

Б. Кебли¹, Г. Я. Попов², Н. Д. Вайсфельд³

О ДИНАМИКЕ УПРУГОГО УСЕЧЕННОГО КОНУСА

¹ Алжирский политехнический институт,
ул. Хасен Бади, 10, Эль-Харрах, Алжир; e-mail: keblib@yahoo.fr

^{2,3} Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова,
ул. Дворянская, 2, 65082, Одесса, Украина;
e-mail: ² popov@onu.edu.ua, ³ vaysfeld@onu.edu.ua

Abstract. The problem of determination of non-stationary wave field of an elastic truncated cone is formulated in terms of wave functions with allowance for the cone weight. By application of integral Laplace transform in time and transformation by the polar angle, the problem is reduced to solving the one-dimensional vector problem in the transform space. The transforms of wave functions are expanded into series of inverse degrees of Laplace transform parameter, what enables to study the wave process at the initial moments of interaction. The way is proposed to solve the problem in hand for the case of twice truncated over the spherical surfaces elastic cone.

Key words: elastic truncated cone; non-stationary wave field; integral Laplace transform in time; transformation by the polar angle; twice truncated over the spherical surfaces elastic cone; initial moments of interaction

Введение.

Исследованию напряженного состояния конических тел под действием статических нагрузок посвящено достаточно много работ. Так, в [10] впервые рассмотрены осесимметричные задачи о равновесии кругового конуса; в [14] решена задача о равновесии конуса, нагруженного у острия сосредоточенной силой; в [11] получено решение задачи о равновесии конуса, нагруженного изгибающим моментом в вершине; в [13] решена смешанная задача для бесконечного конуса; в [15] исследовано напряженное состояние усеченного полубесконечного конуса; в [6] впервые получено точное решение осесимметричной задачи для конуса, загруженного центром вращения у острия; в [7] получено точное решение осесимметричной задачи для кругового полого конуса.

Значительно меньшее количество работ посвящено динамическим задачам упругости для конических тел. В [12] приведены результаты экспериментального исследования распространения упругих волн в усеченном упругом конусе; в [9] выведено аналитическое решение осесимметричной задачи динамики полусферического купола, представляющего собой частный случай дважды усеченного по сферическим поверхностям упругого конуса; в [2] получено решение динамической задачи для упругого конуса при воздействии на него динамической нагрузки без учета собственного веса.

§1. Постановка задачи.

В момент времени $t = 0$ к сферической поверхности $r = a$ покоящегося упругого усеченного конуса, положение которого в сферической системе координат определяется соотношениями $0 < r < a$, $0 < q < w$, $-p \leq j \leq p$ (рис. 1, сечение zox), приложена нестационарная осесимметричная нагрузка $f(0, t)$

$$s_r(a, q, t) = -f(q, t); t_{rq}(a, q, t) = 0 \quad (0 < q < w). \quad (1.1)$$

Коническая поверхность конуса $q = w$ находится в условиях скользящего закрепления

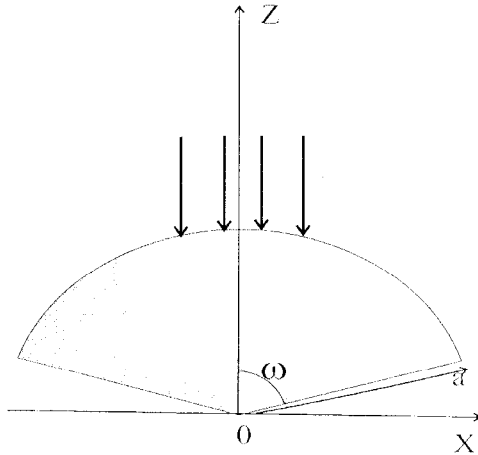


Рис. 1

$$u_q(r, w, t) = 0; t_{rq}(r, w, t) = 0 \quad (0 < r < a). \quad (1.2)$$

Уравнения движения решаем на основе определения волновых потенциалов, удовлетворяющих волновым уравнениям с учетом объемных сил, роль которых играют силы веса,

$$\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{c_1^2\partial t^2} = gr \cos q; \quad \Delta\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{c_2^2\partial t^2} = 0; \quad (1.3)$$

Δ – оператор Лапласа в сферической системе координат; g – удельный вес материала конуса; c_1, c_2 – скорости продольных и поперечных волн.

Необходимо определить волновое поле внутри конуса при нулевых начальных условиях.

§2. Сведение проблемы к одномерной векторной задаче.

К волновым уравнениям (1.3) последовательно применяются преобразование Лапласа по времени и интегральное преобразование по переменной q [5]:

$$f_p(r, q) = \int_0^\infty f(r, q, t) e^{-pt} dt;$$

$$f_{pk}(r) = \int_0^w f_p(r, q) P_{v_k}^1(\cos q) \sin q dq \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (2.1)$$

n_k – корни трансцендентного уравнения $P_{v_k}^1(\cos w) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

В пространстве трансформант этих преобразований система уравнений (1.3) записывается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} (r^2\Phi'_{pk}(r))' - N_k\Phi_{pk}(r) - r^2s_1^2\Phi_{pk}(r) &= \frac{r}{p}gq_k; \\ (r^2\Psi'_{pk}(r))' - N_k\Psi_{pk}(r) - r^2s_2^2\Psi_{pk}(r) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где приняты обозначения:

$$s_i^2 = \frac{p^2}{c_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad q_k = \frac{1}{2} \int_0^w \sin 2q P_{v_k}^1(\cos q) dq;$$

$$N_k = v_k(v_k + 1) = \left(v_k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = t^2 - \frac{1}{4} \quad \left(t = n_k + \frac{1}{2}\right).$$

При получении этой системы выполнены равенства

$$\left. \frac{\partial\Phi_p(r, q)}{\partial q} \right|_{q=w} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial\Psi_p(r, q)}{\partial q} \right|_{q=w} = 0, \quad (2.3)$$

что приводит к автоматическому выполнению краевого условия (1.2). Для того, чтобы убедиться в этом, учтем соотношения, связывающие смещения и напряжения с волновыми потенциалами [4],

$$u_q^p(r, q) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_p(r, q)}{\partial q} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_p(r, q)}{\partial q} \right); \quad (2.4)$$

$$t_{rq}^p(r, q) = \frac{2m}{r} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \Phi_p(r, q) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2} s_2^2 \right) \Psi_p(r, q).$$

Как видно, из удовлетворения требований (1.2) на конической поверхности следуют соотношения (2.3). Переформулируем в терминах волновых функций краевые условия (1.1) и применим к ним интегральные преобразования (2.1)

$$s_r^{pk}(r)|_{r=a} = A_0(r)|_{r=a} = -f_{pk}, \quad t_{rq}^{pk}(r)|_{r=a} = A_1(r)|_{r=a} = 0, \quad (2.5)$$

где

$$A_0(r) = \frac{1}{2m} \left[\left(r^2 \Phi_{pk}'(r) \right)' - N_k \Phi_{pk}(r) + \frac{rg}{p} q_k \right] + \Phi_{pk}''(r) - \left(\left(r^2 \Psi_{pk}'(r) \right)' - N_k \Psi_{pk}(r) \right) - r \left(\left(r^2 \Psi_{pk}'(r) \right)' - N_k \Psi_{pk}(r) \right)' + 3\Psi_{pk}''(r) + r\Psi_{pk}'''(r);$$

$$A_1(r) = \frac{1}{r} \left(\Phi_{pk}'(r) - \frac{1}{r} \Phi_{pk}(r) \right) + \left(\Psi_{pk}''(r) + \frac{1}{r} \Psi_{pk}'(r) - \frac{\Psi_{pk}}{r^2} - \frac{1}{2} \left(\left(r^2 \Phi_{pk}'(r) \right)' - N_k \Psi_{pk}(r) \right) \right);$$

$$f_{pk} = \int_0^\infty \int_0^w P_{v_k}^1(\cos q) \sin q e^{pt} f(q, t) dq dt.$$

Решение полученной краевой задачи (2.2), (2.5) построим, используя метод, изложенный в [8] и примененный в [2]. Для этого введем в рассмотрение вектор $\mathbf{y}(r) = (\Phi_{pk}(r), \Psi_{pk}(r))^T$ и дифференциальный оператор второго порядка L_2

$$L_2(\mathbf{y}(r)) = \mathbf{I} \left(r^2 \mathbf{y}'(r) \right)' + \frac{1}{4} \mathbf{I} \mathbf{y}(r) - t^2 \mathbf{I} \mathbf{y}(r) - r^2 \mathbf{P} \mathbf{y}(r);$$

\mathbf{I} – единичная матрица порядка 2×2 ; $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} s_1^2 & 0 \\ 0 & s_2^2 \end{pmatrix}$. Задача сводится к неоднородному векторному уравнению векторной задачи

$$L_2(\mathbf{y}(r)) = \mathbf{F}(r); \quad \mathbf{F}(r) = \left(\frac{r}{p} g q_r, 0 \right)^T \quad (2.6)$$

с последующим удовлетворением краевым условиям

$$s_r^{pk}(r)|_{r=a} = A_0(r)|_{r=a} = -f_{pk}, \quad t_{rq}^{pk}(r)|_{r=a} = A_1(r)|_{r=a} = 0. \quad (2.7)$$

§3. Решение векторной задачи.

Для решения неоднородного матричного уравнения (2.6) найдем фундаментальную матрицу [8]. Для этого применим к уравнению матричное интегральное преобразование

$$\mathbf{y}_t = \int_0^{\infty} \mathbf{y}(r) \mathbf{K}_t(r) dr, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} \frac{K_{it}(rs_1)}{\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & \frac{K_{it}(rs_2)}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}$; $K_{it}(z)$ – модифицированная функция Бесселя

второго рода мнимого порядка. Применение интегрального преобразования приводит к векторному уравнению

$$\mathbf{y}_t \mathbf{M}_t = \mathbf{F}_t; \quad \left(\mathbf{F}_t = \int_0^{\infty} \mathbf{F}(r) \mathbf{K}_t(r) dr \right), \quad (3.2)$$

откуда трансформанта неизвестного вектора выразится следующим образом:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{F}_t = \mathbf{M}_t^{-1} \int_0^{\infty} \mathbf{F}(x) \mathbf{K}_t(x) dx; \quad (3.3)$$

\mathbf{M}_t^{-1} – матрица, обратная для матрицы \mathbf{M} , т.е.

$$\mathbf{M}_t^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}.$$

К соотношению (3.3) применим обратное матричное интегральное преобразование

$$\mathbf{y}(r) = \frac{2}{p^2} \int_0^{\infty} t \operatorname{sh} pt \mathbf{R}_t(r) \mathbf{y}_t dt; \quad (3.4)$$

$\mathbf{R}_t(r) = \begin{pmatrix} \frac{K_{it}(rs_1)}{\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & \frac{K_{it}(rs_2)}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}$ – матрица обратного матричного интегрального пре-

образования.

Подставив равенство (3.3) в правую часть выражения (3.4), имеем

$$\mathbf{y}(r) = \frac{2}{p^2} \int_0^{\infty} t \operatorname{sh} pt \mathbf{R}_t(r) \mathbf{M}_t^{-1} \int_0^{\infty} \mathbf{F}(x) \mathbf{K}_t(x) dx dt.$$

Изменив в данном соотношении порядок интегрирования, получим решение векторного уравнения (2.6)

$$\mathbf{y}(r) = \int_0^{\infty} \mathbf{\Lambda}(r,x) \mathbf{F}(x) dx, \quad (3.5)$$

где $\Lambda(r, x) = \frac{2}{p^2} \int_0^\infty t \operatorname{sh} p t R_t(r) \mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{K}_t(x) dt$ – фундаментальная матрица уравнения (2.6).

Интегралы, входящие в элементы матрицы $\Lambda(r, x)$, вычисляются с помощью [3, ф-ла 6.794 (10)]; в результате запишем окончательный вид фундаментальной матрицы:

$$\Lambda(r, x) = \begin{pmatrix} w_1(r, x) & 0 \\ 0 & w_2(r, x) \end{pmatrix}; \quad w_i(r, x) = \begin{cases} I_0(x s_i) K_0(r s_i), & x < r; \\ I_0(r s_i) K_0(x s_i), & r < x \end{cases} \quad (i=1, 2).$$

Матричная фундаментальная система решений матричного однородного уравнения $L_2 Y(r) = 0$ состоит из матриц $\mathbf{Y}_0(r) = \begin{pmatrix} \frac{I_{\nu_{k+1/2}}(s_1 r)}{\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & \frac{I_{\nu_{k+1/2}}(s_2 r)}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}$ и

$$\mathbf{Y}_1(r) = \begin{pmatrix} \frac{K_{\nu_{k+1/2}}(s_1 r)}{\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & \frac{K_{\nu_{k+1/2}}(s_2 r)}{\sqrt{r}} \end{pmatrix}; \quad I_n(z), K_n(z) \text{ – модифицированные функции Бесселя}$$

первого и третьего рода мнимого порядка. Общее решение однородного векторного уравнения (2.6) имеет вид

$$\mathbf{y}(r) = \mathbf{B}_0 \mathbf{Y}_0(r) + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_1(r); \quad (3.6)$$

$\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$ – векторы неизвестных постоянных. Учитывая требование регулярности решения в нуле, общее решение неоднородного уравнения (2.6) представим в виде

$$\mathbf{y}(r) = \mathbf{B}_0 \mathbf{Y}_0(r) + \int_0^\infty \Lambda(r, x) F(x) dx. \quad (3.7)$$

Выписав покомпонентно элементы вектора решений, определим тем самым трансформанты волновых функций

$$\begin{pmatrix} \Phi_{pk}(r) \\ \Psi_{pk}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(r) & 0 \\ 0 & J_2(r) \end{pmatrix} + \int_0^\infty \begin{pmatrix} w_1(r, x) & 0 \\ 0 & w_2(r, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x g q_k p^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} dx; \quad (3.8)$$

b_1, b_2 – неизвестные постоянные; $J_i(r) = \frac{I_{\nu_{k+1/2}}(r s_i)}{\sqrt{r}}, i=1, 2$.

С целью определения неизвестных b_1 и b_2 удовлетворим краевым условиям задачи (2.7), предварительно подсчитав интегралы, входящие в формулы (3.8),

$$\Phi_{pk}(r) = b_1 J_1(r) + a_1(p r), \quad \Psi_{pk}(r) = b_2 J_2(r) + a_2(p r);$$

$$a_i(p, r) = g q_k p^{-1} \int_0^r w_i(r, x) x dx + g q_k p^{-1} \int_r^a w_i(r, x) x dx \quad (i=1, 2). \quad (3.9)$$

Решив систему алгебраических уравнений, полученных после подстановки соотношений (3.9) в краевые условия задачи (2.7), запишем вид коэффициентов b_1 и b_2 :

$$b_1 = \left[-\frac{f_{pk}}{p} - \frac{ga}{2mp} q_k - L(s_1, s_2, a) - C_2 B(s_1, s_2, a) \right] \frac{8m}{J_1(r) + 8mJ_1''(r)}; \quad (3.10)$$

$$b_2 = \frac{-a^2 D(s_2, s_1, a)(J_1(a) + 8mJ_1''(s_1a)) + (d_k p^{-1} + 8mL(s_1, s_2, a))(J_1'(a)a - J_1(a))}{K(s_1, s_2, a)a^2(J(s_1a) + 8mJ''(s_1a)) - 8mB(s_1, s_2, a)(J_1'(a)a - J_1(a))},$$

где

$$K(s_1, s_2, a) = J_2''(a)(1 - a^2 2^{-1}) + J_2'(a)(a^{-1} - a) - J_2(a)(N_v + a^{-2});$$

$$B(s_1, s_2, a) = -a^2 J_2^{IV}(a) + J_2^{III}(a)(2a^3 - 4a) + J_2^{II}(s_2a) + \\ + (4a^2 - 4^{-1}a)J_2'(a) + 4^{-1}J_2(a);$$

$$L(s_1, s_2, a) = F''(s_2a)a(1 - a^2) + F''(s_2a)(3 - 5a^2) + F''(s_1a)\left(\frac{a^2}{2m} + 1\right) +$$

$$+ F'(s_2a)a(N_v - 4) + F'(s_1a)m^{-1}a - F(s_2a)N_v - F(s_1a)(2m)^{-1}N_v + \frac{gaq_k}{p2m};$$

$$D(s_1, s_2, a) = F''(s_2a)\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) - F'(s_2a)a + F'(s_1a)2a^{-1} - F(s_2a)N_v - F(s_1a)a^{-2}$$

$$J_i(a) = \frac{I_{\nu_k + 1/2}\left(\frac{p}{c_i}a\right)}{\sqrt{a}} \quad (i = 1, 2);$$

$$F(s_i a) = K_0(as_i) \int_0^r I_0(xs_i) f_{pk}(x) dx + I_0(as_i) \int_r^a K_0(xs_i) f_{pk}(x) dx.$$

Подставив найденные коэффициенты b_1 и b_2 в формулы (3.8), получим окончательное решение векторной краевой задачи. Для того, чтобы получить решение исходной задачи в оригиналах, следует применить к полученным трансформантам последовательно обратное преобразование по переменной q [5] и по времени

$$\begin{pmatrix} \Phi(r, q, t) \\ \Psi(r, q, t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos q)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos q)\|^2} \frac{1}{2pi} \int_{g-i\infty}^{g+i\infty} e^{pt} \begin{pmatrix} \Phi_{pk}(r) \\ \Psi_{pk}(r) \end{pmatrix} dp. \quad (3.11)$$

Волновое поле упругого конуса будет тем самым полностью определено. Однако провести точное обращение преобразования Лапласа в формулах (3.11), и получить оригиналы волновых функций не удалось. Для определения волнового поля предлагается применить подход, основанный на разложении трансформант Лапласа потенциалов по обратным степеням параметра преобразования p . Полученное решение позво-

лит исследовать волновой процесс для малых моментов времени взаимодействия. Чтобы разложить трансформанты волновых функций $\Phi_{pk}(r)$ и $\Psi_{pk}(r)$, определяемые формулами (3.8), (3.10) по обратным степеням параметра преобразования Лапласа p , следует использовать формулы асимптотического поведения модифицированных функций Бесселя для больших значений аргумента [1]. В результате, к полученным разложениям потенциалов в ряд по обратным степеням параметра p применяется обратное преобразование Лапласа с известной формулой обращения $L^{-1}[1/p^m] = t^m$. Произведя необходимые выкладки, запишем асимптотические выражения волновых потенциалов $\Phi(r, q, t)$ и $\Psi(r, q, t)$, описывающие волновое поле упругого конуса при малых моментах времени взаимодействия,

$$\Phi(r, q, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{v_k}^1(\cos q)}{\|P_{v_k}^1(\cos q)\|^2} \Phi_k(r, t); \quad \Psi(r, q, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{v_k}^1(\cos q)}{\|P_{v_k}^1(\cos q)\|^2} \Psi_k(r, t);$$

$$\Phi_k(r, t) = \sqrt{\frac{a}{2pr}} \sum_{m=0}^{M-1} \mathfrak{A}_{mk}(r)^m t^m + \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \int_0^t \frac{C_{mk}(x)}{x^m} r^m \int_0^t (t-t)^m dt \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{r}} + \right.$$

$$\left. + \int_r^a \frac{C_{mk}^1(x)}{x_m} r^m \int_0^t (t-t)^m dt \frac{1}{2\sqrt{rx}} dx \right\};$$

$$\mathfrak{A}_{mk}(x) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(b_m - b_{2m}) e^{-c_1(a-x)}}{2pa^{3/2} c_1 (v_k^3 + v_k)}; \quad C_{mk}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{A}_m - \mathfrak{A}_{2m}) e^{-c_1(a-x)}}{2pa^{5/2} c_1 (v_k^2 + v_k)};$$

$$C_{mk}^1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(g_m - g_{2m}) e^{-c_2(a-x)}}{a^{7/3} c_2 p (v_k^2 + v_k)};$$

a_m, b_m, g_m – коэффициенты, определяемые согласно [1, ф-ла (7.13.1(5))].

Зная выражения для волновых потенциалов, по формулам (2.4) определим смещения и напряжения в начальные моменты взаимодействия.

§4. Анализ численных результатов.

Наибольший интерес с точки зрения механики взаимодействия представляют напряжения $S_q(r, q)$ на конической поверхности конуса. В связи с тем, что задача решалась в предположении, что смещения $u_q(r, q, t)$ равны нулю на конической поверхности, то тем самым предполагалось, что поверхность конуса сцеплена со средой только относительно нормальных смещений. Но такое сцепление вместе с требованием отсутствия касательных напряжений реально трудно осуществить. Анализ во времени нормальных напряжений может выявить на некоторых участках возникновение положительных (растягивающих) напряжений $S_q(r, q)$. На этих участках, если не будет реализовано условие сцепления по нормальным смещениям, возникнут участки отслоения. В этом случае проблема становится нелинейной и на этих участках постановка задачи должна быть откорректирована, поэтому полезно установить границы применимости предложенной модели.

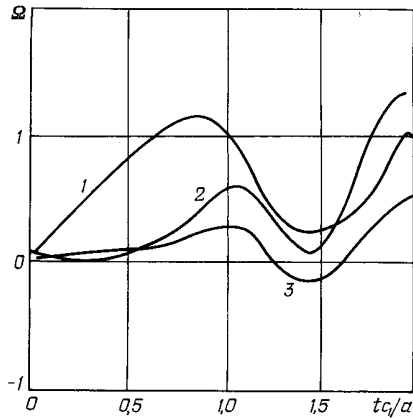


Рис. 2

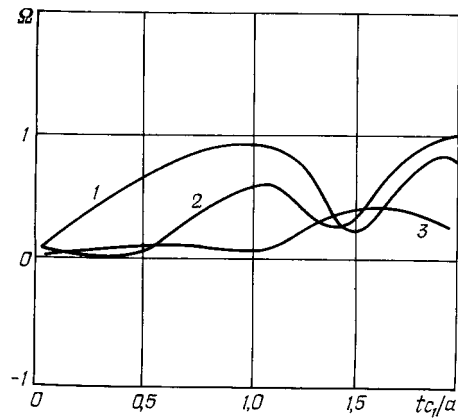


Рис. 3

Исследованы изменения величины $\Omega = s_q(r, q, t) f^{-1}(q, t)$ во времени $t^* = c_1 t / a$ в точках наблюдения $(9a/10, p/3)$, $(a/2, p/3)$, $(a/3, p/3)$ (соответственно, кривые 1, 2, 3 на рис. 2). Численный анализ показал, что на участках поверхности конуса $a/10 < r < a/3$ с течением времени возникают растягивающие напряжения, а при значениях $r < a/10$ – предложенная модель не применима.

Интерес представляет случай $w = p/2$, который приводит к исследованию волнового поля полушара при учете его собственного веса под воздействием нестационарной нагрузки на поверхность. На рис. 3 кривые 1 – 3 соответствуют точкам наблюдения $(9a/10, p/2)$, $(a/2, p/2)$, $(a/3, p/2)$. Как видно, в этом случае растягивающие напряжения на поверхности отсутствуют, и поэтому в данном случае предложенная постановка полностью оправдана. Численный расчет показал, что границы применимости модели существенно расширяются и участки отслоения появляются лишь при $r < a/24$.

Заметим, что поставленную задачу можно решить для упругого конуса, дважды усеченного по сферическим поверхностям $a_0 < r < a_1$, $0 < q < w$, $-p \leq j \leq p$, принимая, что на сферической поверхности $r = a_0$ напряжения $s_r(r, q)$ и $t_r(r, q)$ отсутствуют. В этом случае сохраняется подход, основанный на использовании волновых функций и сведении исходной задачи к векторной краевой задаче в пространстве трансформант интегральных преобразований Лапласа и преобразования по угловой координате.

Для построения решения такой задачи используется представление (3.6), но в этом случае требуется определить уже четыре неизвестных постоянных из системы линейных алгебраических уравнений. Дальнейшее разложение трансформант в ряд по обратным степеням параметра позволит получить картину волновых полей для начальных моментов времени.

РЕЗЮМЕ. Задачу визначення нестационарного хвильового поля пружного зрізаного конуса з урахуванням його власної ваги зформульовано в термінах хвильових функцій. Застосуванням інтегральних перетворень Лапласа за часом і перетворення по полярному куту цю задачу зведено до розв'язання одновимірної векторної задачі у просторі трансформант. Трансформанти хвильових функцій розвинено у ряд по обернених ступенях параметра перетворення Лапласа, що дає можливість досліджувати хвильовий процес у початкові моменти взаємодії. Запропоновано спосіб розв'язання поставленої задачі для випадку двічі зрізаного по сферичних поверхнях пружного конуса.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
2. *Вайсфельд Н.Д.* Задача про напряжений стан суцільного зрізаного конуса при впливі на нього ударного навантаження // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: Фіз.-матем. науки. – 2003. – № 5. – С. 28 – 36.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
4. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко В.А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 307 с.
5. *Попов Г.Я.* О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 12 – 46.
6. *Попов Г.Я.* Задача о напряженном состоянии упругого конуса, ослабленного терщинами // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып. 2. – С. 337 – 348.
7. *Попов Г.Я.* Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып. 3. – С. 431 – 433.
8. *Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Изд-во Рауан, 1999. – 113 с.
9. *Сабодаш П.Ф., Булычев Г.Г.* Аналитическое решение осесимметричной задачи динамики полусферического купола // Докл. РАН. – 2004. – **395**, № 4. – С. 474 – 478.
10. *Стеклов В.А.* О равновесии упругих тел вращения. – Сообщ. Харьков. матем. общ-ва. – 2-я сер. – 1892. – **3**, № 4 – 5. – С. 173 – 251.
11. *Улитко А.Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – К.: Академперіодика, 2002. – 341 с.
12. *Kenner V., Goldsmith W.* Elastic waves in truncated cone. – Experimental Mechanics. – 1967. – **В**, N 10. – P. 442 – 449.
13. *Low R., Arbor A., Weiss H.* On a Mixed Boundary Value Problem for an Infinite Elastic Cone. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). – 1961. – **13**, N3. – P. 232 – 242.
14. *Michell J.* Some elementary distributions in three dimensions // Proc. London Math. Soc. – 1900. – **32**. – P. 23 – 61.
15. *Thompson T., Little R.* End effects in a truncated semi-infinite cone // The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math. – 1970. – **23(2)**. – P. 185 – 196.

Поступила 06.07.2009

Утверждена в печать 21.10.2010