

В. В. Чехов

**МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

*Таврический национальный университет,
пр. Вернадского, 4, 95007, Симферополь, Украина; e-mail: v_chekhov@ukr.net*

Abstract. An equation of the finite element method, which describes the large strains in the tensor-matrix form, is proposed. The equation is simplified and then modified with aim to describe the deformation of bodies from incompressible materials. The results of test analysis are given.

Key words: equation of the finite element method, tensor based matrix, large strain, Finger strain measure, incompressible material.

Введение.

Реализация существующих методов расчёта тел с учётом больших деформаций, используя метод конечных элементов (МКЭ), представляет собой достаточно сложную задачу. МКЭ является матричным методом, однако наиболее естественной для соотношений нелинейной механики является тензорная форма. Она достаточно широко используется для вывода соотношений МКЭ [1, 2, 6, 8, 17 и др.]. Для программной реализации полученные тензорные уравнения МКЭ чаще всего преобразуются к матричному виду. В работах [10, 13, 15] использованы формы уравнений МКЭ, которые могут быть непосредственно, без дополнительных преобразований, использованы при практической реализации. В частности, в работе [10] на основании более общего понятия матриц (у которых в качестве элементов могут выступать не только числа, но и тензоры произвольных рангов) получено уравнение МКЭ, описывающее состояние тела из изотропных материалов, находящегося под действием «мёртвых» внешних нагрузок при больших деформациях. В отличие от линеаризованного инкрементального подхода, ныне повсеместно используемого, например, в упомянутых выше работах, уравнение описывает конечное состояние процесса деформирования и не требует последовательных нагружений (такой подход был одним из распространённых в геометрически нелинейном МКЭ (1960 – 1970 гг. [5]). Процесс практической реализации полученного уравнения приводит к некоторым упрощениям и преобразованиям, которые описываются в данной работе.

§1. Постановка задачи.

Ниже тензоры 1-го ранга обозначаются сверху стрелкой, 2-го ранга — полужирным шрифтом. Чтобы различать тензорные и матричные индексы, последние (т.е. номера узлов и элементов) будем помещать в квадратные скобки. Индексы, не являющиеся тензорными либо матричными, будем ставить слева от индексируемой величины. Величины, относящиеся к исходной (недеформированной) конфигурации, будем обозначать нуликом сверху. Тензоры 2-го ранга, разные индексы которых относятся к разным конфигурациям (так называемые «двойные» тензоры), будем обозначать сверху парами из нуля и t , обозначающими, к какой конфигурации относится соответствующий индекс (нуль – к исходной, t – к деформированной). Величины, относящиеся к локальной системе координат конечного элемента (КЭ), обозначим сверху буквой α (обозначающей номер данного КЭ).

При формулировке матричного уравнения используем следующие исходные положения и уравнения механики деформируемых твердых тел, тензорные величины и соотношения:

вариационный принцип стационарности потенциальной энергии для деформированного упругого тела, находящегося в равновесии под действием «мёртвых» внешних нагрузок [4] (выбрана формулировка с интегрированием по начальной конфигурации)

$$\iiint_v^0 \delta \Pi dv - \iiint_v^0 \rho \bar{k} \cdot \delta \bar{r} dv - \iint_{\gamma_f}^0 \bar{f} \cdot \delta \bar{r} d\gamma = 0, \quad (1.1)$$

где \bar{k} и \bar{f} – векторы, соответственно, внешних массовых сил и «мёртвых» внешних поверхностных сил, заданных на части внешней поверхности тела, обозначенной γ_f ; в качестве неизвестной функции рассматривается радиус-вектор произвольной точки тела в деформированном состоянии \bar{r} ;

одна из сопряжённых по Хиллу «энергетических» пар тензоров, образующих элементарную работу [7]

$$\delta \Pi = \mathbf{P} \cdot \delta (\bar{\nabla} \bar{r})^T,$$

состоящая из градиента места $\bar{\nabla} \bar{r}$ [4] (или из градиента деформации $(\bar{\nabla} \bar{r})^T$ [7]) и тензора напряжений Пиола [4] (в [7] он назван номинальным тензором напряжений)

$$\mathbf{P} = J (\bar{\nabla} \bar{r})^{-1T} \cdot \mathbf{T},$$

где $J = dv / d v^0$ – кубический инвариант градиента места; \mathbf{T} – тензор истинных напряжений Коши;

мера деформации Фингера [4] (Коши – Эйлера [7]) $\mathbf{b} = (\bar{\nabla} \bar{r})^T \cdot \bar{\nabla} \bar{r}$;

уравнение состояния изотропного упругого тела в форме Фингера [4]

$$\mathbf{T} = 2J^{-1} \left({}_0\Psi \mathbf{1} + {}_1\Psi \mathbf{b} + {}_2\Psi \mathbf{b}^2 \right), \quad (1.2)$$

где ${}_0\Psi$, ${}_1\Psi$ и ${}_2\Psi$ – заданные функции от инвариантов тензора \mathbf{b} , определяемые используемой моделью материала; $\mathbf{1}$ – единичный (метрический) тензор;

аппроксимация МКЭ неизвестного радиус-вектора деформированной конфигурации

$$\bar{r}(\bar{r}) = \sum_i \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{[\alpha i]}^0(\bar{r}) \cdot \bar{R}_{[i]},$$

где $\mathbf{v}_{[\alpha i]}$ – базисная функция («функция формы»), относящаяся к α -му КЭ и i -му узлу сетки (полагаемая тождественно равной нулю, если i -ый узел не принадлежит α -му КЭ), $\bar{R}_{[i]}$ – радиус-вектор i -го узла в деформированном состоянии; внешнее суммирование производится по всем узловым точкам конструкции, внутреннее – по всем КЭ.

На основании данных соотношений обычным способом строится уравнение МКЭ [10], описывающее равновесное состояние системы, нагруженной заданными внешними нагрузками, без ограничения на уровни деформации; это уравнение имеет такой вид:

$$2 \sum_{\alpha} \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 \left({}_0\Psi \left(\sum_m \bar{\nabla} \mathbf{v}_{[\alpha m]} \cdot \bar{R}_{[m]} \right)^{-1} + {}_1\Psi \sum_j \left(\bar{\nabla} \mathbf{v}_{[\alpha j]} \cdot \bar{R}_{[j]} \right)^T + \right.$$

$$+ {}_2\Psi \sum_l \sum_k \sum_j \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{V}_{[\alpha l]} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{[l]} \right)^T \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{V}_{[\alpha k]} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{[k]} \right) \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{V}_{[\alpha j]} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{[j]} \right)^T \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{V}_{[\alpha i]} d^0 v = \bar{f}_{[i]}, \quad (1.3)$$

где $\bar{f}_{[i]}$ – вектор внешней нагрузки в i -ом узле. Для интегрирования в локальных координатах конечных элементов градиент преобразуется как $\overset{0}{\nabla} = \overset{0}{\nabla} \bar{r} \cdot \overset{\alpha}{\nabla} = (\overset{\alpha}{\nabla} \bar{r})^{-1} \cdot \overset{\alpha}{\nabla}$.

§2. Упрощение уравнения.

Исходя из аналогии с матричной формой МКЭ, функция формы может быть более детально определена как шаровой тензор следующего вида:

$$\mathbf{V}_{[\alpha i]}(\bar{r}) = N_{[\alpha i]}(q^j) \mathbf{1},$$

где $N_{[\alpha i]}$ – скалярная функция формы, зависящая от локальных координат конечного элемента q^j .

Учитывая вышеизложенное, а также используя очевидные тензорные тождества

$$(\bar{a}\bar{b})^T = \bar{b}\bar{a}; \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T; \quad \mathbf{A} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \mathbf{A}^T,$$

уравнение (1.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\alpha} \iiint_{v_{[\alpha i]}} \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha m]} \bar{\mathbf{R}}_{[m]} \right)^{-1} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} + {}_1\Psi \sum_j \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \right) \bar{\mathbf{R}}_{[j]} + \\ & + {}_2\Psi \sum_l \sum_k \sum_j \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha l]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \right) \left(\bar{\mathbf{R}}_{[k]} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{[j]} \right) \bar{\mathbf{R}}_{[l]} d^0 v = \bar{f}_{[i]}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В данном уравнении скалярные произведения, представленных в круглых скобках, являются скалярами (в исходном варианте стоят тензоры 2-го ранга) – такое понижение ранга тензоров позволит заметно сэкономить память и количество арифметических операций при программной реализации.

§3. Учёт несжимаемости материала. При использовании уравнения (2.1) для создания симуляционной программы, моделирующей работу резиновых уплотнителей, оно потребовало модификации, так как резина принимается несжимаемым материалом. Для несжимаемых материалов уравнение состояния вместо (1.2) принимает вид [4]

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2 {}_1\Psi \mathbf{b} + 2 {}_2\Psi \mathbf{b}^2,$$

где p – неизвестное гидростатическое давление, учёт которого необходим для обеспечения постоянства объёма материальных частиц.

С учётом этого уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \iiint_{v_{[\alpha i]}} \left(-p \left(\sum_m \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha m]} \bar{\mathbf{R}}_{[m]} \right)^{-1} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} + 2 {}_1\Psi \sum_j \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \bar{\mathbf{R}}_{[j]} + \right. \\ & \left. + 2 {}_2\Psi \sum_l \sum_k \sum_j \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha l]} \right) \left(\bar{\mathbf{R}}_{[j]} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{[k]} \right) \bar{\mathbf{R}}_{[l]} \right) d^0 v = \bar{f}_{[i]}. \end{aligned}$$

Чтобы дискретизировать континуальное неизвестное p , которое не даёт системе быть алгебраической и поскольку реальное распределение p по КЭ не представляет интереса для практических задач, введём в систему вместо p его «взвешенно усреднённое» по КЭ значение $p_{[\alpha i]}$. Тогда имеем

$$\iiint_{v_{[\alpha]}}^0 p \left(\sum_m^0 \bar{\nabla} N_{[\alpha m]} \bar{R}_{[m]} \right)^{-1} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} d v = p_{[\alpha]} \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 \left(\sum_m^0 \bar{\nabla} N_{[\alpha m]} \bar{R}_{[m]} \right)^{-1} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} d v.$$

Кроме дискретизации p , в систему также следует добавить и уравнения, представляющие собой осреднённое по каждому КЭ условие несжимаемости материала [5]

$$v_{[\alpha]} - v_{[\alpha]}^0 = \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 (III - 1) d v = 0,$$

где III – кубический инвариант тензора меры деформации (в качестве его в данном случае можно выбрать градиент места либо тензор деформации Фингера).

Окончательно, в матричной форме система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\bar{K}(\{\bar{R}\}, \{p\})\} + 2([L] + {}^{[4]}[M]\{\bar{R}\})\{\bar{R}\} - \{\bar{f}\} &= \{\bar{0}\}; \\ \{CV(\{\bar{R}\})\} &= \{0\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь операция скалярного произведения относится к *компонентам* матриц и векторов, а матрицы подчиняются обычному матричному умножению. Неизвестными являются векторы-столбцы $\{\bar{R}\}$ (с компонентами – узловыми радиус-векторами деформированной конфигурации, тензорами 1-го ранга) и $\{p\}$ (компоненты – вышеуказанные усреднённые элементные давления). Величины $\{\bar{K}\}$, $[L]$ и ${}^{[4]}[M]$, размерность пространства которых равна общему количеству узлов, являются результатом ассамблирования соответствующих величин элементов (т.е. $\{\bar{K}\} = \sum_{\alpha} \{\bar{K}_{[\alpha]}\}$, $[L] = \sum_{\alpha} [L_{[\alpha]}]$,

${}^{[4]}[M] = \sum_{\alpha} {}^{[4]}[M_{[\alpha]}]$), имеющих следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{[\alpha i]} &= -p_{[\alpha]} \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 \left(\sum_m^0 \bar{\nabla} N_{[\alpha m]} \bar{R}_{[m]} \right)^{-1} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} d v; \quad L_{[\alpha ij]} = \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 {}_1\Psi \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha j]} d v; \\ M_{[\alpha ijkl]} &= \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 {}_2\Psi \left(\bar{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \left(\bar{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha l]} \right) d v. \end{aligned}$$

Матрица $[L]$ симметрична, так как скалярное произведение тензоров 1-го ранга коммутативно. Четырёхмерная матрица (массив) ${}^{[4]}[M]$ симметрична по первой и последней парам индексов, а также по перестановке этих пар. При всех последовательных умножениях данной матрицы на векторы полагается, что в матричном умножении участвует её последний индекс (аналогично скалярному произведению у тензоров).

Вектор $\{CV\}$ с размерностью, равной общему количеству КЭ, имеет следующие компоненты:

$$CV_{[\alpha]} = \iiint_{v_{[\alpha]}}^0 \left(III(\bar{\nabla} \bar{r}) - 1 \right) d v.$$

Заметим, что кроме вектора-столбца $\{\bar{K}\}$, который явно зависит от вектора неизвестных $\{\bar{R}\}$, от $\{\bar{R}\}$ зависят также и матрицы $[L]$ и ${}^{[4]}[M]$ (так как они содержат функции ${}_1\Psi$ и ${}_2\Psi$, зависящие, в общем случае, от текущего уровня деформации, а значит и от вектора неизвестных). Этот факт препятствует разделению процесса решения задачи на стадию сборки матриц и стадию решения системы алгебраических уравнений, т.е. все матрицы требуют пересчёта в процессе итерационного решения системы. Хотя

здесь возможно использование итерационных схем, позволяющих пересчитывать матрицы не на всех шагах (однако, применение в таких схемах вектора $\{\bar{K}\}$ проблематично – для этого требуется (хотя бы приближённо) вынести столбец узловых неизвестных текущего КЭ за пределы обратного тензора).

§4. Тестовые примеры.

В настоящее время исследование геометрически нелинейных задач продолжает оставаться актуальным [14, 18, 19 и др.]. Полученное уравнение (3.1) представляет интерес с точки зрения численного решения существенно нелинейных задач – таких, которые проблематично решать широко распространёнными на данный момент инкрементальными методами (например, у последних до сих пор имеют место проблемы при определении точек бифуркации [11]).

Ниже рассмотрены *два тестовых примера* решения нелинейных задач. В качестве модели материала использован двухконстантный материал Муни – Ривлина [3, 4] (${}_1\Psi = {}_1C + I(b) {}_2C$, ${}_2\Psi = -{}_2C$). Система уравнений реализована в виде приложения, позволяющего исследовать задачи плоской деформации, моделируемые прямоугольными КЭ. Для решения использован метод Ньютона (на базе библиотеки подпрограмм gsl [12]). Поскольку у нелинейных задач возможно существование многих решений, использовано предположение о том, что для получения искомого решения следует как можно ближе к нему указать начальное приближение. Результаты тестовых расчётов показали, что при наличии сходимости это предположение подтверждается (процесс сходился за 4 – 8 итераций). Сходимость достигается не во всех случаях, на неё может повлиять, кроме начального приближения, например, выбор свойств используемых материалов.

В первом тестовом примере рассмотрена ферма с прощёлкиванием («ферма Мизеса» [16]); ввиду симметрии задачи рассмотрена половина конструкции – один стержень (длина 8 см), смоделированный восьмью прямоугольными КЭ. Константы материала равны: ${}_1C = {}_2C = 10^{-2}$ МПа. При нулевой внешней нагрузке получены все три решения: исходное состояние, состояние после прощёлкивания и промежуточное неустойчивое. Они отражены на рис. 1. Наибольший интерес представляет промежуточное состояние. Пунктиром обозначено начальное приближение, использованное для поиска этого состояния. Видим, что характер решения правильно отражает фактически имеющуюся в стержне (вследствие упрощённости модели) начальную кривизну упругой линии. При увеличении значений констант материала наблюдалась расходимость итерационного процесса при поиске промежуточного решения.

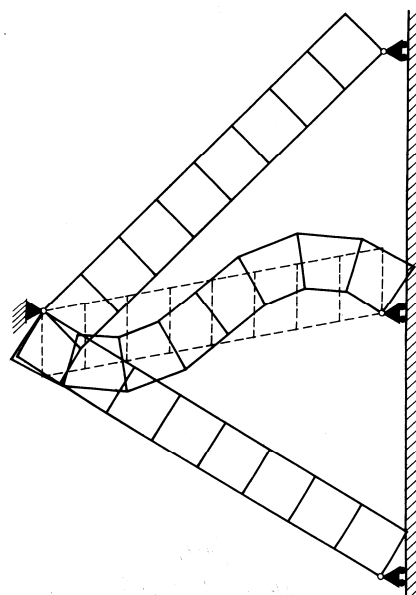


Рис. 1

Во втором тестовом примере рассмотрен цилиндр бесконечной длины, также при отсутствии внешней нагрузки. Ввиду симметрии задачи расчётная модель представлена половиной цилиндра. Используются константы реального материала (ненаполненная резина на основе каучука СКИ-3, содержащая метиловые эфиры ЖКТМ) ${}_1C = 0,15$ МПа; ${}_2C = 0,094$ МПа. У этой задачи имеется два очевидных решения: исходное состояние (недеформированное) и состояние, «вывернутое» наизнанку. Полученные решения показаны на рис. 2. Пунктиром показано начальное приближение, использованное для поиска «вывернутого состояния». Для этого состояния отображено также распределение компонент тензора напряжений Коши (в МПа) вдоль радиуса

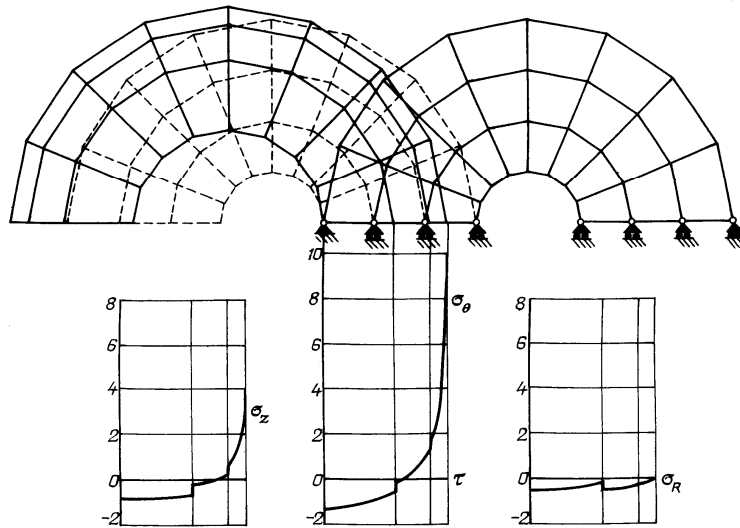


Рис. 2

цилиндра, находящегося в «вывернутом состоянии»: кольцевая σ_θ и касательная τ компоненты, радиальная σ_R и осевая σ_z . Здесь следует учитывать, что у МКЭ-приложений, базирующихся на вариационном принципе (1.1), напряжения вычисляются более грубо, чем перемещения, и могут иметь разрывы на границах КЭ. Полученное решение качественно соответствует физическому смыслу: в нём сохраняются начальные площади элементов (в соответствии с условием несжимаемости), а угловая и поперечная компоненты напряжения соответствуют сжатию на внутреннем и растяжению на наружном радиусах деформированного состояния, радиальная компонента – сжатию, исчезающему на граничных радиусах цилиндра (на одной из границ точность расчёта оказалась невелика); сдвиговые напряжения отсутствуют. Это решение можно сопоставить с имеющимися теоретическими результатами [4, 7]. В [4] преобразование между радиусами исходной и деформированной конфигураций даётся соотношением

$$r = \sqrt{\beta^0 (r_{\text{внут.}}^2 - r^2) + r_{\text{внут.}}^2}.$$

Здесь $r_{\text{внут.}}$ — внутренний радиус цилиндра. Значение угловой компоненты напряжения на граничных радиусах имеет вид

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\beta} \left(\frac{r^2}{r^2 \beta} - \frac{r^2 \beta}{r^2} \right) ({}_1C \beta^2 + {}_2C).$$

Для вычисления значений граничных радиусов деформированной конфигурации и коэффициента β следует решить систему трёх нелинейных алгебраических уравнений [4] (два из них получены с использованием модели материала Муни – Ривлина, ещё одно – более простой неогуковской). Результаты расчёта характеристик рассматриваемой задачи по методике [4] и их сопоставление с результатами МКЭ-расчёта, приведено в таблице. Видно, что при расчёте деформированного состояния различие в результатах возрастает при приближении к внутренней границе исходного состояния, а для напряжённого состояния – к внешней, хотя в целом различие невелико.

Результат	Радиус деформированной конфигурации r				Напряжение σ_θ	
	$r=3$	$r=6$	$r=9$	$r=12$	$r=3$	$r=12$
Теория	11,63	10,65	8,78	5,10	8,80	-2,02
Расчёт	12,87	11,78	9,65	5,55	8,99	-1,36

Приведённые тестовые примеры иллюстрируют адекватность полученной системы уравнений (3.1). Важной особенностью системы является её тензорно-матричная форма, позволяющая без излишних преобразований переходить от теоретических построений к программной реализации. Качество сходимости процесса решения системы можно повысить путём применения решателей, использующих коррекцию сходимости метода Ньютона или базирующихся на более совершенных методах (например, [9]).

Заключение.

В данной статье получена система уравнений МКЭ, описывающая деформированное состояние тела из несжимаемых материалов при произвольно больших уровнях деформаций, приведены тестовые расчеты.

РЕЗЮМЕ. Дано розв'язок рівняння методу скінченних елементів, яке описує великі деформації нестисливого матеріалу у тензорно-матричній формі. Це рівняння спрощується, а також модифікується з метою опису деформування тіл з нестисливих матеріалів. Наведено два приклади тестових розрахунків.

1. Бухарев Ю.Н., Чурилов Ю.А. Исследование закритического поведения оболочечных конструкций // Вест. ННГУ. Сер. Механика. – 2000. – Вып. 2. – С. 161 – 165.
2. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 6. – С. 36 – 43.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: «А.С.К.», 2004. – 672 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 466 с.
6. Семёнов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Тр. Международ. конф. «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения». – (С.-Петербург. 14 – 17 октября 2003). – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – С. 466 – 480.
7. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 256 с.
8. Arciniega R.A., Reddy J.N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 2007. – **196**. – P. 1048 – 1073.
9. Bouaricha A., Schnabel R.B. Tensor methods for large sparse systems of nonlinear equations // Math. Program. – 1998. – **82**, N 3. – P. 377 – 400.
10. Chekhov V.V. Tensor-based matrices in geometrically non-linear FEM // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2005. – **63**, N 15. – P. 2086 – 2101.
11. Felippa C.A. Nonlinear Finite Element Methods (ASEN 5107) Course Material. – Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder, 2007. – Ch. 1. Overview. <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/NFEM.d/NFEM.Ch01.d/NFEM.Ch01.pdf>
12. GNU scientific library. <http://www.gnu.org/software/gsl/>
13. Jeremic B., Sture S. Tensor Objects in Finite Element Programming // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1998. – **41**. – P. 113 – 126.
14. Maksimuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Using Mesh-Based Methods to Solve Nonlinear Problems of Statics for thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 1. – P. 32 – 56.
15. Miller G.R., Arduino P., Jang J., Choi C. Localized tensor-based solvers for interactive finite element applications using C++ and Java // Comp. and Struct. – 2003. – **81**. – P. 423 – 437.
16. Mises R. Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. – 1923. – **3**, N 6. – P. 406 – 462.
17. Rojc T., Stok B. About finite element sensitivity analysis of elastoplastic systems at large strains // Comp. and Struct. – 2003. – **81**. – P. 1795 – 1809.
18. Semenyuk N.P., Trach V. M., Ostapchuk V.V. Nonlinear Axisymmetric Deformation of Anisotropic Spherical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1101 – 1111.
19. Shimanovskii A.V., Shalinskii V.V. Physically and Geometrically Nonlinear Deformation of Bars: Numerical -Analytic Problem Solving // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 5. – P. 572 – 577.