_2 dx_2$ . Будем двигаться вдоль оси  $Ox_1$ , изменяя  $x_1$  от  $x_1^*$  до  $-x_1^*$ , где  $\pm x_1^*$  – координаты точек пересечения замкнутой кривой с осью  $Ox_1$ . Получим известное равенство  $x_1^{*2} = (-x_1^*)^2$  и то, что при  $x_2 = 0$  значение  $x_1^*$  не

зависит от параметра  $\mu$ . Величину  $x_1^*$  можно определить при помощи усреднения для  $\mu \ll 1$ . Заметим, что опыт подобных вычислений известен из [13].

Прямые

$$x_1 = -1; \quad x_1 = 1 \quad (19)$$

разделяют точки фазового пространства. В области периодических точек для  $x_1^2 < 1$  корни (18) с положительной действительной частью; для  $x_1^2 > 1$  – с отрицательной действительной частью. Выражение  $|1 - x_1^2|$  для области корней (18) с положительной действительной частью будет меньше единицы, для области корней (18) с отрицательной действительной частью будет больше единицы, т.е. при суммировании вдоль траектории предельного цикла корней (18) в области периодических точек знак суммы будет минус. Прямые (19) делят фазовый портрет на равные части по оси  $x_1$  независимо от величины  $\mu$ . Также и в области аperiodических точек – сумма корней (18) будет иметь знак минус. Таким образом, знак в формуле (5) для рассматриваемого примера будет  $< 0$  независимо от величины  $\mu$  и бифуркаций векторного поля. Последнее показывает притягивающий характер траектории предельного цикла.

Покажем, что предельный цикл уравнений (12) включает траекторию, на которой угловая скорость движения равна нулю. Составим уравнения (12) в полярных координатах  $\rho, \theta$ . Уравнения движения в переменных  $\rho, \theta$  запишутся так:

$$d\rho/dt = \mu\rho \sin^2\theta - \mu\rho^3 \sin^2\theta \cos^2\theta; \quad d\theta/dt = 1 + \mu \sin\theta \cos\theta - \mu\rho^2 \sin\theta \cos^3\theta, \quad (20)$$

где  $x_1 = \rho \cos\theta, x_2 = -\rho \sin\theta$  (здесь  $\rho$  – модуль комплексной переменной [9, 16]). Уравнения (20) будут иметь место в области периодических и аperiodических решений

уравнения в вариациях. Кривая  $\rho^*(t)$ , построенная из условия  $d\theta/dt(\rho, \theta) = 0$ , является геометрическим местом точек, для которых круговая частота движения равна нулю. Если траектория предельного цикла попадает на кривую  $\rho^*(t)$ , то кривая на некотором интервале времени может быть включена в траекторию предельного цикла. По этому участку кривой изображающая точка медленно дрейфует, так как круговая частота движения равна нулю.

Построим кривые, на которых угловая скорость периодического движения равна нулю ( $d\theta/dt = 0$ ). Фазовая траектория может притягиваться к этим кривым. Из уравнения  $1 + \mu \sin \theta \cos \theta - \mu \rho^2 \sin \theta \cos^3 \theta = 0$  находим

$$\rho^* = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\mu \sin \theta \cos^3 \theta}}. \quad (21)$$

Кривые в параметрическом виде

$$x_1 = \rho^* \cos \theta; \quad x_2 = -\rho^* \sin \theta \quad (22)$$

строятся на интервалах, где имеет место действительное положительное  $\rho^*$  из равенства (21). Рис. 3 содержит разделение фазовой плоскости на области периодических и аperiodических решений и кривые (22). Кривые (22) во втором и четвертом квадранте разделяют поле аperiodических решений и притягивают траектории предельного цикла. Покажем, что в некоторой области частное решение  $\rho^*(\theta)$  притягивающее. Составим уравнения в вариациях относительно частного решения  $\bar{\rho}(\theta)$  системы (12)

$$d\delta\rho/dt = \mu \sin^2 \theta (1 - 3\bar{\rho}^2(\theta) \cos^2 \theta) \delta\rho. \quad (23)$$

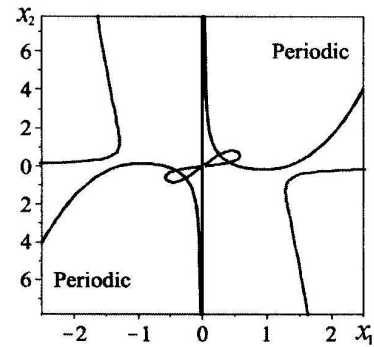


Рис. 3

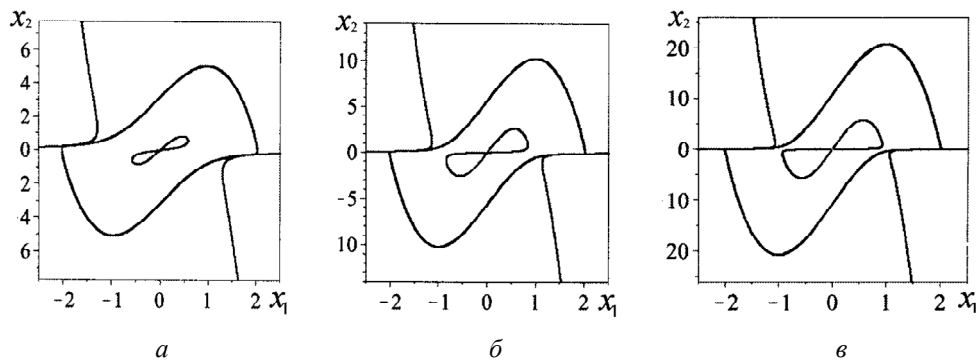


Рис. 4

Если  $\bar{\rho}^2(\theta) \cos^2 \theta > 1/3$ , то в силу уравнения (23) решение  $\bar{\rho}(\theta)$  притягивающее. Если  $\bar{\rho}(\theta) = \rho^*(\theta)$ , то траектории, притягиваясь, сольются с  $\rho^*(\theta)$  на некотором интервале, т.к. на  $\rho^*(\theta)$  угловая скорость движения равна нулю. Приведем примеры включения кривых (22) в орбиту предельного цикла (рис. 4, а, б, в при  $\mu = 3, 7, 15$ , соответственно).

### 3. Периодическое возмущение предельного цикла.

Захватывание частоты (синхронизация) порождает в фазовом пространстве устойчивый предельный цикл. При слабом воздействии цикл расположен на торе.

Если установлено замыкание траектории предельного цикла, включая синхронизованного, то для системы имеет место условие

$$\frac{1}{T} \int_0^T Sp A(t) dt \leq 0.$$

Если выявлен притягивающий характер замкнутой траектории, то имеет место условие (5). Этому соответствует появление в сигнатуре спектра характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) знака минус. Автономный предельный цикл системы (12) со значением  $\mu = 3$  имеет период колебаний  $T_a = 9$  (рис. 1) и неравномерное перемещение изображающей точки по орбите. Периодическое воздействие (период  $T_b = 5,23$ , амплитуда  $x_{30} = 1,7$ , частота  $\omega = 1,2$ ) синхронизирует предельный цикл. Неполный захват частоты происходит, вследствие бифуркационных процессов. Образуется замкнутая траектория с частотой  $\omega/3$ . Выход системы на синхронное колебание происходит за счет кратного увеличения периода (рис. 5, а, б). Аналогичная картина происходит при следующих значениях параметров:

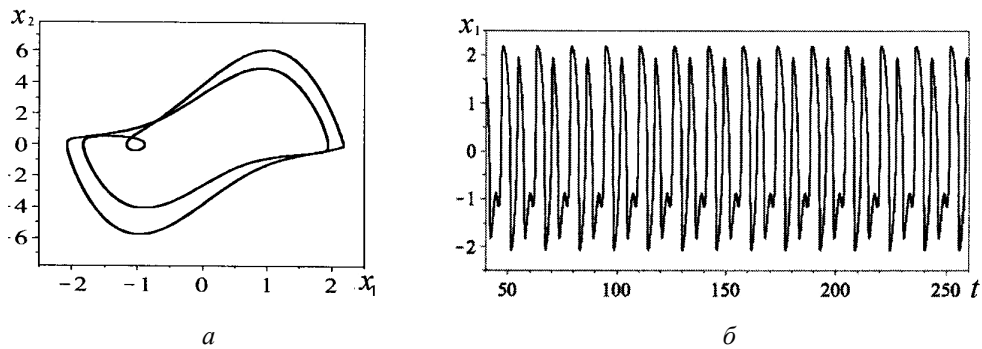


Рис. 5

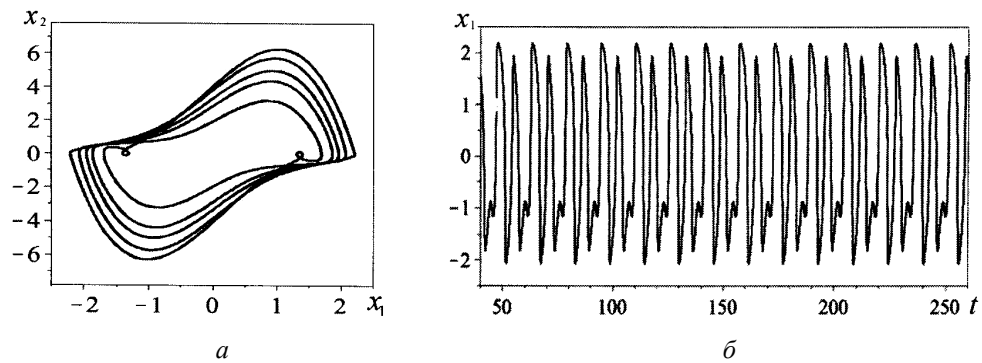


Рис. 6

$\mu = 3, x_{30} = 1,8; \omega = 1,2$ , замыкание цикла с частотой  $\omega/7$  (рис. 6, а, б).

$\mu = 3, x_{30} = 1,9, \omega = 1,2$ , замыкание цикла с частотой  $\omega/4$  (рис. 7, а, б,  $T = 4T_b$ ).

Кратность периода отсчитывается по приведенной временной реализации. При дальнейшем увеличении амплитуды периодического воздействия ( $\mu = 3, x_{30} = 2, \omega = 1,2$ ) цикл существует на торе (рис. 8 а, б).

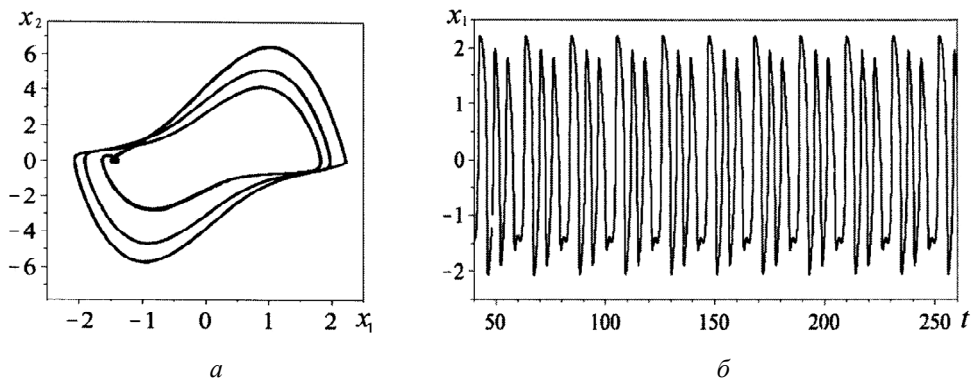


Рис. 7

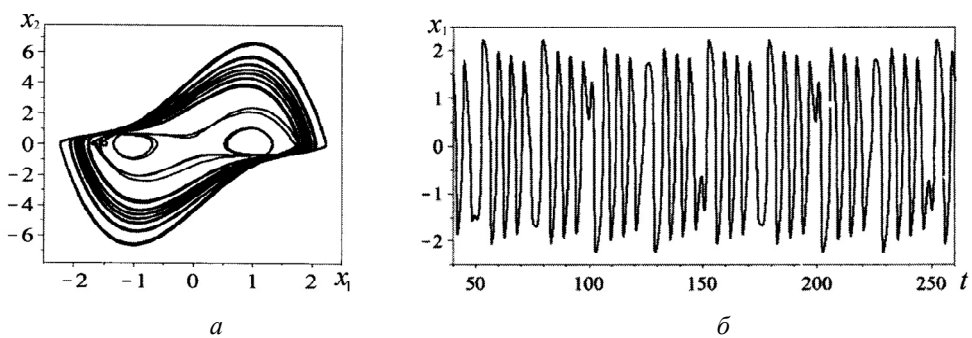


Рис. 8

Полная синхронизация предельного цикла осуществляется при  $x_{30} \geq 2,2$  (рис. 9). Отметим характер притяжения траектории синхронизированного предельного цикла. На фазовой плоскости (рис. 3) проведем прямые (19) в области периодических точек. Совместим полученную картину с синхронизированным предельным циклом (рис. 9). Прямые (19) разделяют множество периодических точек синхронизированного предельного цикла на точки притягивающие ( $\text{Re } \lambda_{1,2}(\bar{x}) < 0$ ) и не притягивающие ( $\text{Re } \lambda_{1,2}(\bar{x}) > 0$ ). Разделение происходит так-

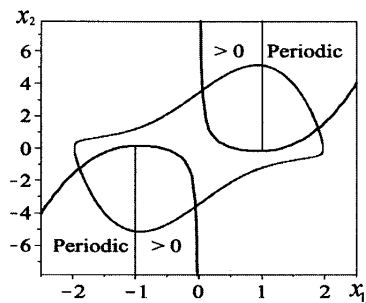


Рис. 9

же в аperiodической области. Как было указано выше, сумма всех корней квазихарактеристического уравнения системы в вариациях за период будет иметь знак  $< 0$ .

Явление синхронизации обнаруживается по численному решению. Разделение корней системы в вариациях (17) позволяет выписать частично сигнатуру при расположении цикла на торе  $(0, 0, \dots)$ . Учитывая притягивающий характер траектории в целом, цикл, расположенный на торе, имеет сигнатуру ХПЛ  $(0, 0, 0, -)$  (здесь рассматривается форма записи уравнений движения (16)). Синхронизированный предельный цикл системы (16) имеет сигнатуру ХПЛ  $(0, -)$ . Прикладные результаты качественного анализа концентрировано отражены на рис. 9.

Попытка применить метод построения функции  $V$  для установления асимптотической устойчивости траектории цикла привела к теореме Красовского [1]. Однако, применить этот подход без дополнительных сведений численного характера не удалось.



### Заключення.

Ранее можно было лишь предполагать, что стохастические колебания генератора шума совершаются за счет бифуркационных процессов. В данной работе установлено, что траектория периодически возмущенного предельного цикла, при существовании на торе и при синхронизации, не теряет устойчивости орбиты и, притягиваясь в целом (независимо от величины  $\mu$ ), совершает стохастические колебания за счет бифуркационных процессов.

РЕЗЮМЕ. Наведено принцип кососиметрії, внаслідок якого утворюються замкнуті орбіти граничних циклів і квазіперіодичні траєкторії стійких коливань. Наведено умови притягання синхронізованого граничного циклу в цілому. Розглянуто біфуркаційну фазову картину синхронізованого граничного циклу. Субгармонічне захоплення граничного циклу з кратним збільшенням періоду включає втрату симетрії та збереження притягання.

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
2. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов Ф.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматгиз, 1995. – 336 с.
3. *Никитина Н.В.* О принципе кососимметрии // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 69 – 72.
4. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 560 с.
5. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 568 p.
6. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Shimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – 356 p.
7. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, Bifurcations of Vector Fields. – Berlin: Springer, 1996. – 560 p.
8. *Leonov G.A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: Univ. Press, 2008. – 160 p.
9. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* On an Approximate Solution of the Van Der Pol Equations with a Large Parameter // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 8. – P. 1017 – 1023.
10. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Complex Oscillations Revisited // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 2. – P. 179 – 186.
11. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Complex Behavior of a Trajectory in Single-and Double-Frequency Systems // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 3. – P. 315 – 323.
12. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* Oscillations of Conservative Systems with the Complex Trajectories // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 7. – P. 721 – 738.
13. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* On Chaotic Motions of Systems with Dry Friction // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1056 – 1064.
14. *Mettin R., Palitz U., Lauterborn W.* Bifurcation structure of the driven van der Pol oscillator // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1993. – **3**. – P. 1529 – 1538.
15. *Nemytskii V.V., Stepanov V.V.* Qualitative Theory of Differential Equations. – Princeton: Univ. Press, 1960. – 550 p.
16. *Nikitina N.V.* Bifurcations of a Limit Cycle in Nonlinear Dynamic Systems // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 9. – P. 1023 – 1032.

Поступила 11.06.2009

Утверждена в печать 21.10.2010