

В.И.Гуляев¹, В.В.Гайдайчук², О.В.ГлушакOVA¹

**БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА – ХОПФА В ВОЛНОВЫХ МОДЕЛЯХ
ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН**

¹ *Национальный транспортный университет,*

ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail:valery@gulyaev.com.ua

² *Киевский национальный университет строительства и архитектуры,*

пр. Воздухофлотский, 31, 03037, Киев, Украина; e-mail:viktor_gaydaychuk@bigmir.net

Abstract. A wave model of torsional vibrations of rotating drill strings is constructed. The ranges of values of the corresponding to self-vibrations regimes angular velocities are found. In the limiting these ranges states the Andronov – Hopf bifurcations are realizing. The main regularities of appearance and passing the self-vibration processes are established.

Key words: deep drill string, torsional self-vibrations, wave model, Andronov-Hopf bifurcation.

Введение.

В последние годы одним из наиболее актуальных направлений горного дела стало бурение сверхглубоких нефтяных и газовых скважин. Ведущее положение в технологии их проходки занимает роторный способ, в котором резание породы осуществляется долотом, закрепленным на нижнем конце колонны, которая подвешена в скважине за верхний конец. В этой технологической схеме вращение долота осуществляется за счет вращения всей бурильной колонны под действием на её верхний конец приводного крутящего момента.

При бурении глубоких скважин довольно сложным динамическим эффектом, способствующим возникновению аварийных ситуаций, является самовозбуждение крутильных колебаний вращающейся конструкции бурильной колонны (БК). В этом случае БК можно представить как торсионный маятник, в нижней части которого за счет фрикционного взаимодействия между долотом и разрушаемой породой генерируется эффект срывного скольжения, в результате чего процесс стационарного оттока энергии приводного механизма в окружающую среду нарушается и долото переходит от режима установившегося стационарного вращения в режим крутильных автоколебаний.

Так как долото жестко связано с конструкцией БК, при его срывных крутильных колебаниях от нижнего конца БК к её верхнему концу начинают распространяться упругие (как правило, негармонические) волны кручения, которые, достигнув верхнего конца, отражаются от него и, вернувшись к долоту, воздействуют на него, оказывая существенное влияние на форму его колебаний. Поэтому движение такой системы может быть описано только на основе математической модели волнового торсионного маятника, роль маховика в котором играет долото. Попытки изучения динамики долота с помощью таких моделей предприняты в работах [7, 8, 10, 11], однако они основаны на представлении бегущих волн кручения гармоническими функциями.

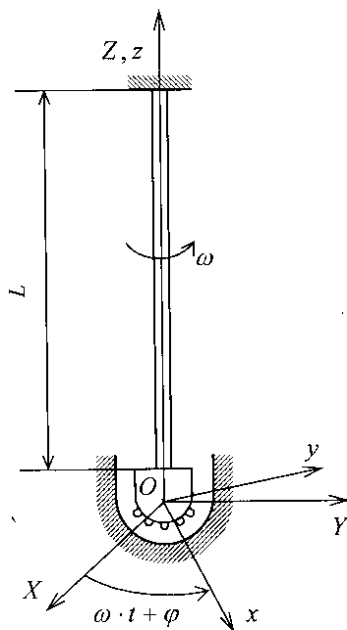


Рис. 1

В данной работе показано, что из-за отсутствия дисперсии указанных волн и возможности представления решения волнового уравнения в форме Даламбера, волновое уравнение с системой краевых условий может быть приведено к одному обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка с запаздывающим аргументом (временем t) и с варьируемым параметром угловой скорости w . В зависимости от значения этого параметра, построенное уравнение может иметь как стационарное решение $j(t) = \text{const}$, так и автоколебательное решение в виде периодической функции $j(t)$. Смена первого решения вторым называется бифуркацией Андронова – Хопфа, а значение параметра w , при котором эта смена происходит, – бифуркационным [2 – 6, 9]. Ниже на основе построенной математической модели торсионных колебаний БК найдены бифуркационные значения w для различных длин БК и установлены некоторые закономерности протекания автоколебательных процессов.

1. Математическая модель волнового торсионного маятника.

Примем, что БК представляет собой торсионный маятник, к нижнему концу которого прикреплено долото, играющее роль маховика. Верхний конец БК вращается с заданной постоянной скоростью w . Введём инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс долота, ось OZ которой совпадает с осью БК, и систему координат $Oxuz$, вращающуюся с угловой скоростью w вокруг оси OZ (рис. 1).

Движение элементов БК и долота относительно системы $Oxuz$ определяется углом упругого кручения $j = j(z, t)$.

На нижнем конце на долото действует момент сил резания (трения) M^{fr}

$$M^{\text{fr}} = M[w + \dot{j}(0, t)], \quad (1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Упругие крутильные движения БК описываются уравнением

$$rI_z \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} - GI_z \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

где r – плотность материала БК; G – его модуль упругости при сдвиге; I_z – полярный момент инерции площади поперечного сечения трубы БК.

В данной работе рассматривается БК не малой длины, колебания которой, в общем случае, перестают быть синфазными. Поэтому моделирование такой системы на базе маятникового осциллятора с одной степенью свободы является необоснованными и для анализа торсионных колебаний элементов БК следует применять волновые решения уравнения (2). Обозначив $b = \sqrt{G/r}$, где b – скорость распространения поперечной упругой волны (волны кручения), уравнение (2) приведем к стандартной форме

$$\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Дисперсионный анализ этого уравнения показывает [1], что оно имеет решение в форме Даламбера

$$j(z, t) = f(z - bt) + g(z + bt), \quad (4)$$

где $f(z - bt)$, $g(z + bt)$ – произвольные непрерывные, не обязательно дифференцируемые функции, первая из которых определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Oz , вторая – в противоположном направлении. Поскольку волны являются недиспергирующими, они перемещаются, не изменяя своего профиля, что существенно упрощает решение задачи.

Действительно, в этом случае указанные функции при $t > 0$ определяются только начальными

$$f(z - 0) = f_0(z); \quad g(z + 0) = g_0(z) \quad (5)$$

и граничными условиями на нижнем конце $z = 0$

$$F[f(0 - bt); \quad g(0 + bt)] = 0, \quad (6)$$

где F – нелинейный дифференциальный оператор, описывающий движение долота, и на верхнем конце $z = L$ –

$$j(L, t) = f(L - bt) + g(L + bt) = 0. \quad (7)$$

Условие (6) формируется с помощью уравнения баланса моментов сил инерции M^{in} , сил трения M^{fr} и сил упругости M^{el}

$$M^{in} + M^{fr} + M^{el} = 0, \quad (8)$$

вытекающего из принципа Даламбера, записанного для долота, условно отделенного от трубы БК.

Входящий в уравнение (8) момент M^{in} сил инерции, действующих на долото, подсчитывается по формуле

$$M^{in} = -J \cdot \ddot{\alpha}, \quad (9)$$

где J – момент инерции долота относительно оси Oz ; $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение долота относительно инерциальной системы координат $OXYZ$.

Момент M^{fr} определяется условиями силового взаимодействия долота с разрушаемой породой и угловой скоростью $w + \dot{\alpha}$ их относительного вращательного движения. Обычно [7, 8] этот момент задается в виде зависимости $M^{fr}(w + \dot{\alpha})$ (рис. 2), которая может быть описана с помощью аппроксимирующей функции

$$M^{fr} = \frac{a_1(w + \dot{\alpha}) + a_3(w + \dot{\alpha})^3 + a_5(w + \dot{\alpha})^5 + a_7(w + \dot{\alpha})^7 + a_9(w + \dot{\alpha})^9}{1 + a_2(w + \dot{\alpha})^2}, \quad (10)$$

где коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) определяются из экспериментов.

Момент M^{el} вычисляется с помощью равенства

$$M^{el} = GI_z \frac{\partial j}{\partial z}. \quad (11)$$

Угловая деформация $\partial j / \partial z$ подсчитывается так:

$$\left. \frac{\partial j}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z} [f(z-bt) + g(z+bt)]_{z=0}.$$

На основании условия (7) имеем $g(L+bt) = -f(L-bt)$.

Это равенство может быть использовано в качестве начального условия для исходящей от края $z=L$ волны $g(z,t) = g(z+bt) = -f(2L-z-bt)$.

Тогда имеем следующее выражение:

$$j(z,t) = f(z-bt) - f(2L-z-bt) = f(u) - f(w), \quad (12)$$

где $u = z - bt$; $w = 2L - z - bt$.

При $z=0$ получим такое равенство:

$$j(0,t) = f(-bt) - f(2L-bt) = f(-bt) - f\left[-b\left(t - \frac{2L}{b}\right)\right].$$

Таким образом, в точке $z=0$ присоединения долота к БК угол $j(0,t)$ упругого закручивания последней определяется текущим значением функции $f(-bt)$ и её «прошлым» значением $f(2L-bt)$, которое имело место в данной точке в момент времени, сдвинутый в «прошлое» на величину $\Delta t = 2L/b$. Это означает, что угол $j(0,t)$ является функцией не только текущего значения аргумента t , но и аргумента $(t - \Delta t)$ с запаздыванием времени.

Из равенства (12) следует

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \frac{\partial f(u)}{\partial z} - \frac{\partial f(w)}{\partial z} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} + \frac{\partial f(w)}{\partial w};$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} - \frac{\partial f(w)}{\partial t} = -b \frac{\partial f(u)}{\partial u} + b \frac{\partial f(w)}{\partial w}.$$

В результате сравнения этих соотношений получаем

$$\frac{\partial j}{\partial z} = -\frac{\partial f(z-bt)}{b\partial t} - \frac{\partial f(2L-z-bt)}{b\partial t}.$$

Тогда запишем равенство

$$\begin{aligned} M^{el} &= -GI_z \left[\frac{\partial f(z-bt)}{b\partial t} + \frac{\partial f(2L-z-bt)}{b\partial t} \right]_{z=0} = \\ &= -\frac{GI_z}{b} \left[\frac{\partial f(-bt)}{b\partial t} + \frac{\partial f(2L-bt)}{b\partial t} \right]_{z=0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (10),(11),(13) в (8) и учитывая (5), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающим аргументом

$$J \left[\ddot{\varphi}(-bt) - \ddot{\varphi}(2L-bt) \right] - \frac{a_1 \left[w + \dot{\varphi}(-bt) - \dot{\varphi}(2L-bt) \right]}{1 + a_2 \left[w + \dot{\varphi}(-bt) - \dot{\varphi}(2L-bt) \right]^2} + K$$

$$\mathbf{K} + \frac{a_9 \left[w + f(-bt) - f(2L - bt) \right]^9}{1 + a_2 \left[w + f(-bt) - f(2L - bt) \right]^2} + \frac{GI_z}{b} \left[f(-bt) + f(2L - bt) \right] = 0. \quad (14)$$

Данное уравнение полностью эквивалентно системе волнового уравнения с частными производными (2) и краевых уравнений (6), (7). На нижнем конце краевое уравнение (6) вытекает из условия крутильных колебаний долота при $z = 0$, на верхнем – уравнение (7) описывает взаимодействие падающей и отраженной волн в жесткой (но вращающейся) заделке. Можно заметить, что уравнение (14) не содержит функцию $f(t)$, а зависит только от её первой и второй производной. Это позволяет понизить порядок уравнения на единицу, однако на практике методика построения полного решения данного уравнения не упрощается ввиду его существенной нелинейности. В таком случае удобнее применить метод Рунге – Кутты.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= f(-bt); & q_2(t) &= f'(-bt); \\ p_1(t) &= f(2L - bt); & p_2(t) &= f'(2L - bt). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), получим

$$\mathfrak{K}_1 = q_2;$$

$$\mathfrak{K}_2 = \frac{a_1(w + q_2 - p_2) + \mathbf{K} + a_9(w + q_2 - p_2)^9}{J \left[1 + a_2(w + q_2 - p_2)^2 \right]} - \frac{GI_z}{Jb} (q_2 + p_2) + \mathfrak{K}_2, \quad (16)$$

где переменные $q_1(t)$, $q_2(t)$ являются искомыми; функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\mathfrak{K}_2(t)$ известны, они равны, соответственно, функциям $q_1(t - 2L/b)$, $q_2(t - 2L/b)$, $\mathfrak{K}_2(t - 2L/b)$, подсчитанным ранее в момент времени $t - 2L/b$.

Система (16) интегрируется численно при постоянной угловой скорости w и заданных начальных условиях $q_1(0) = q_1^{(0)}$, $q_2(0) = q_2^{(0)}$. Если моделируется процесс начала бурения (когда вращающаяся БК опускается и долото вступает в контакт с породой на дне скважины), можно положить $q_1^{(0)} = 0$, $q_2^{(0)} = 0$, $p_1(-2L/b) = 0$, $p_2(-2L/b) = 0$, $\mathfrak{K}_2(-2L/b) = 0$. Затем по истечении времени $\Delta t = 2L/b$ переменным $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\mathfrak{K}_2(t)$ следует придавать их найденные значения. Построенные решения позволяют установить режимы бурения, при которых реализуется самовозбуждение крутильных колебаний долота и колонны глубокого бурения, построить формы этих колебаний и подобрать условия бурения, исключая автоколебания системы.

Если во время бурения угловая скорость вращения w не остается постоянной, то краевое условие (7) на верхнем конце следует видоизменить, поскольку сумма волн f и g при $z = L$ перестанет быть равной нулю. Некоторые осложнения задачи получаются также, если бурильная колонна неоднородна по длине и состыкована, например, из двух участков с разными диаметрами труб. В этом случае в дополнение к краевым условиям (6), (7) необходимо добавить ещё условия отражения-преломления волн в точке сочленения.

2. Анализ особенностей волновых торсионных автоколебаний бурильных колонн.

В зависимости от инерционных и жесткостных свойств БК и выбранного режима бурения в процессе функционирования она может находиться в состояниях стационарного вращения или самовозбужденных торсионных колебаний. Вид этих колебаний определяется решениями уравнения (14), зависящими в первую очередь от вида (10) функции $M^{fr}(w + \mathcal{R})$, угловой скорости w и длины L БК. В теории нелинейных дифференциальных уравнений периодическое решение, соответствующее автоколебаниям, называется циклом, а смена стационарного равновесного решения периодическим при прохождении некоторого характерного параметра через критическое значение – рождением цикла или бифуркацией Андронова – Хопфа [2 – 4, 6]. В рассматриваемом случае параметром, определяющим стационарные и автоколебательные режимы БК, является угловая скорость вращения w .

Для установления вида самовозбуждения торсионных колебаний в бурильной колонне и анализа влияния геометрических и инерционных параметров системы на их размахи D и периоды T выбраны БК длиной $L = 1000, 2000, 4000$ м и долота с моментами инерции $J = 3,1$ и 1000 кг·м², типичными для нефтяных скважин и угольных стволов, соответственно. Значения остальных определяющих параметров задавались неизменными: $G = 8,076 \cdot 10^{10}$ Па; $b = 3218$ м/с; $I_z = 3,12 \cdot 10^{-5}$ м⁴. Функция момента сил трения $M^{fr}(w + \mathcal{R})$ определялась значениями коэффициентов $a_1 = 2400$ Н·м·с; $a_2 = 225$ с²; $a_3 = 15000$ Н·м·с³; $a_5 = 1$ Н·м·с⁵; $a_7 = 4$ Н·м·с⁷; $a_9 = -130$ Н·м·с⁹. Они подбирались таким образом, чтобы её характерные параметры (точки экстремумов и интервалы монотонности) примерно совпадали с соответствующими значениями, приведенными в [7, 8]. График построенной функции показан на рис. 2.

Во всех случаях при выбранном фиксированном значении w система (16) с начальными условиями $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0$ интегрировалась методом Рунге – Кутты с шагом по времени $\Delta t = 6,474 \cdot 10^{-6}$ с. Вычисления продолжались до тех пор, пока либо устанавливалось стационарное состояние динамического равновесия долота с некоторым углом j_{st} его поворота, либо оно переходило в режим установившихся периодических автоколебаний. Путём варьирования величины w установлено, что для заданной функции $M^{fr}(w + \mathcal{R})$ существует диапазон $w_b \leq w \leq w_d$, вне которого система

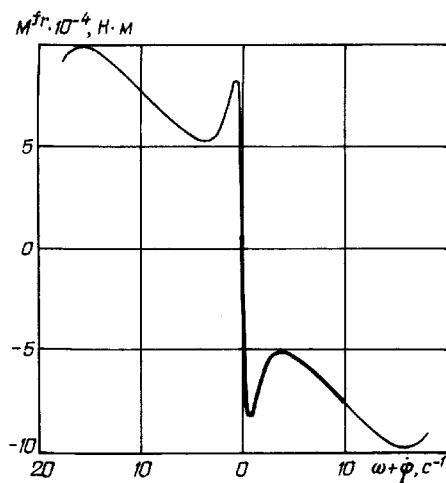


Рис. 2

из начального положения стремится к квазистатическому устойчивому равновесному состоянию $q_1 = j_{st}, q_2(t) = 0$ без возбуждения торсионных автоколебаний. При переходе параметра внутрь диапазона $w_b \leq w \leq w_d$ через значение w_b происходит бифуркация Андронова – Хопфа и рождается устойчивый цикл (автоколебательный процесс), а решение $j = j_{st}$, хотя и остается, становится неустойчивым.

Это свойство сохраняется для всех значений $w_b \leq w \leq w_d$ и при переходе параметра w вне этого диапазона через значение $w = w_d$ происходит бифуркация утраты цикла, автоколебания перестают возбуждаться и решение $j = j_{st}$ вновь становится устойчивым.

В таблице приведены величины w_b и w_d для трёх выбранных значений L и двух значений J . Как видно, они практически не зависят от этих величин и получают малые изменения в окрестности бифуркационных угловых скоростей $w_b = 0,72 \text{ рад/с}$, $w_d = 3,7 \text{ рад/с}$. Однако расчеты при других значениях коэффициентов a_i функции M^{fr} показали, что влияние её вида на бифуркационные величины w_b , w_d является решающим.

w , j_{st} , j_{av} , D , T	1000				$L = 2000$				$L = 4000$			
	$J = 3,1$		$J = 1000$		$J = 3,1$		$J = 1000$		$J = 3,1$		$J = 1000$	
	w_b	w_d	w_b	w_d	w_b	w_d	w_b	w_d	w_b	w_d	w_b	w_d
w , рад/с	0,71	3,775	0,725	3,85	0,725	3,75	0,725	3,825	0,73	3,7	0,725	3,79
$-j_{st}$, рад	32,7	33,2	32,7	34	62,6	65,9	65,2	67,5	130,5	130,1	130,3	133,5
$-j_{av}$, рад	26,3	26,8	25,28	27	52,6	53,3	51,6	54,1	103,3	104,1	104,2	107,4
D , рад	12,8	12	14,5	13	25,5	25,3	27,4	27	50,1	48,5	52,5	52,3
T , с	47,5	8,2	49,5	9,33	90,6	15,56	92,67	17,2	170,6	32,25	179,3	35,6

Прокомментируем особенности динамического поведения системы в окрестности бифуркационного состояния $w = w_b$ на примере БК длиной $L = 4000$ м с моментом инерции долота $J = 3,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. В этом случае левее точки бифуркации $w_b = 0,73 \text{ рад/с}$ (при $w = w_b - 0$) долото, начиная двигаться из положения $j(0) = 0$; $\mathcal{R}(0) = 0$, быстро приходит в стационарное состояние $j_{st} = -130,5 \text{ рад}$, $\mathcal{R}_{st} = 0$ и далее продолжает вращаться с угловой скоростью $w = w_b = 0,73 \text{ рад/с}$, не совершая колебаний. Однако при значении $w = w_b + 0$ долото, двигаясь на начальном этапе по той же траектории, достигает значения $j = -130,5 \text{ рад/с}$ (рис. 3) и далее срывается в колебательный процесс. Эти колебания сразу принимают установившийся характер и происходят с размахом $D = 50,1 \text{ рад}$ и с периодом $T = 170,6$ с около среднего положения $j_{av} = -103,25 \text{ рад}$.

Важно отметить форму этих колебаний, для которой каждый период может быть разделен на разграниченные этапы, соответствующие медленным и быстрым изменениям системы. Эти изменения особенно чётко заметны на графике зависимости от времени угловой скорости $\mathcal{R}(t)$ (рис. 4), которые можно рассматривать как разрывные. В теории автоколебаний такие движения называются релаксационными, в отличие от гладких траекторий, называемых томсоновскими [5]. Наиболее полно такие колебания изучены в радиотехнике, электротехнике и автоматике, благодаря их легкому экспериментальному моделированию и наблюдению на осциллографических экранах. В механике эти явления моделировать сложнее.

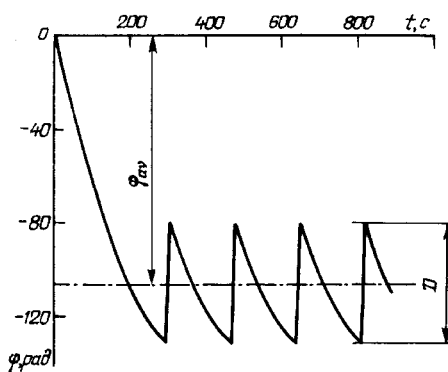


Рис. 3

Кроме того, в рассматриваемой задаче обнаружен новый эффект, присущий только волноводным системам. Установлено, что колебания имеют квантованный во времени характер. Так, если участок кривой $40 \leq t \leq 120$ с на рис. 4 рассмотреть в увеличенном масштабе (рис. 5), то окажется, что она является кусочно постоянной, причем длина каждой временной ступеньки во времени составляет $\Delta t = 2,486$ с, что равно времени прохождения волной кручения длины $2L$ пути снизу от долота вверх до точки подвеса БК и обратно, т.е. $\Delta t = 2L/b = 2,486$ с.

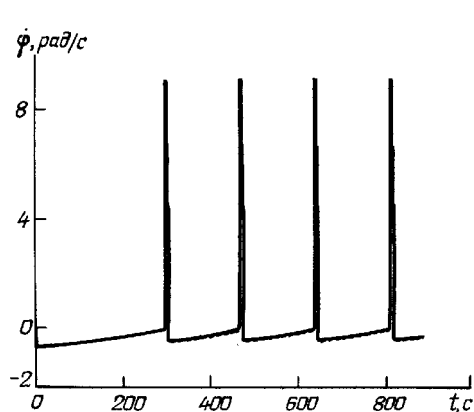


Рис. 4

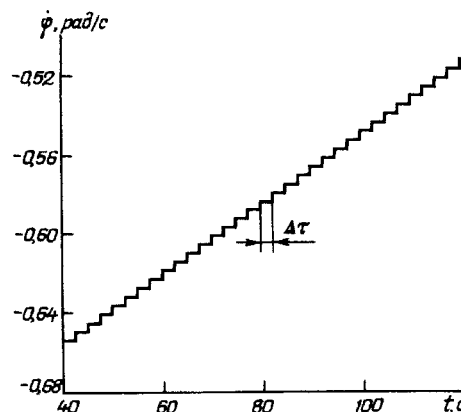


Рис. 5

Отметим, что почти разрывной характер изменения скорости $\dot{\varphi}$ упругого поворота долота проявляется в данной модели, несмотря на то, что коэффициенты в системе (16) и нелинейности в равенстве (10) являются непрерывными, гладкими и дифференцируемыми. По-видимому, это связано с тем, что система самонастраивается на генерирование в торсионном волноводе слабых ударных волн, т.е. волн с разрывами первых производных, которые порциями (квантами) распространяются вверх от долота, отражаются от верхнего конца БК, возвращаются, бьют по долоту, вызывают его квантованное движение и т.д. Поскольку в местах разрывов функции скорости, ускорения (а также крутящие моменты) приобретают импульсные значения, такие режимы автоколебаний долота представляют существенную опасность для динамической прочности системы и их не следует считать допустимыми.

Релаксационный характер автоколебаний хорошо виден также на их фазовом портрете (рис. 6). На нём есть участки, где угол $j(t)$ изменяется при постоянной скорости

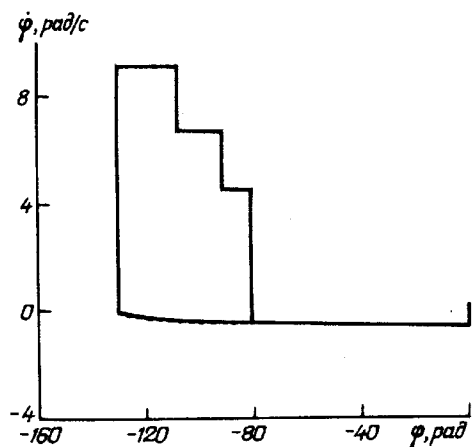


Рис. 6

и, наоборот, скорость $\dot{\varphi}(t)$ изменяется при неизменной величине $j(t)$. Такой режим движения является основным признаком релаксационных колебаний [5].

Отметим, что на рис. 2 показана функция $M^{fr}(w + \dot{\varphi})$, соответствующая заданным коэффициентам a_i . На ней более жирной линией выделен участок, в пределах которого она изменяется при установившихся автоколебаниях. Видно, что M^{fr} периодически переходит через своё экстремальное значение.

При исследовании автоколебаний бывает важно также установить тип самовозбуждения. В фазовом пространстве периодическим автоколебаниям соответствует замкнутая траектория, к которой стремятся все соседние траектории. Поэтому она носит название аттрактора [3 – 6]. В случаях, когда для перехода механической системы от некоторого начального состояния в режим автоколебаний не требуется дополнительного толчка, такой переход называется мягким самовозбуждением. Если колебания начинают самопроизвольно нарастать только с некоторой предельной амплитуды, то возбуждение называется жестким. Для перехода упругой системы в режим устойчивого жесткого генерирования колебаний необходимо начальное возбуждение (импульс) с амплитудой, большей некоторого критического значения. Как показали расчеты при различных начальных условиях, для сформированной модели режим автоколебаний не зависит от исходных возмущений, поэтому самовозбуждение является мягким.

Рассмотренный пример относится к случаю сравнительно малого долота с моментом инерции J , намного меньшим момента инерции самой БК. При таких соотношениях их масс можно принять, что на нижнем конце БК реализуются условия свободного края, вследствие чего и осуществляются квантованные во времени колебания. Однако можно ожидать, что если момент инерции J существенно увеличить, то долото будет играть роль поглотителя ударных импульсов и функция $\mathcal{R}(t)$ перестанет быть кусочно-постоянной. Для проверки этого предположения выполнены расчеты автоколебаний системы при $J = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Построенные в состоянии бифуркации рождения цикла при $w_b = 0,725 \text{ с}^{-1}$ функции $j(t)$ и $\mathcal{R}(t)$ для БК длиной $L = 4000 \text{ м}$ внешне качественно не изменились по сравнению со случаем малого момента инерции долота, проиллюстрированного на рис. 3, 4, поэтому их графики здесь не приведены. Однако функция $\mathcal{R}(t)$ в более крупном масштабе перестала быть ступенчатой и приобрела характер осциллирующей кривой (рис. 7). При этом более сглаженную форму принял и фазовый портрет (рис. 8).

Численное исследование автоколебаний БК при различных значениях L , J и w позволило установить некоторые закономерности их возникновения и протекания (таблица).

Самая важная особенность заключается в том, что бифуркационные значения угловой скорости рождения (w_b) и утраты (w_d) цикла практически не зависят от длины L БК и от значения J момента инерции долота и, по-видимому, определяется только видом функции $M^{fr}(w + \mathcal{R})$. Поэтому представляется возможным вначале экспериментально определять на малых глубинах L значения w_b , w_d и затем использовать их при проектировании технологии проходки всей скважины.

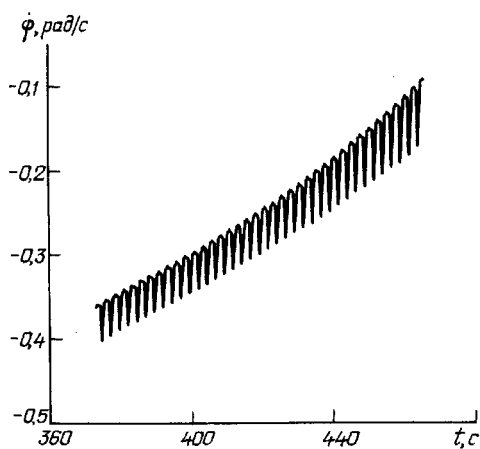


Рис. 7

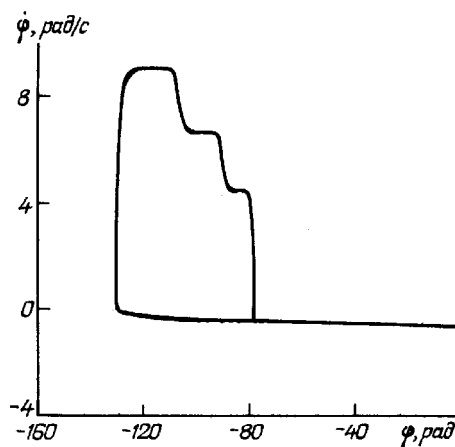


Рис. 8

Интересно также то, что угол j_{st} закручивания долота при стационарном вращении, среднее значение угла j_{av} , относительно которого происходят автоколебания, и размах D колебаний мало зависят от J , w_b и w_d , но изменяются линейно с изменением L .

Из общей теории автоколебаний известно [2, 3, 5], что их амплитуда и период T определяются только параметрами системы. Это отличает их как от собственных колебаний, период которых определяется параметрами системы, а амплитуда и фаза – начальными условиями, так и от вынужденных колебаний, амплитуда, период и фаза которых определяется внешней силой. В связи с этим имеет смысл сопоставить найденные значения периодов T автоколебаний с периодами T_1 собственных колебаний БК по наименьшей частоте. Как следует из таблицы, значения T мало изменяются с увеличением J , поэтому будем вычислять T_1 при $J = 0$. Уравнение крутильных колебаний БК выбираем в виде (3).

При граничных условиях $\partial j / \partial z|_{z=0} = 0$ и $j(L) = 0$ решение строим в форме

$$j(z, t) = A \sin \frac{p}{2L}(L - z) \cdot \sin k_1 t, \quad (17)$$

где k_1 – первая круговая частота свободных колебаний.

Подставляя (17) в (3), получаем $k_1 = pb/2L$, откуда $T_1 = \frac{2p}{k_1} = \frac{4L}{b}$.

Как видим, T_1 также линейно зависит от L , однако при заданных $L = 1000, 2000, 4000$ м соответствующие им величины $T_1 = 1,243; 2,486; 4,972$ с существенно отличаются от бифуркационных значений T_b, T_d .

Заклучение.

В данной статье построена волновая модель торсионных колебаний вращающихся колонн глубокого бурения. Найдены диапазоны значений угловых скоростей вращения, соответствующие режимам автоколебаний. В состояниях, ограничивающих эти диапазоны, реализуются бифуркации Андронова – Хопфа. Установлены основные закономерности наступления и протекания автоколебательных процессов.

РЕЗЮМЕ. Побудовано хвильову модель торсіонних коливань обертових колон глибокого буріння. Визначено діапазони значень кутових швидкостей обертання, що відповідають режимам автоколивань. В станах, які обмежують ці діапазони, реалізуються біфуркації Андронова – Хопфа. Встановлено основні закономірності появи та перебігу автоколивальних процесів.

1. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – М.: Наука, 1966. – 367 с.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фурфав Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 382 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – М.: Наука, 1980. – 364 с.
4. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. – М.: Наука, 1980. – 368 с.
5. Рабинович М.К., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн – М.: Наука, 1984. – 432 с.
6. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн Н. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

7. *Ford B. J.* The genesis of torsional drill string vibrations // SPE Drill. Eng. – 1992. – 7, N 9. – P. 168 – 174.
8. *Jansen J.D., Van den Steen L.* Active damping of self-excited torsional vibrations in oil well drillstrings // J. Sound and Vibr. – 1995. – 179, N 4. – P. 647 – 668.
9. *Lobas L.G., Khrebet V.G.* Bifurcated formation of a limit cycle from a stable focus and evaluation of the region of attraction in two-unit pendulum systems with oscillation // Int. Appl. Mech. – 1993. – 29, N 9. – P. 731 – 737.
10. *Mihailovic N., Van de Wouw N. Hendriks M.P., Nijmeijer H.* Friction-induced limit cycling in flexible rotor systems: An experimental drill-string set-up // Nonlin. Dynamics. – 2006. – 46. – P. 273 – 291.
11. *Tucker R.W., Wang C.* An integrated model for drill-string dynamics // J. Sound and Vibr. – 1999. – 224, N1. – P. 101 – 122.

Поступила 03.06.2009

Утверждена в печать 15.06.2009
