

Ю. В. Михлин, С. Г. Митрохин

### НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОЛЕСНЫХ ЭКИПАЖАХ

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,  
ул. Фрунзе 21, 61002, Харьков, Украина; e-mail: tuv@kpi.kharkov.ua*

**Abstract.** The natural damped vibrations of a wheel crew with independent suspension are considered with allowance for nonlinear characteristics of the suspension springs and shock absorbers. The vibrations of a wheel crew with the suspension smooth nonlinear characteristics are studied for the model with seven degrees of freedoms. The corresponding skeleton curves and nonlinear normal modes of vibrations are obtained. For the model with two degrees of freedoms (quarter of the wheel crew), which corresponds to axisymmetric vibrations, the nonlinear normal modes are found for the case of non-smooth nonlinear characteristic of shock absorber.

**Key words:** natural damped vibrations of wheel crew, nonlinear characteristics of suspension, nonlinear normal modes.

#### **Введение.**

Основными устройствами, защищающими колесные экипажи от динамических воздействий со стороны дороги и сводящими колебания и вибрации к приемлемому уровню, являются подвеска и шины. В большинстве случаев в работах, посвященных исследованию динамики колесного экипажа, исследуются модели с линейными характеристиками. Такие модели позволяют решить многие задачи исследования динамики колесных экипажей. Однако в реальных экипажах используются подвески, упругие характеристики которых в силу конструктивных особенностей и использованного материала, как правило, являются существенно нелинейными.

Соответствующий анализ нелинейных систем представляет достаточно сложную проблему. Поэтому, чаще всего, рассматриваются упрощенные модели колесного экипажа, в частности, четверть экипажа («quarter-car») для исследования вертикальных колебаний [5, 11, 16], или половина экипажа (четыре степени свободы, «half-car») для исследования только лишь вертикальных движений и наклона кузова в поперечной плоскости (качения) [6, 9]. Достаточно подробное описание различных моделей динамики нелинейных колесных экипажей представлено в книге [4]. Движению колесных транспортных систем посвящены также работы [2, 3].

В представленной работе рассмотрена модель динамики колесного экипажа с 7 степенями свободы (полная модель экипажа) с независимой передней и задней подвесками. Модель учитывает вертикальные колебания четырех колес, а также перемещение и повороты кузова относительно центра тяжести. Использование такой модели позволяет исследовать основные виды колебаний колесного экипажа, а именно, вертикальные перемещения центра тяжести кузова, угол поворота кузова в продольной вертикальной плоскости и угол поворота кузова в поперечной вертикальной плоскости относительно центра тяжести [8, 10, 17]. Учитываются нелинейные упругие характеристики передних и задних пружин подвески. В работе исследованы также колебания четверти колесного экипажа для случая разрывных нелинейных демпфирующих характеристик амортизаторов. Для колебаний с разрывными характеристиками рассмотрена вначале модель с кусочно-линейной функцией демпфирования, а затем – модель с более реальной кубической разрывной характеристикой амортизатора.

Для исследования динамики колесного экипажа с нелинейными характеристиками подвески (как гладкими, так и разрывными) использована концепция нелинейных

нормальных форм колебаний, которая ранее в задачах динамики колесного экипажа не использовалась. Можно полагать, что во многих случаях, например, после удара такие режимы являются наиболее важными при описании динамики транспортного средства. Это связано с тем, что вследствие сильной диссипации переходные процессы здесь являются очень непродолжительными. Концепция нелинейных нормальных форм колебаний, как будет показано далее, может быть успешно использована как в случае гладких, так и в случае разрывных характеристик подвески.

### 1. Математическая модель колесного экипажа с 7 степенями свободы.

На рис. 1 показана модель колесного экипажа с независимой подвеской, которая рассматривалась в работах [8, 10, 17]. В отмеченных работах обсуждается также степень адекватности рассматриваемой модели.

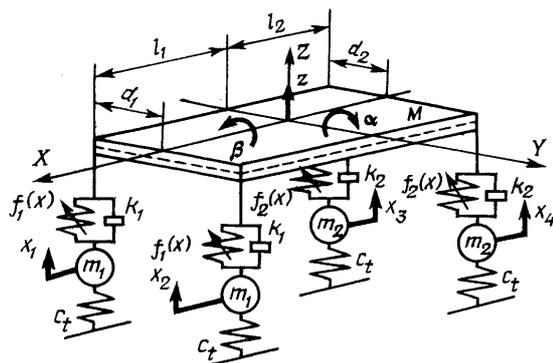


Рис. 1

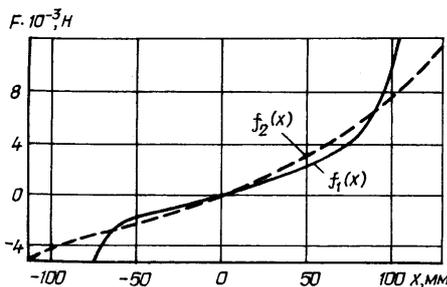


Рис. 2

и нелинейными характеристиками передних и задних пружин (рис. 2). Силы, возникающие в передней и задней подвесках при растяжении-сжатии пружин, достаточно точно описываются полиномами седьмой степени –  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Эти характеристики являются типичными, получаемыми в результате экспериментов. Некоторые данные по характеристикам пружин приведены в работе [18].

Перемещение центра тяжести кузова характеризуется вектором обобщенных координат  $q = \{z \ \alpha \ \beta\}^T$ , а вертикальные перемещения масс подвески описываются вектором  $x = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\}^T$ . Матрицы масс кузова  $M_C$  и элементов подвески  $M_S$ , матрица жесткости шин  $C$  и матрица демпфирования  $K$  являются диагональными. Перемещения углов кузова связаны с его перемещением при помощи следующей матрицы преобразования:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -l_1 & d_1 \\ 1 & -l_1 & -d_1 \\ 1 & l_2 & d_2 \\ 1 & l_2 & -d_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Кузов экипажа (масса  $M$ ) представляет собой жесткое тело, которое может совершать вертикальные колебания и поворачиваться относительно центра тяжести. Здесь  $z$  – вертикальное перемещение центра тяжести кузова;  $\alpha$  – угол поворота кузова в продольной вертикальной плоскости относительно центра тяжести;  $\beta$  – угол поворота кузова в поперечной вертикальной плоскости. Колебания подвески характеризуются вертикальными перемещениями  $x_i$  ( $i=1 \dots 4$ ) масс передней  $m_1$  и задней  $m_2$  подвесок.

Размеры  $d_1, d_2$  характеризуют половину колеи передней и задней частей колесного экипажа, соответственно, и  $l_1, l_2$  – расстояния от центра тяжести до передней и задней осей, соответственно. Шины представлены в виде жесткостных элементов с линейными характеристиками. Подвеска характеризуется демпфирующими элементами и

Разность перемещений между угловыми точками кузова и элементами подвески описывается вектором  $U = Hq - x$ , а разность скоростей – вектором  $V = H\dot{q} - \dot{x}$ . Вектор нелинейных характеристик пружин подвески может быть записан в виде

$$C_{NL} = \{f_1(U_1) \quad f_1(U_2) \quad f_2(U_3) \quad f_2(U_4)\}^T. \quad (2)$$

Таким образом, уравнения нелинейных свободных колебаний колесного экипажа в матричном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_C \ddot{q} + H^T C_{NL} + H^T KV &= 0; \\ M_S \ddot{x} - C_{NL} + Cx - KV &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Значения параметров экипажа, для которого проводились численные расчеты, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Значение
$M$	2369 кг
$I_x$	4108 кг м <sup>2</sup>
$I_y$	938 кг м <sup>2</sup>
$m_1$	77 кг
$m_2$	108,5 кг
$k_1$	700 кг/с
$k_2$	900 кг/с
$c_i$	258000 Н/м
$l_1$	1,459 м
$l_2$	1,486 м
$d_1$	0,868 м
$d_2$	0,837 м

## 2. Нормальные формы и переходные процессы для полной модели колесного экипажа.

При рассмотрении колебаний вблизи положения равновесия нелинейные функции жесткости можно заменить линейными. Расчеты показывают, что, как и следовало ожидать, низшие частоты колебаний отвечают двум формам колебаний, где преобладают, соответственно, углы поворота кузова в поперечной вертикальной плоскости  $\beta$ , и вертикальные движения, которые определяются переменной  $z$ . Примерно в 9 – 10 раз выше частоты, отвечающие четырем формам колебаний – синфазные и антифазные движения двух пар переменных –  $x_1, x_2$  и  $x_3, x_4$ , причем частоты синфазных и антифазных движений близки. Промежуточное положение занимает еще одна форма колебаний, где преобладают углы поворота кузова в продольной вертикальной плоскости относительно центра тяжести  $\alpha$ . Однако, как показывают расчеты, даже при не слишком больших начальных отклонениях в вертикальных перемещениях или в углах поворота модели нелинейность вносит заметный вклад в формы и частоты колебаний.

Для анализа нелинейного поведения рассматриваемых систем используется концепция нелинейных нормальных форм колебаний. Нелинейные нормальные формы колебаний – это обобщение нормальных форм колебаний линейных систем. В режиме нормальных колебаний система конечной размерности ведет себя как система с одной степенью свободы, при этом все позиционные переменные однозначно выражаются через одну из этих переменных [10, 12, 15]. В общем случае траектории нелинейных нормальных колебаний в конфигурационном пространстве являются криволинейными, в отличие от прямолинейных траекторий в линейных системах. Приложениям теории нормальных форм колебаний в динамике нелинейных упругих систем посвящена работа [1]. В работах [13, 14] С. Шоу и К. Пьер переформулировали концепцию нелинейных нормальных форм для общего класса нелинейных дискретных систем. Этот подход с успехом был использован для решения некоторых нелинейных задач динамики.

Для использования указанного метода исходная система уравнений (3) должна быть представлена в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y), \quad (4)$$

где  $x = \{x_1 \dots x_N\}^T$  – вектор обобщенных координат;  $y = \{y_1 \dots y_N\}^T$  – вектор обобщенных скоростей. Затем выбирается пара независимых координат  $(u, v)$ , где  $u$  – некоторая выбранная обобщенная координата, а  $v$  – соответствующая обобщенная

скорость. В соответствии с концепцией Шоу – Пьера нелинейная нормальная форма колебаний определяется следующим образом: нелинейная нормальная форма – это такой режим колебаний, когда все обобщенные координаты и скорости однозначно определяются выбранной парой независимых координат. Заметим, что нормальные формы Шоу – Пьера являются важным частным случаем так называемых инвариантных многообразий динамических систем.

Например, выбор в качестве независимых координат пары с индексом 1 позволяет записать нормальную форму колебаний в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ X_2(u, v) \\ Y_2(u, v) \\ \vdots \\ X_N(u, v) \\ Y_N(u, v) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вычисляя производные по времени для всех переменных в системе (5), учитывая, что  $u = u(t)$  и  $v = v(t)$ , и подставляя полученные выражения для производных в систему (4), получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} f_1(x, y) = Y_i(u, v); \quad \frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} f_1(x, y) = f_i(x, y) \quad (i = \overline{1 \dots N}). \quad (6)$$

Решение системы уравнений в частных производных (6) определяется в виде степенных рядов (в рассматриваемой задаче сохраняются члены до седьмой степени включительно по переменным  $u$  и  $v$ )

$$\begin{aligned} x_i &= X_i(u, v) = a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + \dots; \\ y_i &= Y_i(u, v) = b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

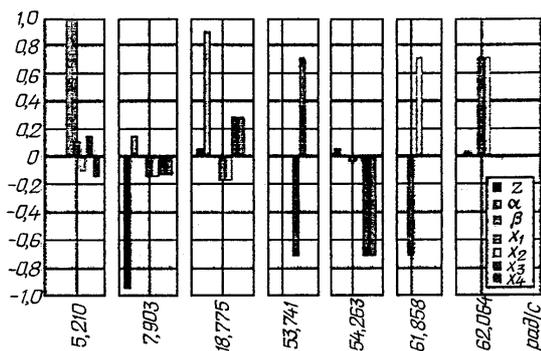


Рис. 3

Ряды (7) подставляются в (6), после чего коэффициенты при одинаковых степенях приравниваются, образуя рекуррентные системы алгебраических уравнений. Решая полученные системы, находим коэффициенты разложений (7), и, таким образом, определяем форму колебаний. Подобным образом определяются все семь нелинейных форм колебаний системы. Величины коэффициентов разложений (7) здесь не приведены. На рис. 3 показаны поверхности (интегральные

многообразия), характеризующих первую форму колебаний, и соответствующие траектории движения конкретных позиционных переменных на каждой из этих поверхностей.

Для построения скелетных кривых для нормальных форм колебаний используется метод гармонической линеаризации совместно с методом продолжения по параметру. Полученные скелетные кривые показаны на рис. 4, где показаны изменения угла по-

ворота  $\alpha(a)$  и перемещения  $x_1(b)$ , а также скорости переменных  $\alpha(b)$  и  $x_1(z)$  в зависимости от  $u, v$  (первая форма колебаний нелинейной системы; независимая пара координат  $z$  и  $\dot{z}$ ; начальные условия:  $z = 0,075$  и  $\dot{z} = 0$ ).

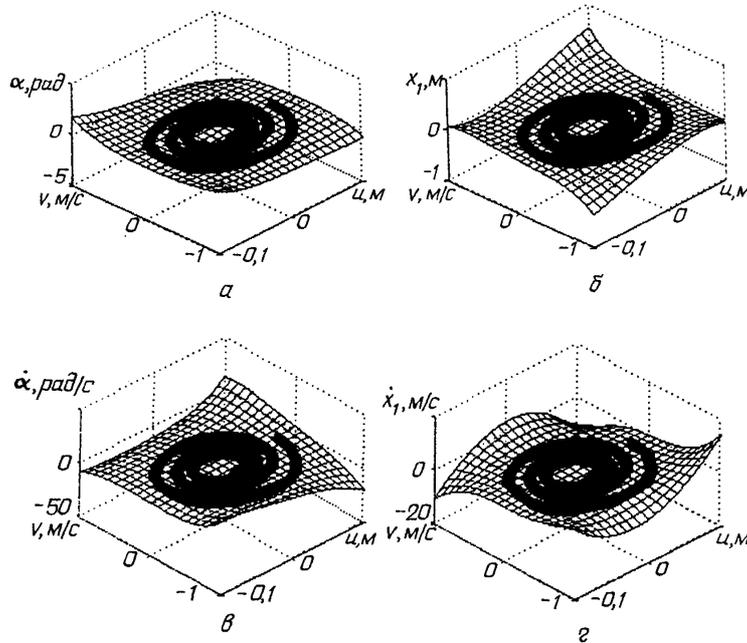


Рис. 4

Числовые расчеты показывают, что высокочастотные колебания частей подвески затухают достаточно быстро и в результате колебания выходят на низкочастотный режим, соответствующий колебаниям кузова.

### 3. Нелинейные нормальные формы колебаний и переходные процессы для негладких характеристик виброударного гасителя колебаний.

**3.1. Модель четверти колесного экипажа («quarter-car»).** Уравнения движения. Ниже рассмотрена динамика подвески колесного экипажа для случая негладких характеристик виброударного гасителя колебаний. Используется модель четверти колесного экипажа, представленная на рис. 5, где показаны скелетные кривые нелинейной системы (полная модель автомобиля:  $a$  – для координат кузова;  $b$  – для координат частей подвески).

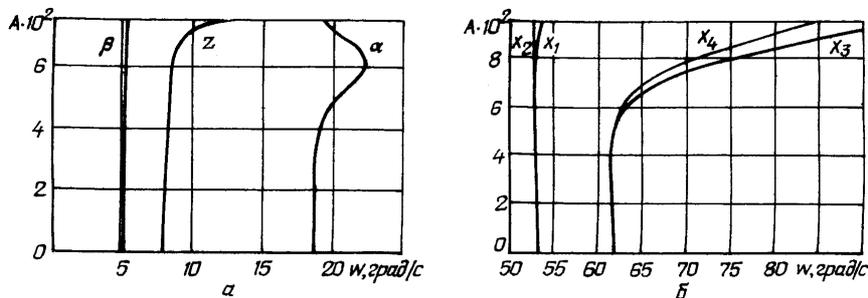


Рис. 5

Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + f(x_1 - x_2) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0; \\ m\ddot{x}_2 + f(x_2 - x_1) + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_t x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

где  $f(x)$  – функция, характеризующая жесткость нелинейной пружины;  $d(\dot{x})$  – нелинейная функция, характеризующая диссипацию в подвеске, а именно,

$$d(\dot{x}) = \begin{cases} d_1(\dot{x}), & \dot{x}_1 - \dot{x}_2 < 0; \\ d_2(\dot{x}), & \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

**3.2. Кусочно-линейная характеристика гасителя.** Кусочно-линейная характеристика виброударного гасителя (рис. 6) является приближением более точной характеристики, рассмотренной ниже. Упругие характеристики пружин в подвеске принимаются линейными. Изменения угла поворота  $\alpha(t)$  (начальное условие  $z(0) = 100$  мм (а)), перемещения  $x_1(t)$  ( $z(0) = 100$  мм) (б), а также перемещения  $x_1(t)$  при  $\beta(0) = 6^\circ$  (в) показаны для случая линейной (кривая 1) и нелинейной (кривая 2) моделей.

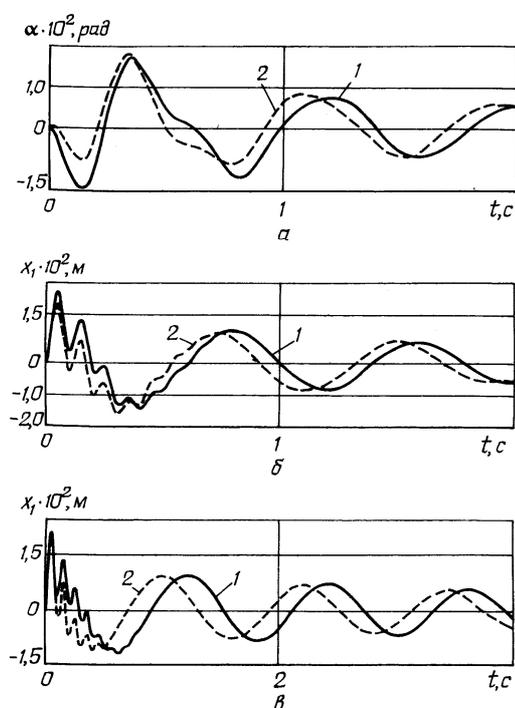


Рис. 6

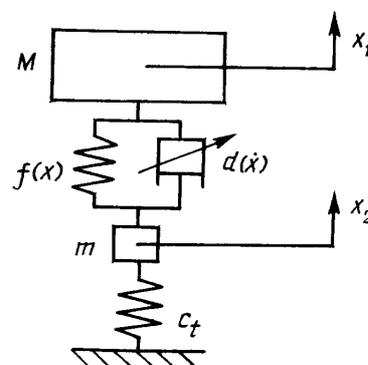


Рис. 7

Таблица 2

Параметр	Значение
$M$	592,25 кг.
$m$	108,5 кг.
$c_t$	258000 Н/м
$f(x)$	$f(x) = 55000 x$

Для определения нормальных форм колебаний здесь также используется концепция Шуу – Пьера, т.е. все обобщенные координаты и скорости однозначно определяются выбранной парой независимых координат. Первая нелинейная нормальная форма колебаний, определенная этим методом, для модели четверти автомобиля показана на рис. 7. Значения параметров модели четверти колесного экипажа, для которого проводился численный расчет, представлены в табл. 2.

Каждому линейному участку характеристики соответствует своя форма колебаний. На рисунках можно наблюдать как движения на плоскостях, соответствующих формам колебаний, так и переходные процессы из одной формы колебаний в другую. Эти переходные процессы возникают при переходе через точку излома кусочно-линейной характеристики демпфирования. Сравнительно быстрый выход в режим нормальной формы колебаний связан с существенным демпфированием в рассматриваемой системе.

**3.3. Негладкие кубические характеристики подвески.** Более реальной является нелинейная характеристика демпфирования в подвеске, а именно, кусочно-линейная характеристика ударного демпфирования  $d(\dot{x})$  представлена на рис. 8. При этом в нелинейной упругой характеристике жесткости подвески сохранялись линейные и кубические слагаемые.

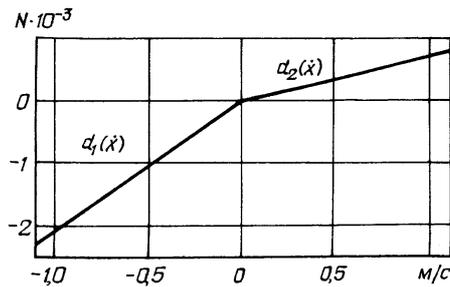


Рис. 8

Параметры колесного экипажа соответствуют значениям из табл. 2. Одна из нормальных форм колебаний, полученная в этом случае, и переходные процессы из одной формы колебаний в другую, возникающие при переходе через точку излома характеристики, изображены на рис. 9, где показаны нормальные формы колебаний для кусочно-линейной характеристики демпфирования. Первая нормальная форма представлена на рис. 9, а, где в качестве независимых переменных выбраны переменная  $x_1$  и соответствующая скорость и показано изменение перемещения  $x_2$  (слева) и изменение его скорости (справа) в зависимости от  $u$  и  $v$ . Вторая нормальная форма колебаний дана на рис. 9, б (независимые переменные  $x_2$  и соответствующая скорость; изменение перемещения  $x_1$  (слева), а изменение его скорости (справа)).

Движение по формам колебаний во времени и переходной процесс для линейно-кусочной характеристики демпфирования для первой (а) и второй (б) нормальных форм колебаний показаны на рис. 10, где даны изменения перемещения  $x_2$  (слева) и его скорости (справа) во времени (а), а также изменение перемещения  $x_1$  (слева) и перемещения  $x_2$  (справа).

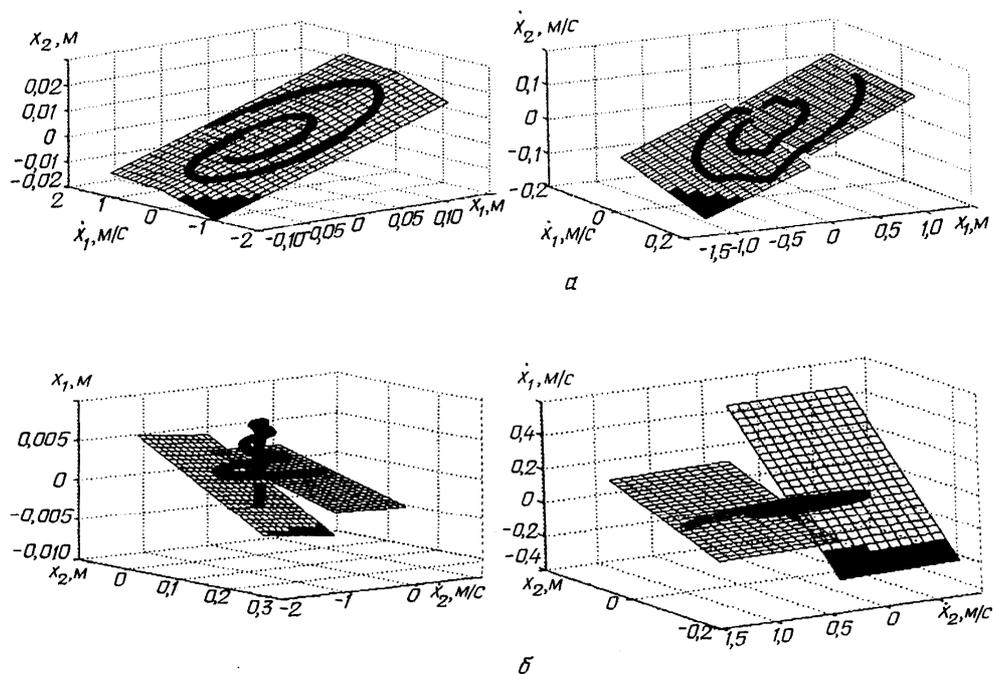


Рис. 9

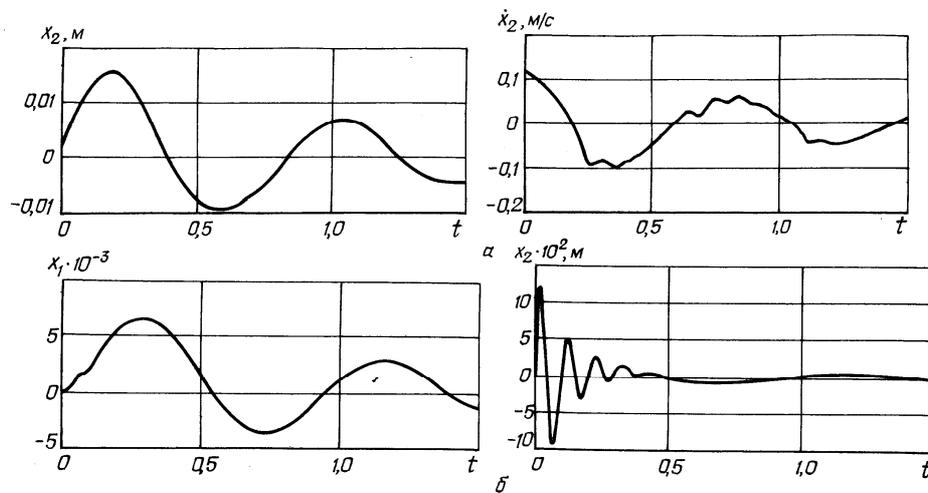


Рис. 10

### Заключение.

В данной работе рассмотрена нелинейная динамика колесного экипажа, который представлен моделью с 7 степенями свободы. При этом учитываются нелинейные характеристики подвески. При проведении исследований использована концепция нелинейных нормальных форм колебаний. Эти формы колебаний получены как для случая, когда учитывается нелинейная жесткость в подвеске, так и для случая, когда учитывается нелинейная разрывная характеристика ударного демпфера. В последнем случае применяется упрощенная модель колесного экипажа. Численные методы позволяют графически представить нормальные формы колебаний, а также переходные процессы, которые в случае разрывной характеристики возникают при переходе через точку разрыва и приводят к переходу от одной формы колебаний к другой. Переходные процессы являются непродолжительными, что связано с существенным демпфированием в рассматриваемой системе. Во многих случаях нормальные формы колебаний являются основными режимами колебаний в подвеске колесного экипажа.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто вільні затухаючі коливання колісного екіпажу з незалежною підвіскою з урахуванням нелінійних характеристик пружин та амортизаторів підвіски. Досліджено коливання колісного екіпажу з гладкими нелінійними характеристиками підвіски для моделі з 7 степенями свободи. Отримано відповідні скелетні криві і нелінійні нормальні форми коливання. Для моделі з двома степенями свободи (чверть колісного екіпажу), що відповідає симетричним коливанням, знайдено нелінійні нормальні форми у випадку негладкої нелінійної характеристики амортизатора.

1. Курилов Е.А., Михлин Ю.В. О нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке с учетом начальных неправильностей // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 63 – 73.
2. Ларин В.Б. О стабилизации движения колесного транспортного робота // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 7. – С. 114 – 124.
3. Ларин В.Б. О задаче управления составным колесным экипажем // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 11. – С. 105 – 112.
4. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. Изд. 3-е. – М.: Машиностроение, 1972.
5. Haroon M., Adams D.E., WahLuk Y., Ferri A.A. A time and frequency domain approach for identifying nonlinear mechanical system models in the absence of an input measurement // J. of Sound and Vibration. – 2005. – **283**. – P. 1137 – 1155.
6. Hrovat D. Optimal suspension performance for 2-D vehicle models // J. of Sound and Vibration. – 1991. – **146**. – P. 93 – 110.
7. Hyo-Jun Kim, Hyun Seok Yang, Young-Pil Park Improving the vehicle performance with active suspension using road-sensing algorithm // Computers and Structures. – 2002. – **80**. – P. 1569 – 1577.

8. *Marzbanrad J., Ahmadi G., Zohoor H., Hojjat Y.* Stochastic optimal preview control of a vehicle suspension // *J. of Sound and Vibration.* – 2004. – **275**. – P. 973 – 990.
9. *Mikhlin Yu.* Normal vibrations of a general class of conservative oscillators // *Nonlinear Dynamics.* – 1996. – **11**. – P. 1 – 16.
10. *Pilipchuk V., Moshchuk N., Shih-Ken Chen* Vehicle state estimation using dynamic 7 degree-of-freedom observer // *Proc. of IMECE2006, Chicago, USA, 2006.* – P. 1 – 8.
11. *Robson J.D.* Road surface description and vehicle response // *Int. J. of Vehicle Design.* – 1979. – **9**. – P. 25 – 35.
12. *Rosenberg R.* Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // *Advances of Applied Mechanics.* – New York: Academic Press, 1966. – **9**. – P. 156 – 243.
13. *Shaw S., Pierre C.* Nonlinear normal modes and invariant manifolds // *J. of Sound and Vibration.* – 1991. – **150**. – P. 170 – 173.
14. *Shaw S., Pierre C.* Normal modes for nonlinear vibratory systems // *J. of Sound and Vibration.* – 1993. – **164**. – P. 85 – 124.
15. *Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Y., Pilipchuk V., Zevin A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley, New-York, 1996.
16. *Williams R.A.* Automotive active suspensions, Part 1: Basic principles // *Proc. of the Institute of Mechanical Engineers, Journal of Automobile Engineering, Proc. Part D.* – 1997. – **211**. – P. 415 – 426.
17. *Wong J.Y.* The theory of ground vehicles. 2nd ed. – New York: John Wiley, 1993.
18. *Zhu Q., Ishitobi M.* Chaos and bifurcations in a nonlinear vehicle model // *J. of Sound and Vibration.* – 2004. – **275**. – P. 1136 – 1146.

Поступила 21.04.2009

Утверждена в печать 21.10.2010

