А . А . М а р т ы н ю к ,   А . С . Х о р о ш у н

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕТОЧНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. The concept of parametric stability is applied to investigate the stability properties of the singularly perturbed systems, which contain some parameters. A region of parameter space with property of parametric stability is found. As an example, the problem is considered on control of the electric motor of direct current.

Key words: parametric stability, singularly perturbed system, Lyapunov function, slow system, fast system, electric motor of direct current.

Введение.

Реальная физическая система может состоять из подсистем, которые имеют различную ответную реакцию на внешние возмущения. Математической моделью такой системы является система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,z); \\ \varepsilon\dot{z} = g(x,z), \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^n$ и $z \in R^m$. Вектор v фазовой скорости изображающей точки системы состоит из двух компонент, т.е.

$$v = (f(x,z)^T, \frac{1}{\varepsilon} g(x,z)^T)^T. \tag{2}$$

При $\varepsilon \to 0$ вторая компонента вектора v стремится к ∞ при любой вектор-функции $g(x,z) \neq 0$. Поэтому каждая из подсистем системы (1) имеет собственную шкалу естественного времени. Вектор z является быстроизменяющимся, в то время как компоненты вектора x изменяются медленно.

Исследованию систем вида (1) (или более сложных систем этого вида) посвящена обширная литература [1, 4].

В настоящей работе, концепция параметрической устойчивости, предложенная в [7] и развитая в работах [3, 5, 9, 11], применяется для исследования свойств устойчивости одного класса систем вида (1), зависящих от некоторых параметров [13]. В отличии от общепринятого подхода, предполагается, что состояние равновесия не фиксированно в начале координат, а способно менять свое местоположение в зависимости от изменения значений параметров. Применение концепции параметрической устойчивости и метода сравнения с двухкомпонентной функцией Ляпунова позволяет определить область в пространстве параметров, для значений параметров из которой существует состояние равновесия исследуемой системы, и указать достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости. На основе полученных результатов исследована задача об управлении электромотором постоянного тока.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим нелинейную неточную сингулярно-возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)z + q_1(p)\varphi(r - C(p)x); \\ \varepsilon\dot{z} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)z + q_2(p)\varphi(r - C(p)x), \end{cases} \tag{3}$$

где $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^m$ – переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in R^+$; $r \in R^s$ – корректирующий вектор; матрицы $A_{ij}(p)$, $C(p)$, $q_i(p)$, $i, j = 1, 2$, имеют соответствующую размерность и элементы, непрерывно зависящие от векторного параметра $p \in R^l$. Функция $\varphi : R^s \to R^s$ – нелинейная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\varphi(0) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{u=0} = I$, где $I \in R^{s\times s}$ – единичная матрица. Предполагаем, что при любом заданном начальном состоянии $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, $t_0 \in R^+$, фиксированном значении параметра p и непрерывном управлении $u = r - C(p)x$, система уравнений (3) имеет единственное решение $(x(t; x_0, z_0, p, u)^T, z(t; x_0, z_0, p, u)^T)^T$ при всех $t \geq t_0$.

Относительно системы (3) сделаем следующее предположения.

Предположение 1*. 1) матрица $A_{22}(p)$ невырождена при всех $p \in P \subseteq R^l$; 2) существует значение параметра $p^* \in P \subseteq R^l$ такое, что матрицы $A_{22}(p)$ и $K_0(p) = A_0(p) - q_0(p)\dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{u=0} C(p)$, где $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, устойчивы в точке $p = p^*$.*

Замечание 1. Поскольку в точке $p = p^*$ матрица $A_{22}(p)$ устойчива, то она и невырождена в этой точке. Оценим область в пространстве параметров $\Omega_p = \{p \in R^l \,\|\, p - p^* \,|\leq b\}$, для всех значений параметра p из которой матрица $A_{22}(p)$ невырождена. Представим матрицу $A_{22}(p)$ в виде $A_{22}(p) = A_{22}(p^*) + B(p) = = A_{22}(p^*)(I + A_{22}^{-1}(p^*)B(p))$. Поскольку матрица $A_{22}(p^*)$ невырождена, то невырожденность матрицы $A_{22}(p)$ эквивалентна невырожденности матрицы $I + A_{22}^{-1}(p^*)B(p\;)$, что равносильно условию $\left\|A_{22}^{-1}(p^*)B(p)\right\| < 1$. *Так как $B(p) = A_{22}(p) - A_{22}(p^*)$, то окончательно получим, что для невырожденности матрицы $A_{22}(p)$ в области Ω_p требуется, чтобы для всех $p \in \Omega_p$ выполнялось следующее неравенство: $\left\|A_{22}^{-1}(p^*)(A_{22}(p) - A_{22}(p^*))\right\| < 1$. Используя разложение элементов матрицы $A_{22}(p)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $p = p^*$, получим неравенство $\left\|A_{22}^{-1}(p^*)\right\| \max\limits_{p\in\Omega_p} \left\|\dfrac{\partial A(p)}{\partial p}\right\| b < 1$, которое позволяет оценить область Ω_p. Таким образом, в качестве области P можно выбрать область Ω_p.*

Отметим, что при сделанных выше предположениях система (3) имеет неподвижное состояние равновесия в начале координат для всех значений параметра p, если значение корректирующего вектора равно 0. Однако, если $r \neq 0$, то состояние равновесия становится подвижным из-за изменения значений параметров p и r. Свойства устойчивости этого состояния равновесия также будут зависимы от указанных параметров. В работе будут установлены достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости системы (3) в виде секторного условия на функцию и указан подход для оценки области в пространстве параметров, относительно которой такая устойчивость имеет место.

2. Вспомогательные результаты.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений следующего вида:

$$A(p)x + B(p)\varphi(r - C(p)x) = 0, \tag{4}$$

где $x(t) \in R^n$ – переменная; $p \in R^l$, $r \in R^m$ – векторные параметры; матрицы $A(p), B(p), C(p)$ имеют соответствующие размерности и элементы, непрерывно зависящие от параметра; $\varphi : R^m \to R^m$ – нелинейная непрерывная функция. Относительно системы (4) сделаем следующие предположения.

Предположение 2. *1) функция* $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))^T$ *определена и непрерывна на некотором открытом множестве* $\Gamma \subseteq R^m$ *вместе с частными производными* $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, \dots, m$; *2) точка* $u = 0$ *принадлежит множеству* Γ, *причем* $\varphi(0) = 0$ и $\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\big|_{u=0} \neq 0$; *3) существует значение параметра* $p^* \in R^l$ *такое, что матрица* $K(p) = A(p) - B(p)\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\big|_{u=0} C(p)$ *устойчива в точке* $p = p^*$.

Пусть $r = (r_1, \dots, r_s)$, где r_i, $i = 1, \dots, s$, некоторые субвекторы вектора r, с размерностями n_i, соответственно. Определим область

$$\Pi = \{(x, p, r) \mid \Omega_x : \|x\| \le a,\ \Omega_p : \|p - p^*\| \le b,\ \Omega_r = \prod_{i=1}^{s} \Omega_{r_i}, \Omega_{r_i} : \|r_i\| \le c_i,\ i = 1, \dots, s\}$$

такую, что для всех (p, r) из $\Omega_p \times \Omega_r$ существует $x^e(p, r)$ – единственное состояние равновесия системы (4), которое принадлежит Ω_x. Для этого уравнение (4) представим в виде

$$x = (K(p^*))^{-1}\left(K(p)x - [A(p)x + B(p)\varphi(r - C(p)x)]\right) - (K(p^*))^{-1}(K(p) - K(p^*))x$$

и рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = (K(p^*))^{-1}\left(K(p)x_n - [A(p)x_n + B(p)\varphi(r - C(p)x_n)]\right) -$$

$$-(K(p^*))^{-1}(K(p) - K(p^*))x_n. \tag{5}$$

Применим к нему теорему о неподвижной точке в случае метрического пространства с числовым множителем в качестве оператора [2, с. 206]. Известно, что если итерационный процесс (5) имеет единственную неподвижную точку, то уравнение (4) имеет единственное решение. Достаточным условием этого, согласно указанной теореме, является выполнение условий

$$\max_{p \in \Omega_p}(\|B(p)\|\|C(p)\|)\max_{u \in \Omega_u}\left\|\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\Big|_u - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\Big|_{u=0}\right\| +$$

$$+\max_{p \in \Omega_p}\|K(p) - K(p^*)\| \le \frac{1}{2\|(K(p^*))^{-1}\|} \tag{6}$$

для всех $u \in \Omega_u$, где $\Omega_u = \{u \in R^m \mid \|U_i\| \le d_i,\ i = 1, \ldots, s\}$, U_i, $i = 1, \ldots, s$ – субвекторы вектора u, и

$$\|\varphi(r)\| \le \frac{a}{2\|(K(p^*))^{-1}\| \max\limits_{p \in \Omega_p} \|B(p)\|} \tag{7}$$

для всех $r \in \Omega_r$.

Так как $U_i = r_i - \begin{pmatrix} C_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}(p) \\ \cdots \\ C_{n_1+\ldots+n_i}(p) \end{pmatrix} x$, где $C_j(p)$ – j-ая строка матрицы $C(p)$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, m$, то с помощью неравенств

$$\max_{p \in \Omega_p} \left\| \begin{pmatrix} C_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}(p) \\ \cdots \\ C_{n_1+\ldots+n_i}(p) \end{pmatrix} \right\| a + c_i \le d_i,\ i = 1,\ \ldots,\ s, \tag{8}$$

и оценки (7) можем оценить границу области Π. Отметим, что в данной работе здесь и далее используется спектральная норма для матриц и эвклидова норма для векторов.

Далее приведем теорему, доказанную в [6], которая понадобится для последующего изложения. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)\varphi(r - C(p)x), \tag{9}$$

для которой все обозначения совпадают с обозначениями системы (4), выполняются условия Предположения 2 и $\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\big|_{u=0} = I$ – единичная матрица соответствующей размерности.

Введем обозначения: $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ – наименьшее и наибольшее собственные значения соответствующей матрицы; Q – произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$; P^* – симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$(K(p^*))^T P^* + P^*(K(p^*)) = -Q; \tag{10}$$

$$M(p, p^*) = (K(p) - K(p^*))^T P^* + P^*(K(p) - K(p^*)).$$

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(u)$, входящая в систему (9), удовлетворяет условию*

$$\left\| \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\Big|_u - I \right\| \le \frac{\lambda_{\min}(Q) - \max\limits_{p \in \Omega_p}(\lambda_{\max}(M(p, p^*)))}{4\|P^*\|\|K(p^*)\|\|(K(p^*))^{-1}\| \max\limits_{p \in \Omega_p}(\|B(p)\|\|C(p)\|)} \tag{11}$$

для всех $u \in R^m$, где область $\Omega_p = \{p \in R^l \mid \|p - p^*\| \le b\}$ определяется из системы неравенств

$$\frac{\lambda_{\min}(Q) - \max\limits_{p \in \Omega_p}(\lambda_{\max}(M(p, p^*)))}{4\|P^*\|\|K(p^*)\|\|(K(p^*))^{-1}\|} + \max_{p \in \Omega_p} \|K(p) - K(p^*)\| \le \frac{1}{2\|(K(p^*))^{-1}\|}, \tag{12}$$

$$\max_{p \in \Omega_p} (\lambda_{\max}(M(p, p^*))) < \lambda_{\min}(Q). \qquad (13)$$

Тогда, система дифференциальных уравнений вида (9) абсолютно параметрически устойчива относительно области $\Omega_p \times \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in R^m \mid \|r\| \le c\}$, *где* c *– произвольное как угодно большое наперед заданное положительное число.*

Замечание 2. Поскольку элементы матриц $M(p, p^*)$ *и* $K(p)$ *являются непрерывными функциями переменной* p *и в точке* $p = p^*$ *неравенства (12) и (13) выполняются, то область* Ω_p *существует.*

3. Существование состояния равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы.

Состояние равновесия нелинейной неточной сингулярно-возмущенной системы, если оно существует, имеет вид $(x^e(p,r)^T, z^e(p,r)^T)^T$, где $x^e(p,r)$ и $z^e(p,r)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(p)x^e + A_{12}(p)z^e + q_1(p)\varphi(r - C(p)x^e); \\ 0 = A_{21}(p)x^e + A_{22}(p)z^e + q_2(p)\varphi(r - C(p)x^e). \end{cases}$$

Следуя работе [13], $x^e(p,r) = x_s^e(p,r)$, где $x_s^e(p,r)$ – состояние равновесия «медленной» системы

$$\dot{x}_s = A_0(p)x_s + q_0(p)\varphi(r - C(p)x_s), \qquad (14)$$

где

$$A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p), \; q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p),$$

а $z^e(p,r) = \Phi(x^e(p,r))$, где $\Phi(x) = -A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r - C(p)x))$. Очевидно, что $z^e(p,r)$ существует, если существует $x^e(p,r)$. Таким образом, вопрос о существовании состояния равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы эквивалентен вопросу о существовании состояния равновесия «медленной» системы (14) и область в пространстве параметров, для значений которых существует состояние равновесия «медленной» системы (14), совпадает с областью в пространстве параметров, для значений которых существует состояние равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы (3). Отметим, что в случае известной функции $\varphi(u)$ с помощью метода, предложенного в п.2, можно непосредственно определить эту область.

4. Анализ параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы.

Рассмотрим «медленную» систему (14). Используя Предположение 1 (п.2) и предположения, сделанные относительно элементов системы (3), получаем, что условия Предположения 2 выполняются для системы (14). Значит, можем использовать Теорему 1.

Пусть Q_s – произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$, P_s^* – симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$(K_0(p^*))^T P_s^* + P_s^*(K_0(p^*)) = -Q_s; \qquad (15)$$

$$M_0(p, p^*) = (K_0(p) - K_0(p^*))^T P_s^* + P_s^*(K_0(p) - K_0(p^*)).$$

Тогда, согласно Теореме 1, выполнение условия

$$\left\| \frac{\partial \varphi u}{\partial u} |_u - I \right\| \le \frac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p \in \Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p, p^*)))}{4\left\|P_s^*\right\| \left\|K_0(p^*)\right\| \left\|(K_0(p^*))^{-1}\right\| \max\limits_{p \in \Omega_p 1}(\left\|q_0(p)\right\|) \left\|C(p)\right\|} \equiv \alpha \qquad (16)$$

для всех $u \in R^s$, где область $\Omega_p 1 = \{p \in R^l \,|\, \| p - p^* \| \le b1\}$ определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p \in \Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p, p^*)))}{4\left\|P_s^*\right\| \left\|K_0(p^*)\right\| \left\|(K_0(p^*))^{-1}\right\|} + \max\limits_{p \in \Omega_p 1} \left\|K_0(p) - K_0(p^*)\right\| \le \dfrac{1}{2\left\|(K_0(p^*))^{-1}\right\|}; \\ \max\limits_{p \in \Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p, p^*))) < \lambda_{\min}(Q_s), \end{cases} \qquad (17)$$

обеспечивает абсолютную параметрическую устойчивость системы (14) относительно области $\Omega_p 1 \times \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in R^s \,|\, \|r\| \le c\}$, где c – произвольное как угодно большое наперед заданное число. Отметим, что согласно п.3 для всех $(p, r) \in \Omega_p 1 \times \Omega_r$ будет существовать единственное состояние равновесия $(x^e(p, r)^T, z^e(p, r)^T)^T$ системы (3), поскольку при этих значениях параметров оно существует для «медленной» системы (14).Функция Ляпунова, позволяющая установить устойчивость состояния равновесия «медленной» системы для всех значений параметров $(p, r) \in \Omega_p 1 \times \Omega_r$, имеет вид

$$V_s(x) = (x - x^e(p, r))^T P_s^* (x - x^e(p, r)).$$

Рассмотрим «быструю» систему

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = A_{21}(p)\tilde{x} + A_{22}(p)\tilde{z} + q_2(p)\varphi(r - C(p)\tilde{x}), \qquad (18)$$

где $\tilde{x} \in R^n$ примем фиксированным постоянным вектором, $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon}$ – быстрое время $\tilde{z}(\tau) = z(\varepsilon t + t_0)$, $\tilde{x}(\tau) = x(\varepsilon t + t_0)$. Для исследования устойчивости состояния равновесия этой системы $\tilde{z}^e(p, r) = -A_{22}^{-1}(A_{21}(p)\tilde{x} + q_2(p)\varphi(r - C(p)\tilde{x}))$ воспользуемся функцией Ляпунова следующего вида:

$$V_f(\tilde{x}, \tilde{z}) = (\tilde{z} - \tilde{z}^e)^T P_f^* (\tilde{z} - \tilde{z}^e),$$

где P_f^* – симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$A_{22}^T(p^*)P_f^* + P_f^* A_{22}(p^*) = -Q_f;$$

где Q_f – произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $m \times m$. Найдем производную функции $V_f(\tilde{x}, \tilde{z})$ по τ в силу системы (18). Тогда имеем

$$\frac{dV_f(\tilde{x}, \tilde{z})}{d\tau}\Big|_{(18)} = (\tilde{z} - \tilde{z}^e)^T (A_{22}^T(p)P_f^* + P_f^* A_{22}(p))(\tilde{z} - \tilde{z}^e) =$$

$$= (\tilde{z} - \tilde{z}^e)^T (A_{22}^T(p^*)P_f^* + P_f^* A_{22}(p^*))(\tilde{z} - \tilde{z}^e) +$$

$$+ (\tilde{z} - \tilde{z}^e)^T ((A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_f^* + P_f^*((A_{22}(p) - A_{22}(p^*)))(\tilde{z} - \tilde{z}^e) =$$

$$= -(\tilde z - \tilde z^e)^T Q_f (\tilde z - \tilde z^e) + (\tilde z - \tilde z^e) N(p, p^*)(\tilde z - \tilde z^e), \qquad (19)$$

где

$$N(p, p^*) = (A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_f^* + P_f^*((A_{22}(p) - A_{22}(p^*)).$$

Из (19) следует, что

$$\frac{dV_f(\tilde x, \tilde z)}{d\tau}|_{(18)} \le (-\lambda_{\min}(Q_f) + \max_{p \in \Omega_p 2}(\lambda_{\max}(N(p, p^*)))) \left\| \tilde z - \tilde z^e \right\|^2 .$$

Значит, для всех $p \in \Omega_p 2$, $\Omega_p 2 = \{p \in R^l \mid \left\| p - p^* \right\| \le b2\}$, где $\Omega_p 2$ определяется из условия

$$\max_{p \in \Omega_p 2}(\lambda_{\max}(N(p, p^*))) < \lambda_{\min}(Q_f), \qquad (20)$$

функция $V_f(\tilde x, \tilde z)$ является функцией Ляпунова, позволяющей установить абсолютную устойчивость состояния равновесия $\tilde z^e(p, r)$ системы (18).

Полученные результаты по устойчивости «медленной» и «быстрой» подсистем, дают возможность сформулировать теорему, которая определяет достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно-возмущенной системы относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(u)$, входящая в систему (3), удовлетворяет условию (16) для всех $u \in R^s$, где область $\Omega_p 1 = \{p \in R^l \mid \left\| p - p^* \right\| \le b1\}$ определяется из системы неравенств (17) и область $\Omega_p 2 = \{p \in R^l \mid \left\| p - p^* \right\| \le b2\}$ определяется из условия (20). Тогда система (3) абсолютно параметрически устойчива относительно области $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in R^s \mid \left\| r \right\| \le c\}$, где c – произвольное как угодно большое наперед заданное число для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = \dfrac{\beta_1 \beta_2}{\gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \xi_2}$, где*

$$\beta_1 = -\lambda_{\min}(Q_s) + \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(M_0(p, p^*))) + 2\left\| P_s^* \right\| \alpha \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)}(\left\| q_0(p) \right\| \left\| C(p) \right\|);$$

$$\gamma_1 = 2\left\| P_s^* \right\| \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)} \left\| A_{12}(p) \right\|;$$

$$\beta_2 = -\lambda_{\min}(Q_f) + \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(N(p, p^*)));$$

$$\xi_2 = \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)} [\lambda_{\max}(A_{12}^T(p)(A_{21}^T(p) - C^T(p) q_2^T(p))(A_{22}^{-1}(p))^T P_f^* +$$

$$+ P_f^* A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p) - q_2(p) C(p)) A_{12}(p))] +$$

$$+2\left\| P_f^* \right\| \alpha \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)}(\left\| A_{22}^{-1}(p) q_2(p) \right\| \left\| C(p) A_{12}(p) \right\|);$$

$$\gamma_2 = 2\left\| P_f^* \right\| \max_{p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)}(\left\| A_{22}^{-1}(p) A_{21}(p) A_0(p) \right\| + \left\| A_{22}^{-1}(p) q_2(p) \right\| \left\| C(p) A_0(p) \right\| \alpha +$$

$$+ \left\| A_{22}^{-1}(p) q_2(p) C(p) A_0(p) \right\| + \left\| A_{22}^{-1}(p) A_{21}(p) q_0(p) \right\| \left\| C(p) \right\| \alpha +$$

$$+\left\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)\right\|+\left\|C(p)\right\|\left\|C(p)q_0(p)\right\|\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\right\|\alpha^2+$$

$$+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\right\|\left\|C(p)q_0(p)C(p)\right\|\alpha+\left\|C(p)\right\|\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\right\|+$$

$$+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\right\|+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\right\|).$$

Замечание 3. Если область $\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2$ *шире области* Ω_p *из Замечания 1, то система (3) абсолютно параметрически устойчива относительно области* Ω_p.

Доказательство. Поскольку, как было показано выше, для всех $(p,r) \in \Omega_p 1 \times \Omega_r$ существует единственное состояние равновесия $(x^e(p,r)^T, z^e(p,r)^T)^T$ нелинейной неточной сингулярно-возмущенной системы (3), то, очевидно, оно будет существовать и для всех $(p,r) \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$. Покажем, что для всех значений параметров из этой области указанное состояние равновесия будет глобально асимптотически устойчиво. Пусть (p,r) – произвольные значения параметров из области $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$ и $(x^e(p,r)^T, z^e(p,r)^T)^T$ – соответствующее им состояние равновесия системы (3). Рассмотрим векторную функцию Ляпунова

$$V(x,z)=\begin{pmatrix}(x-x^e)^T P_s^*(x-x^e)\\ (z-z^e)^T P_f^*(z-z^e)\end{pmatrix}, \tag{21}$$

элементы которой представляют собой скалярные функции Ляпунова для «медленной» и «быстрой» систем, и оценим производные компонент этой функции в силу системы (3). Тогда имеем

$$\frac{dV_s(x)}{dt}|_{(3)}=(A_{11}(p)x+A_{12}(p)z+q_1(p)\varphi(r-C(p)x))^T P_s^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_s^*(A_{11}(p)x+A_{12}(p)z+q_1(p)\varphi(r-C(p)x))=$$

$$=(A_0(p)x+q_0(p)\varphi(r-C(p)x))^T P_s^*(x-x^e)+(x-x^e)^T P_s^*(A_0(p)x+q_0(p)\varphi(r-C(p)x))+$$

$$+(A_{12}(p)z+A_{12}(p)A_{22}^{-1}(A_{21}(p)x+q_2(p)\varphi(r-C(p)x)))^T P_s^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_s^*(A_{12}(p)z+A_{12}(p)A_{22}^{-1}(A_{21}(p)x+q_2(p)\varphi(r-C(p)x))). \tag{22}$$

Учитывая, что

$$A_0(p)x^e+q_0(p)\varphi(r-C(p)x^e)=0 \text{ и } z^e=-A_{22}^{-1}(A_{21}(p)x+q_2(p)\varphi(r-C(p)x),$$

перепишем соотношение (22) следующим образом:

$$\frac{dV_s(x)}{dt}|_{(3)}=(x-x^e)^T(A_0(p)-q_0(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\bar{u}}\ C(p))^T P_s^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_s^*(A_0(p)-q_0(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\bar{u}}\ C(p))(x-x^e)+$$

$$+(z-z^e)^T A_{12}^T(p)P_s^*(x-x^e)+(x-x^e)^T P_s^* A_{12}(p)(z-z^e)=$$

$$=(x-x^e)^T(K_0(p^*)^T P_s^*+P_s^* K_0(p^*))(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T((K_0(p)-K_0(p^*))P_s^*+P_s^*(K_0(p)-K_0(p^*)))(x-x^e)-$$

$$-(x-x^e)^T\left(q_0(p)(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\tilde u}-I)C(p)\right)^T P_s^*(x-x^e)-$$

$$-(x-x^e)^T P_s^*\left(q_0(p)(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\tilde u}-I)C(p)\right)^T(x-x^e)+$$

$$+(z-z^e)^T A_{12}(p)P_s^*(x-x^e)+(x-x^e)P_s^*A_{12}(p)(z-z^e), \qquad (23)$$

где $\tilde u$ – некоторая точка пространства R^s.

Продолжим оценку (23), учитывая, что

$$\lambda_{\min}(P_s^*)\left\|x-x^e\right\|^2\le V_s(x)\le\lambda_{\max}(P_s^*)\left\|x-x^e\right\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_f^*)\left\|z-z^e\right\|^2\le V_f(x,z)\le\lambda_{\max}(P_f^*)\left\|z-z^e\right\|^2 \text{ и } \left\|\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\tilde u}-I\right\|\le\alpha.$$

Тогда приходим к соотношению такого вида:

$$\frac{dV_s(x)}{dt}|_{(3)}\le(-\lambda_{\min}(Q_s)+\max_{p\in(\Omega_{p^1}\cap\Omega_{p^2})}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))+$$

$$+2\left\|P_s^*\right\|\max_{p\in(\Omega_{p^1}\cap\Omega_{p^2})}(\left\|q_0(p)\right\|\left\|C(p)\right\|)\left\|\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\tilde u}-I\right\|)\left\|x-x^e\right\|^2+$$

$$+2\left\|P_s^*\right\|\max_{p\in(\Omega_{p^1}\cap\Omega_{p^2})}\left\|A_{12}(p)\right\|\left\|x-x^e\right\|\left\|z-z^e\right\|\le$$

$$\le(-\lambda_{\min}(Q_s)+\max_{p\in(\Omega_{p^1}\cap\Omega_{p^2})}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))+2\left\|P_s^*\right\|\alpha\max_{p\in(\Omega_{p^1}\cap\Omega_{p^2})}(\left\|q_0(p)\right\|\left\|C(p)\right\|))\frac{V_s(x)}{\lambda_{\min}(P_s^*)}+$$

$$+2\left\|P_s^*\right\|\max_{p\in(\Omega_{p^1}\cap\Omega_{p^2})}\left\|A_{12}(p)\right\|\frac{V_s^{\frac12}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac12}(P_s^*)}\frac{V_f^{\frac12}(x,z)}{\lambda_{\min}^{\frac12}(P_f^*)}=\beta_1\frac{V_s(x)}{\lambda_{\min}(P_s^*)}+\gamma_1\frac{V_s^{\frac12}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac12}(P_s^*)}\frac{V_f^{\frac12}(x,z)}{\lambda_{\min}^{\frac12}(P_f^*)}; \qquad (24)$$

$$\frac{dV_f(x,z)}{dt}|_{(3)}=(\dot z-\frac{dz^e}{dx}\dot x)^T P_f^*(z-z^e)+(z-z^e)^T P_f^*(\dot z-\frac{dz^e}{dx}\dot x)=$$

$$=(\frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p)x+\frac{1}{\varepsilon}A_{22}(p)z+\frac{1}{\varepsilon}q_2(p)\varphi(r-C(p)x)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_u C(p))(A_{11}(p)x+A_{12}(p)z+q_1(p)\varphi(r-C(p)x)))^T P_f^*(z-z^e)+$$

$$+(z-z^e)^T P_f^*(\frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p)x+\frac{1}{\varepsilon}A_{22}(p)z+\frac{1}{\varepsilon}q_2(p)\varphi(r-C(p)x)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_u C(p))(A_{11}(p)x+A_{12}(p)z+q_1(p)\varphi(r-C(p)x)))=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}(z-z^e)^T(A_{22}^T(p)P_f^*+P_f^*A_{22}(p))(z-z^e)+$$

$$+(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))(A_0(p)x+q_0(p)\varphi(r-C(p)x)))^T P_f^*(z-z^e)+$$

$$+(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))A_{12}(p)(z-z^e))^T P_f^*(z-z^e)+$$

$$+(z-z^e)^T P_f^*(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))(A_0(p)x+q_0(p)\varphi(r-C(p)x)))+$$

$$+(z-z^e)^T P_f^*(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))A_{12}(p))(z-z^e)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}(z-z^e)^T(A_{22}^T(p)P_f^*+P_f^*A_{22}(p))(z-z^e)+$$

$$+(x-x^e)^T(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))(A_0(p)-q_0(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}\,C(p)))^T P_f^*(z-z^e)+$$

$$+(z-z^e)^T P_f^*(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))(A_0(p)-q_0(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}\,C(p)))(x-x^e)+$$

$$+(z-z^e)^T(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))A_{12}(p))^T P_f^*(z-z^e)+$$

$$+(z-z^e)^T P_f^*(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}\,C(p))A_{12}(p))(z-z^e)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}(z-z^e)^T(A_{22}^T(p)P_f^*+P_f^*A_{22}(p))(z-z^e)+$$

$$+(z-z^e)^T[(A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_{12}(p)-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}-I\right)C(p)A_{12}(p)-$$

$$-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_{12}(p))^T P_f^*+P_f^*(A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_{12}(p)-$$

$$-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{u}-I\right)C(p)A_{12}(p)-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_{12}(p))](z-z^e)+$$

$$+(x-x^e)^T[A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)A_0(p)-$$

$$-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)-A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)-$$

$$-A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)q_0(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)q_0(p)C(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)]^T P_f^*(z-z^e)+$$

$$+(z-z^e)^T P_f^*[A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\approx u} -I\right)C(p)A_0(p)-$$

$$-A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)-A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\approx u} -I\right)C(p)- \tag{25}$$

$$-A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\approx u} -I\right)C(p)q_0(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\approx u} -I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\approx u} -I\right)C(p)q_0(p)C(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\left(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\approx u} -I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)](x-x^e),$$

где $\overset{\approx}{u}$ – некоторая точка пространства R^s.

Продолжим оценку (25), учитывая, что

$$\lambda_{\min}(P_s^*)\left\|x-x^e\right\|^2 \le V_s(x) \le \lambda_{\max}(P_s^*)\left\|x-x^e\right\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_f^*)\left\|z-z^e\right\|^2 \le V_f(x,z) \le \lambda_{\max}(P_f^*)\left\|z-z^e\right\|^2 \text{ и } \left\|\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}|_{\tilde{u}} -I\right\| \le \alpha.$$

Тогда имеем

$$\frac{dV_f(x,z)}{dt}|_{(3)} \le (-\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\min}(Q_f)+\frac{1}{\varepsilon}\max_{p\in(\Omega_{p1}\cap\Omega_{p2})}(\lambda_{\max}(N(p,p^*)))+$$

$$+[\max_{p\in(\Omega_{p1}\cap\Omega_{p2})}(\lambda_{\max}[(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)C(p))A_{12}(p))^T P_f^*+$$

$$+P_f^*(A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)-q_2(p)C(p))A_{12}(p))])+$$

$$+2\left\|P_f^*\right\|\alpha\max_{p\in(\Omega_{p1}\cap\Omega_{p2})}(\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\right\|\left\|C(p)A_{12}(p)\right\|)]\left\|z-z^e\right\|^2+ \tag{26}$$

$$+2\left\|P_f^*\right\|\max_{p\in(\Omega_{p1}\cap\Omega_{p2})}(\left\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)\right\|+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\right\|\left\|C(p)A_0(p)\right\|\alpha+$$

$$+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)\right\|+\left\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\right\|\left\|C(p)\right\|\alpha+\left\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)\right\|+$$

$$+\left\|C(p)\right\|\left\|C(p)q_0(p)\right\|\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\right\|\alpha^2+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\right\|\left\|C(p)q_0(p)C(p)\right\|\alpha+$$

$$+\left\|C(p)\right\|\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\right\|\alpha+\left\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\right\|)\left\|x-x^e\right\|\left\|z-z^e\right\|=$$

$$=(\frac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi_2)\left\|z-z^e\right\|^2+\gamma_2\left\|x-x^e\right\|\left\|z-z^e\right\| \le (\frac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi_2)\frac{V_f(x,z)}{\lambda_{\min}(P_f^*)}+\gamma_2\frac{V_s^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)}\frac{V_f^{\frac{1}{2}}(x,z)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)}.$$

Из оценок (24) и (26) следует оценка производной векторной функции $V(x,z)$ в силу системы (3) относительно конуса R_+^2:

$$\frac{dV(x,z)}{dt}\Big|_{(3)} \le \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\lambda_{\min}(P_s^*)} V_s(x) + \frac{\gamma_1}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)} V_s^{\frac{1}{2}}(x) V_f^{\frac{1}{2}}(x,z) \\ \frac{\gamma_2}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)} V_s^{\frac{1}{2}}(x) V_f^{\frac{1}{2}}(x,z) + \frac{(\frac{\beta_2}{\varepsilon} + \xi_2)}{\lambda_{\min}(P_f^*)} V_f(x,z) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Воспользовавшись неравенством $-az^2 + bz \le -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}$, продолжим оценку (27):

$$\frac{dV(x,z)}{dt}\Big|_{(3)} \le \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\lambda_{\min}(P_s^*)} V_s(x) + \frac{\gamma_1^2}{(-\beta_1)\lambda_{\min}(P_f^*)} V_f(x,z) \\ \frac{\gamma_2^2}{\lambda_{\min}(P_s^*)(-\frac{\beta_2}{\varepsilon} - \xi_2)} V_s(x) + \frac{\frac{\beta_2}{\varepsilon} + \xi_2}{\lambda_{\min}(P_f^*)} V_f(x,z) \end{pmatrix} = AV(x,z),$$

где

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\lambda_{\min}(P_s^*)} & \frac{\gamma_1^2}{(-\beta_1)\lambda_{\min}(P_f^*)} \\ \frac{\gamma_2^2}{(-\frac{\beta_2}{\varepsilon} - \xi_2)\lambda_{\min}(P_s^*)} & \frac{\frac{\beta_2}{\varepsilon} + \xi_2}{\lambda_{\min}(P_f^*)} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что поскольку выполняется условие (16) и для всех $p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)$, очевидно, справедливы соотношения (17), то $\beta_1 < 0$. Также, поскольку для всех $p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)$ неравенство (20) имеет место, то $\beta_2 < 0$. Величины γ_1, γ_2 и ξ_2 – положительны.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dU}{dt} = AU, \tag{28}$$

где матрица A задана выше, а $U = (u_1, u_2)^T \in R_+^2$.

При выполнении соотношения

$$\beta_1\left(\frac{\beta_2}{\varepsilon} + \xi_2\right) > \gamma_1\gamma_2 \tag{29}$$

функция $f(U) = AU$ удовлетворяет условие Важевского [15] относительно конуса R_+^2 и матрица A устойчива, т.е. система (28) является системой сравнения для системы (3) и состояние равновесия $(x^e(p,r)^T, z^e(p,r)^T)^T$ системы (3) для выбранных значений параметров (p,r) является глобально асимптотически устойчивым. Поскольку (p,r) произвольная точка области $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$, то система (3) абсолютно параметрически устойчива относительно этой области.

Неравенство (29) выполняется для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, где $\varepsilon^* = \frac{\beta_1\beta_1}{\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi_2}$. Теорема полностью доказана.

5. Приложение.

В качестве иллюстрации применения предложенной методики, рассмотрим модель управления электромотором постоянного тока [8, 12, 13].

В нормальных переменных, система дифференциальных уравнений, представляющая собой математическую модель рассматриваемого механизма, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega; \\ \dfrac{d\omega}{dt} = i + \sum_{j=1}^{k} a_j \omega_{1j}(\theta,\omega); \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{T_m}{T_e}(-\omega - i + \xi); \\ \varepsilon \dfrac{d\xi}{dt} = -\xi + gu, \end{cases} \qquad (30)$$

где $\theta,\ \omega,\ i$ и ξ – координаты, определяющие положение мотора, его скорость, силу тока в обмотке ротора и его напряжение, соответственно. Переменная u представляет собой управление усилителем, который характеризуется постоянным коэффициентом g и сингулярно возмущенным параметром ε. Неопределенная нагрузка крутящей пары представлена в виде $\sum_{j=1}^{k} a_j \omega_{1j}(\theta,\omega)$, где $\omega_{1j}(\theta,\omega)$ – некоторые нелинейные функции, а a_j – неизвестные постоянные. Для простоты примем $k=1$, т.е. неопределенная нагрузка крутящей пары представлена выражением $a_1\omega_{11}(\theta,\omega)$. Проведя замену переменных $x_1=\theta,\ x_2=\omega,\ x_3=i,\ z=\xi$ и используя закон управления

$$u = -\frac{1}{bg}[75x_1 + (90-3b)x_2 + (30-3b)x_3 + 15a_1\omega_{11}(x_1,x_2) + 24bz],$$

приведем систему (30) к общему виду (3), где

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -b \end{pmatrix};\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix};\ q_1(a_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix};\ b = \frac{T_m}{T_e};$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -\dfrac{75}{b} & -\left(\dfrac{90}{b}-3\right) & -\left(\dfrac{30}{b}-3\right) \end{pmatrix};\ A_{22} = (-25);\ q_2(a_1) = \left(-\frac{15a_1}{b}\right).$$

Нелинейная функция $\varphi(\sigma) = \omega_{11}(x_1,x_2)$, где $\sigma = r - Cx,\ r \in R$ – некоторый параметр, $C = (0 \quad -0{,}1 \quad 0)$; $x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$. Примем, что $\dfrac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma}|_{\sigma=0} = 1$.

С помощью предложенного выше подхода определим множество значений параметра a_1, для каждого значения которого исследуемая система будет глобально асимптотически устойчивой; построим соответствующие функции Ляпунова в явном виде и укажем граничное значение параметра ε^*.

Определим матрицу $K_0(a_1)$ и убедимся, что исследуемая система удовлетворяет условиям Предположения 1. Значения параметра a_1^* выберем равным 5. Выбрав матрицу

$$Q_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $b = 1{,}5$, определим матрицу

$$P_s^* = \begin{pmatrix} 2,725 & 2,185 & 0,166 \\ 2,185 & 4,890 & 0,982 \\ 0,166 & 0,982 & 0,588 \end{pmatrix}$$

из соотношения (15). Вычислив матрицу $M_0(a_1, a_1^*)$, получим область

$$\Omega_{a_1} 1 = \{a_1 \in R \,|\, |a_1 - a_1^*| \le 2,3\}$$

с помощью неравенств (17) и величину $\alpha = 0,00335$ из (16). Для матрицы $Q_f = (1)$ определим матрицу $P_f^* = (0,02)$. Поскольку A_{22} не зависит от параметра a_1, то $N(a_1, a_1^*) = 0$ и, следовательно, $\Omega_{a_1} 2 = R$. Вычислим $\beta_1 = -0,843$, $\beta_2 = -1$, $\gamma_1 = 19,182$, $\gamma_2 = 0,184$, $\xi_2 = 0,041$ и $\varepsilon^* = 0,237$. Таким образом, с помощью предложенного подхода определена область $\{a_1 \in R \,|\, |a_1 - 5| \le 2,3\}$, для всех значений параметра a_1 из которой существует состояние равновесия исследуемой системы, при всех значениях параметра $r \in R$, если только функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет секторному условию

$$\left| \frac{\partial \varphi(\sigma)}{\partial \sigma} |_\sigma - 1 \right| \le 0,00335.$$

Функция Ляпунова для «медленной» системы имеет вид

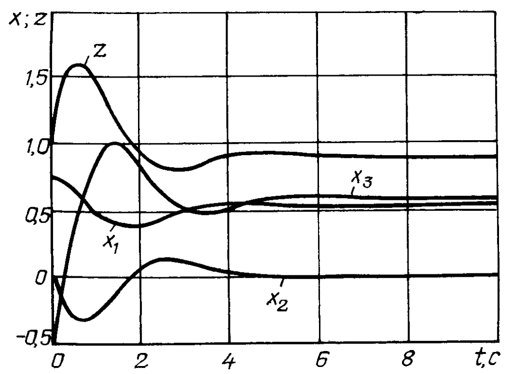
$$V_s(x) = (x - x^e(a_1, r))^T P_s^* (x - x^e(a_1, r)),$$

для «быстрой» –

$$V_f(x, z) = (z - z^e(a_1, r))^T P_f^* (z - z^e(a_1, r)),$$

где $(x^e(a_1, r)^T, z^e(a_1, r)^T)^T$ – состояние равновесия исследуемой системы, вычисленное при соответствующих значениях параметров a_1 и r.

Выбрав $\varphi(\sigma) = 0,0015 \sin \sigma + 0,9985\sigma$, убедимся, что эта функция удовлетворяет полученным секторным условиям. Ниже представлен график, иллюстрирующий поведение переменных x и z рассмотренной выше системы, при $a_1 = 3$; $\varepsilon = 0,01$; $r = -2$; $x_0 = (0,75 \quad 0 \quad -0,5)^T$ и $z_0 = -0,1$.



Состояние равновесия, соответствующее значениям параметров, приведенных выше, равны: $x^e = (0,546 \quad 0 \quad 0,6)^T$, $z^e = 0,899$. Как видно, переменные асимптотически стремятся к соответствующим равновесным значениям, т.е. состояние равновесия асимптотически устойчиво.

Заключение.

В данной статье концепция параметрической устойчивости применена для исследования класса так называемых сингулярно возмущенных систем. Использование метода сравнения с двухкомпонентной функцией Ляпунова позволяет применить результаты, полученные в работе [6], и получить достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости систем указанного класса. В отличие от работ [12,13], где область в пространстве параметров, относительно которой устанавливается параметрическая устойчивость, предполагается известной, в данной работе она вычисляется непосредственно. Также в явном виде получены функции Ляпунова для «медленной» и «быстрой» подсистем, что позволяет вычислить верхнюю границу для сингулярно возмущенного параметра проще, чем в указанных работах.

Предложенный подход к исследованию параметрической устойчивости показал свою эффективность при исследовании различных классов систем дифференциальных уравнений, содержащих параметры. В дальнейшем представляется возможным расширить класс исследуемых систем [10,14].

Р Е З Ю М Е . Концепція параметричної стійкості застосована для дослідження властивостей стійкості сингулярно збурених систем, що містять деякі параметри. Знайдено область у просторі параметрів, для яких параметрична стійкість має місце. Як приклад, розглянуто задачу про керування електромотором постійного струму.

1. *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Рибенс-Павелла М.* Устойчивость крупно-масштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – К.: Наук.думка, 1984. – 308 с.
2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика – М.: Мир, 1969. – 447 с.
3. *Мартынюк А.А., Хорошун А.С.* К теории параметрической устойчивости // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 59 – 65.
4. *Митропольский Ю.О.* Методи нелінійної механіки. – К.: Наук. думка, 2005. – 526 с.
5. *Хорошун А.С.* Параметрическая квадратическая стабилизация нелинейных систем с неопределенностью // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 36 – 41.
6. *Хорошун А.С.* Условия абсолютной параметрической устойчивости систем Лурье // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 64 – 71.
7. *Ikeda M., Ohta Y., Šiljak D.D.* Parametric stability // The Ohio State University Joint Conference: Proceedings of the Univesita di Genova. – Basel: Birkhauser, 1991. – P. 1 – 20.
8. *Kanellakopoulos I., Kokotovich P.V., Marino R.* An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control // Automatica. – 1991. – **27**. – P. 247 – 255.
9. *Khoroshun A.S.* Global Parametric Quadratic Stabilisability of Nonlinear Systems with Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 6. – P. 703 – 710.
10. *Lila D.M., Martynyuk A.A.* Stability of Periodic Motions of Quasilinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1173 – 1180.
11. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* On Parametric Asymptotic Stability of Large Scale Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 5. – P. 565 – 575.
12. *Retchkiman Z., Silva G.* Stability analysis of singularly perturbed systems vi vector Lyapunov methods // Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control. – Kobe, Japan, 1996. – P. 580 – 585.
13. *Silva G., Dzul F. A.* Parametric Absolute Stability of a Class of Singularly Perturbed Systems // Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control. – Tampa, Florida USA, 1998. – P. 1422 – 1427.
14. *Slyn'ko V.I.* Asymptotic Stability Boundaries for the Equilibrium Positions of a Double Pendulum // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 7. – P. 818 – 830.
15. *Wazewski T.* Systemes des equations et des inequalities differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applicationes // Annales de la societe Polonaise de mathematiques. – 1950. – **23**. – P. 112 – 166.

Поступила 18.12.2009 Утверждена в печать 15.06.2010