

А.С.Апостолюк¹, В.Б.Ларин²

ОБ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ
ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

¹ *Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»,*

пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: aros@i.ua;

² *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua

Abstract. The integrating algorithms for data processing in identification of linear stationary systems by the results of observations of transient processes at discrete time are proposed. A problem of identification is considered in detail, when several phase coordinates of the system are recorded simultaneously. The identification procedure is generalized on the case, when results of observations are absent for some instants. An efficiency of algorithms proposed is demonstrated on examples.

Key words: integration, LTI system, identification, irregular sampled data.

§1. Введение.

При решении различных задач управления [17, 29, 30] возникает задача идентификации объекта управления, т.е. выбора модели объекта управления и оценки ее параметров [11, 24]. Аналогичные задачи возникают и в других прикладных проблемах [35, 36 и др.]. Одной из простейших задач идентификации является определение параметров стационарной линейной системы по результатам регистрации в равноотстоящие моменты времени (регулярных измерений) реакции системы на то или иное воздействие. Во время переходного процесса, вызванного ненулевыми начальными условиями, движение какой-либо точки объекта описывается следующим образом:

$$y(t) = \sum_{j=1}^n d_j e^{\mu_j t}, \quad (1.1)$$

где μ_j , d_j – подлежащие определению параметры.

В качестве исходной информации предполагается известной последовательность регулярных измерений

$$y_E(t_i) = y(t_i) + \varepsilon_i, \quad t_i = (i-1)T_s \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad (1.2)$$

где ε_i – погрешности измерений; T_s – период регистрации информации.

На практике возможна ситуация, когда в массиве данных (1.2) отсутствуют измерения при некоторых значениях индекса i . Эту ситуацию можно интерпретировать как случай одной нерегулярной последовательности измерений [18, 31]. Ее также можно рассматривать и как случай, когда имеются несколько массивов измерений с постоянным периодом (см. ниже пример 2). С другой стороны, и при периодических измерениях возможна ситуация, когда доступны несколько каналов информации, например, когда одновременно регистрируется смещение точки и ее ускорение (два массива данных, аналогичных (1.2) (см. ниже пример 1)). Тогда возникает задача использования всех доступных массивов информации для получения наиболее точных

оценок параметров модели. По аналогии с [4] задачи идентификации в ситуациях такого рода будем называть задачами комплексирования результатов измерений.

Как будет показано ниже, для решения задач комплексирования могут быть использованы (при соответствующей модификации) некоторые алгоритмы, которые ориентированы на случай регулярной последовательности измерений. В этой связи приведем краткий обзор некоторых подходов, используемых при решении задач типа (1.1), (1.2).

Обычно требуется определить количество экспонент в (1.1) (порядок модели) и получить оценки параметров μ_j, d_j . Отметим, что кроме механики (например, при идентификации гибких конструкций [32]) такого рода задачи охватывают широкую область применения, например, при описании процессов нефтегазодобычи [3], в химии полимеров [14], при определении параметров радиоактивного распада [6], оценке параметров гармонического сигнала [5] и др.

Далее будет рассмотрена только вторая часть сформулированной проблемы, а именно, внимание будет сосредоточено на получении оценок μ_j, d_j , предполагая известным порядок модели. Заметим, что определение порядка модели является самостоятельной задачей [1, 19] и для ее решения могут быть использованы различные подходы (процедура упорядоченной минимизации среднего риска [3], информационные критерии [33] и др.). Относительно ко второй части упомянутой проблемы, то следует отметить одно из первых ее решений, которое было предложено еще в 1795 году [25] (см. также [6]). Этот подход (метод Прони) основан на введении промежуточной конечно-разностной системы, после оценки параметров которой строились оценки μ_j и далее находились оценки параметров d_j . Сравнение метода Прони с другими методами приведено в обзоре [5]. Здесь следует отметить трудности, связанные с переходом от промежуточной конечно-разностной системы к исходной системе с непрерывным временем [12, 23, 34], что в свою очередь (для повышения точности результата) может потребовать использования тех или иных оптимизационных процедур [1, 24].

Данная статья организована следующим образом. Описывается метод Прони, позволяющий путем использования промежуточной конечно-разностной системы, произвести декомпозицию исходной задачи на задачу нахождения оценок μ_j и задачу определения оценок d_j . Кратко изложены основные алгоритмы, позволяющие оптимизировать эту процедуру (тотальный метод наименьших квадратов [16, 21], метод матричных пучков [26, 28] и др.). Далее излагается нелинейный аналог метода Прони [2], который, с одной стороны, позволяет произвести декомпозицию исходной задачи, а с другой, – не использует конечно-разностную систему. Этот алгоритм обобщается на случай, когда часть параметров μ_j в модели (1.1) задана. Тогда, если судить строго, неприменим традиционный метод Прони. Существенно, что возможность декомпозиции задачи (метод Прони) обычно базируется на предположении, что измерения (1.2) производятся через равные промежутки времени. Однако, в настоящее время внимание исследователей привлекают задачи, в которых измерения происходят нерегулярно [31 и др.]. Отметим, что используя сплайн-интерполяцию можно построить регулярную последовательность по исходной нерегулярной. Далее можно применить к полученной регулярной последовательности известные алгоритмы. Однако, как показано в [18] (см. пример 4), такой подход может сопровождаться существенным снижением точности результатов идентификации и поэтому он не рассматривается.

В этом случае, метод Прони обобщается на случай нерегулярных измерений [18]. Как уже отмечалось, указанные выше алгоритмы модифицируются именно таким образом, что позволяет использовать их в задаче комплексирования измерений.

В заключение статьи рассмотрен пример идентификации системы виброзащиты, когда доступны измерению как смещение некоторой точки, так и ее ускорение, и пример (the fourth-order Rao-Garnier system [24]), в котором предполагается отсутствие результатов измерений в ряде точек.

§2. Определение параметров модели.

Видно, что функция $y(t)$, определяемая (1.1), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^n a_j y^{(n-j)} = 0 \quad (2.1)$$

с начальными условиями $y^{(n-j)}(0) = x_{n-j}(0)$, $j = 1, \dots, n$.

Очевидно, что коэффициенты a_j однозначно связаны с параметрами μ_j через формулы Виета, а параметры d_j определяются начальными условиями $x_{n-j}(0)$ и параметрами μ_j . Таким образом, необходимо найти оценки параметров a_j и $x_{n-j}(0)$ по наблюдаемым значениям (1.2). Для этого перепишем (2.1) в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = [x_0(0) \quad x_1(0) \quad \dots \quad x_{n-1}(0)]^T; \\ y = Cx, \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]; \quad (2.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее верхний индекс « T » означает транспонирование. Отметим, что согласно (2.2) имеем

$$y(t_i) = Ce^{At_i} x(0). \quad (2.3)$$

Введем квадратичную целевую функцию

$$J = \sum_{i=1}^{\ell} [y_E(t_i) - \tilde{y}(t_i)]^2, \quad (2.4)$$

где $\tilde{y}(t_i)$ – некоторое приближение, определяемое выбором оценок величин a_1, \dots, a_n и вектора $x(0)$ в соотношениях (2.2), (2.3).

Таким образом, задачу определения параметров $x_{n-j}(0)$ и a_j ($j = 1, \dots, n$) можно сформулировать как задачу минимизации по этим параметрам целевой функции (2.4).

Отметим, что в случае действительных показателей μ_j , фигурирующих в (1.1), при одновременном определении параметров μ_j и d_j путем минимизации (2.4) могут возникнуть трудности. Эти трудности обусловлены неортогональностью экспоненциальных функций и, как следствие, «...исключительной чувствительностью показательных функций и амплитуд к весьма малым изменениям данных» [6]. В частности, при использовании стандартных вычислительных процедур отмеченная особенность задачи может проявиться в изменении результатов решения при изменении начального приближения [2].

Проиллюстрируем это на примере радиоактивного распада [6], в котором фигурирующие в (1.1) параметры имеют следующие значения:

$$\mu_1 = -1; \quad \mu_2 = -3; \quad \mu_3 = -5; \quad d_1 = 0,0951; \quad d_2 = 0,8607; \quad d_3 = 1,557.$$

Для решения задачи идентификации доступны 24 измерения, которые выполнены через равные промежутки времени, т.е. в (1.2) $t_i = (i-1) \cdot 0,05$; $\ell = 24$. Погрешность

измерений (ε_i) моделируется следующим образом. Значения элементов последовательности (2.3) округляются до ν цифр после запятой. Другими словами, если $\bar{y}(t_i)$ – точное значение, то принимается, что $y(t_i) = 10^{-\nu} \{10^\nu \bar{y}(t_i)\}$, где $\{\dots\}$ – операция округления до ближайшего целого числа (процедура round.m пакета MATLAB).

При этих исходных данных, приняв $\nu = 3$, задача минимизации (2.4) решалась методом Нелдера – Мида с использованием процедуры fminsearch.m пакета MATLAB. Получено три решения задачи при различных значениях начального приближения. Во всех экспериментах в качестве начального приближения для μ_j выбирались заданные выше точные значения, а в качестве начального приближения для $x(0)$ принималось точное значение $x_0^*(0) = [2, 5134 \quad -10, 4652 \quad 46, 7814]^T$ и два других, не совпадающих с $x_0^*(0)$: $x_1^*(0) = [2 \quad -10 \quad 50]^T$, $x_2^*(0) = [2 \quad -10 \quad 40]^T$. В табл. 1 приведены значения μ_j при различных начальных приближениях для $x(0)$, полученные при решении задачи минимизации (2.4) при указанном выборе начального приближения.

Таблица 1

$x(0)$	$x_0^*(0)$	$x_1^*(0)$	$x_2^*(0)$
μ_1	-0,9554	-0,8820	-1,0935
μ_2	-3,0525	-2,9750	-3,2300
μ_3	-5,0715	-5,0420	-5,1485

Отметим, что полученное во всех этих трех экспериментах минимальное значение J равнялось 0,0010. Подчеркнем, также что во всех численных экспериментах, в качестве начального приближения принимались *точные* значения параметров μ_j . Полученные результаты при одновременной минимизации целевой функции (2.4) по переменным μ_j и d_j подтверждают вывод [6, стр. 284], что этот «... пример хорошо иллюстрирует те поразительные каверзы, которые может сделать неортогональный характер экспоненциальных функций». В этой связи целесообразно рассмотреть возможность декомпозиции исходной задачи на задачу определения μ_j и последующую задачу нахождения d_j .

§3. Декомпозиция задачи (метод Прони).

Рассмотрим случай, когда измерения производятся через равные интервалы времени T_s . Пусть матрица A определяется (2.2), а характеристический полином матрицы e^{AT_s} имеет вид

$$\lambda^n + \hat{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \hat{a}_n. \quad (3.1)$$

Приняв во внимание (2.3), рассмотрим сумму

$$\Sigma = y(t_{n+i}) + \hat{a}_1 y(t_{n+i-1}) + \dots + \hat{a}_n y(t_i) = C \left[(e^{AT_s})^n + \hat{a}_1 (e^{AT_s})^{n-1} + \dots + \hat{a}_n I \right] (e^{AT_s})^i x(0). \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) и далее I – единичная матрица соответствующего размера. Так как матрица e^{AT_s} обращает в нуль свой характеристический полином, то можно утверждать, что $\Sigma = 0$. Отметим, что корни ρ_j характеристического полинома (3.1) и корни μ_j характеристического полинома матрицы A связаны соотношением

$$\rho_j = e^{\mu_j T_s}. \quad (3.3)$$

Таким образом, в случае точных равноотстоящих измерений задача может быть разбита на две: задачу нахождения \hat{a}_j – коэффициентов характеристического полинома (3.1) из системы линейных уравнений, что позволит найти корни ρ_j этого полинома и, согласно (3.3), определить μ_j , и вторую задачу (при известных μ_j), которая сводится к нахождению $x(0)$ или коэффициентов d_j в (1.1) путем решения системы линейных уравнений. Эта декомпозиция исходной задачи и составляет суть алгоритма Прони [25].

Остановимся на первой задаче. Коэффициенты полинома (3.1), приняв во внимание, что $\Sigma = 0$, можно определить из следующей системы линейных уравнений:

$$Z\hat{a} = -Z_0; \quad (3.4)$$

$$Z = \begin{bmatrix} y_n & \cdots & y_1 \\ y_{n+1} & \cdots & y_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+i-1} & \cdots & y_i \end{bmatrix}; \quad Z_0 = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+i} \end{bmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее используются обозначения $y_i = y(t_i)$. Определив из (3.4) коэффициенты \hat{a}_j полинома (3.1) и вычислив корни ρ_j этого полинома, согласно (3.3) находим μ_j . Располагая значениями μ_j , можно найти коэффициенты d_j , фигурирующие в (1.1).

Отметим, что алгоритм Прони можно представить в более общем виде, производя выборку через кратные периоды T_s интервалы времени. Тогда, аналогично (3.1), можно записать выражение для характеристического полинома матрицы $e^{A_k T_s}$ (k – целое число)

$$\lambda^n + \hat{a}_1^k \lambda^{n-1} + \dots + \hat{a}_n^k. \quad (3.5)$$

Заметим, что в (3.5) верхний индекс « k » не является показателем степени. В этом случае аналогом (3.2) будет следующее соотношение:

$$y_{nk+i} + \hat{a}_1^k y_{(n-1)k+i} + \dots + \hat{a}_n^k y_i = 0. \quad (3.6)$$

Соответственно, имеем аналог соотношения (3.3)

$$\rho_j^k = e^{\mu_j k T_s}, \quad (3.7)$$

где ρ_j^k – корень характеристического полинома (3.5).

§4. Передаточная функция.

В ряде задач идентификации могут определяться не параметры μ_j , d_j в (1.1), а параметры соответствующей передаточной функции идентифицируемой системы, которая связывает изображения по Лапласу выходной (наблюдаемой) координаты системы и управляющего воздействия u . В такого рода задачах предполагается, что воздействие u задает начальные условия, т.е. принимается, что u есть δ -функция Дирака, приложенная к системе в момент $t = 0^-$ [27]. В этой связи приведем некоторые соотношения, которые позволяют переходить от описания системы в терминах передаточных функций к описанию в терминах пространства состояний и наоборот [20].

Итак, пусть задана дробно-рациональная передаточная функция $G(s)$ между выходной координатой y и управляющим воздействием u

$$y = G(s)u; \quad G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)}; \quad (4.1)$$

$$\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n; \quad N(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n.$$

Необходимо описать систему (2.2) в терминах пространства состояний, а именно, представить ее в виде

$$\dot{w} = Aw + Bu; \quad y = C^T w, \quad w = [w_1, \dots, w_n]^T, \quad (4.2)$$

где A – матрица размера $n \times n$; B, C – векторы размера $n \times 1$. Таким образом, $G(s)$ можно представить в виде

$$G(s) = C^T (Is - A)^{-1} B. \quad (4.3)$$

Выберем в качестве вектора w следующий вектор: $w = [x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$, где $x_i = \frac{d^{(i)}x}{dt^{(i)}}; i = 1, \dots, n-1$.

В этом случае согласно [20] имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & \vdots & -a_{n-1} & \vdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Отметим, что если в (4.2) u есть δ -функция Дирака, то, согласно (4.3), имеем

$$y(t_i) = Ce^{At_i} B. \quad (4.5)$$

Отметим, что и при таком представлении системы возможна описанная выше процедура декомпозиции задачи. Первый этап решения задачи состоит в получении оценок коэффициентов знаменателя передаточной функции (4.1) (коэффициентов характеристического полинома матрицы A). Эти коэффициенты могут быть получены тем или иным способом (например, методом Прони). Далее, располагая результатами наблюдений $y(t_i)$, можно определить параметры вектора B , рассматривая (4.5) как систему линейных уравнений относительно элементов вектора B . После этого, согласно (4.4), искомый вектор коэффициентов числителя $G(s)$ определяется следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix} B. \quad (4.6)$$

§5. Оптимизация метода Прони.

При изложении сути метода Прони предполагалось, что погрешности ε_i в (1.2) отсутствуют. Однако, по причине присутствия в (1.2) этих погрешностей, соотношение (3.4) следует переписать следующим образом:

$$(Z + \varepsilon Z)\bar{a} = -(Z_0 + \varepsilon Z_0), \quad (5.1)$$

где матрица εZ и вектор εZ_0 обусловлены погрешностями ε_i в измерениях (1.2), вектор \bar{a} является искомой оценкой вектора параметров \hat{a} , т.е. наличие погрешностей в (1.2) приводит к появлению возмущений как в матрице Z , так и в правой части системы линейных уравнений, которая определяет вектор искомых параметров. Поэтому, естественно, что присутствие погрешностей измерений ставит задачу выбора

алгоритма для получения наиболее точной оценки вектора параметров \hat{a} . Здесь, кроме метода наименьших квадратов, можно отметить тотальный метод наименьших квадратов [16, 21], метод оценивания линейных систем с неопределенностью интервального типа [13], метод матричных пучков [26] и др.

Опишем метод наименьших квадратов и тотальный метод наименьших квадратов [16, 21] применительно к решению системы линейных уравнений

$$Ax = b. \quad (5.2)$$

Метод наименьших квадратов для решения системы (5.2) состоит в следующем. Необходимо определить x из условия

$$\min_x \|Ax - b\|, \quad (5.3)$$

где $\|\cdot\|$ означает евклидову норму. Формулировка (5.3) эквивалентна следующей [16, 21]:

$$\min_{x, \Delta b} \|\Delta b\| \text{ при условии } Ax = b + \Delta b. \quad (5.4)$$

При такой постановке искомое решение имеет вид

$$x = A^\dagger b, \quad (5.5)$$

где верхний символ « \dagger » означает операцию псевдообращения. В случае переопределенной системы (5.2), когда матрица A имеет полный ранг, решение (5.5) можно записать в виде $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Тотальный метод наименьших квадратов используется, когда в (5.2) возмущенными являются как матрица A , так и вектор b , т.е. $(A + \Delta A)x = b + \Delta b$. По аналогии с (5.4) в этом случае решение (5.2) интерпретируется как результат минимизации $\|\Delta A \ \Delta b\|$ при условии $(A + \Delta A)x = b + \Delta b$. Решение этой задачи имеет вид [16]

$$x = (A^T A - \sigma^2 I)^{-1} A^T b, \quad (5.6)$$

где σ – минимальное сингулярное число матрицы $[A \ b]$. Другие выражения для решений (5.5), (5.6) приведены, например, в [16, 21].

Кроме этих методов следует отметить еще метод матричных пучков [26], который позволяет сразу находить оценки величин ρ_j . Суть его состоит в следующем. Из элементов последовательности (2) формируются векторы

$$x_k = [y_{E_k} \ y_{E_{k+1}} \ \dots \ y_{E_{N-L+k-1}}]^T,$$

где L – так называемый параметр пучка, а $N = \ell + 1$.

Из этих векторов формируются две матрицы размера $(N - L) \times L$:

$$X_0 = [x_{L-1} \ x_{L-2} \ \dots \ x_0]; \quad X_1 = [x_L \ x_{L-1} \ \dots \ x_1].$$

Собственные значения матричного пучка $X_1 - \lambda X_0$ принимаются в качестве оценок собственных значений полинома (3.1), т.е. величин ρ_j .

Использование описанных выше алгоритмов в такого рода задачах направлено на повышение точности определения ρ_j . Так, согласно первым двум алгоритмам, вначале находится оценка \bar{a} вектора коэффициентов \hat{a} и далее находятся оценки ρ_j . Метод матричных пучков позволяет сразу находить оценки ρ_j . Однако, малость погрешности определения ρ_j , в общем случае, не гарантирует малости погрешности оценки μ_j . В связи с тем, что интерес представляет получение наиболее точной оценки величины μ_j , необходимо проанализировать связь погрешностей оценок ρ_j и μ_j .

§6. Переход от дискретной системы к непрерывной.

Отметим, что согласно (3.5) – (3.7) в методе Прони можно использовать различные значения kT_s («интервала дискретизации»). Таким образом, при использовании метода Прони возникает проблема выбора величины k . Отметим, что обычно метод Прони излагается без какого-либо указания на возможность оптимального выбора k , т.е. в предположении $k=1$. Здесь можно упомянуть рекомендацию [6, с. 281] по выбору шага $h \triangleq kT_s$: «...на практике не следует брать ... ординаты близкоотстоящих точек, следует сделать h как можно большим, чтобы уменьшить влияние ошибок наблюдения». Однако, как показано в [1], такое правило выбора величины k не является оптимальным. Проиллюстрируем это на простейшем примере. Рассмотрим связь погрешностей $\Delta\mu_j$ и $\Delta\rho_j^k$ определения μ_j и ρ_j^k , предполагая эти погрешности малыми. Итак, согласно (3.7) имеем

$$\mu_j + \Delta\mu_j = \frac{1}{kT_s} \ln(\rho_j^k + \Delta\rho_j^k).$$

В первом приближении получим такое выражение:

$$\Delta\mu_j = \frac{e^{-\mu_j kT_s}}{kT_s} \Delta\rho_j^k. \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что, в общем случае, выбор максимальной величины kT_s не является оптимальным. С другой стороны, при фиксированной величине погрешности $\Delta\rho_j^k$ в (6.1), погрешность $\Delta\mu_j$ зависит от выбора величины k , т.е. в методе Прони при выборе промежуточной дискретной модели возникает проблема выбора величины k . Другими словами, для получения наиболее точной оценки корня μ_j должен быть выбран соответствующий оптимальный интервал дискретизации, т.е. величина k . Некоторые алгоритмы нахождения оптимального значения k приведены в [1, 22], однако они довольно громоздки. Отметим, что в [28] рассмотрены вопросы выбора k применительно к методу матричных пучков. Представляется, что кардинальное решение вопроса выбора величины k может быть получено, если вообще исключить из алгоритма промежуточную дискретную модель. В этой связи рассмотрим алгоритм, который, как и метод Прони, позволяет произвести декомпозицию исходной задачи, но исключает промежуточную дискретную модель, т.е. снимает проблему выбора оптимального значения k .

§7. Нелинейный аналог метода Прони.

Суть подхода [2] состоит в формулировке задачи, исключающей промежуточную дискретную систему. А именно, оценки коэффициентов a_j в (2.1) получаем в результате минимизации некоторой целевой функции. В этом алгоритме, как и в методе Прони, исходная задача разбивается на две подзадачи: определения параметров a_j и последующего нахождения множителей d_j при экспонентах в (1.1).

Итак, пусть имеются некоторые приближенные значения коэффициентов a_j , фигурирующих в (2.1), (2.2). Для этих значений a_j и принятого значения k вычисляются коэффициенты \hat{a}_j^k характеристического полинома матрицы e^{AkT_s} , т.е. полинома (3.5). Далее, подставив в (3.6) экспериментальные значения (1.2), получим величины S_{ki} невязок, соответствующих индексам k, i (количество этих невязок, естественно, определяется числом экспериментальных данных в (1.2)):

$$S_{ki} = y_{Ekn+i} + \hat{a}_{n-1}^k y_{E(n-1+i)k} + \dots + \hat{a}_n^k y_{Ei}. \quad (7.1)$$

Пусть в соответствии с количеством наблюдений (1.2), выбранному значению k соответствует q_k значений S_{ki} . Целевую функцию J определим следующим образом:

$$J = \sum_k \left(\frac{1}{q_k} \sum_i S_{ki}^2 \right). \quad (7.2)$$

Как следует из (7.1), функция J зависит от значений a_j и наблюдаемых величин y_{Ei} . Введение этой функции позволяет формулировать алгоритм решения первой подзадачи (нахождение оценок a_j) как процедуру минимизации (7.2) выбором значений a_j .

Описанный алгоритм может быть обобщен следующим образом. Пусть в (1.1) известны m показателей μ_j , т.е. характеристический полином уравнения (2.1) может быть представлен в виде

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda^{n-m} + \alpha_1 \lambda^{n-m-1} + \dots + \alpha_{n-m})(\lambda^m + \gamma_1 \lambda^{m-1} + \dots + \gamma_m), \quad (7.3)$$

где m коэффициентов γ_i определяются известными значениями μ_j , а $n-m$ коэффициентов α_i подлежат определению. Для нахождения коэффициентов α_i можно использовать алгоритм, описанный выше, который должен быть только дополнен процедурой вычисления, согласно (7.3), коэффициентов a_j как функций α_i .

§8. Комплексование измерений.

Вопрос комплексования возникает в задаче идентификации, когда имеется несколько массивов измерений (1.2), соответствующих «моделям» (1.1), которые имеют одинаковые показатели μ_j , но различные «амплитуды» d_j . Простейший такого рода случай имеет место в примере 1, когда во время переходного процесса одновременно регистрируются два массива (1.2), соответствующие смещению и ускорению некоторой точки системы виброзащиты. В таких задачах идентификации обычно можно ограничиться определением показателей μ_j в (1.1) или коэффициентов полинома $\Delta(s)$, стоящего в знаменателе передаточной функции системы (4.1). Отметим, что использование в подобных задачах метода матричных пучков представляется проблематичным, но не исключает возможности его использования как отдельной процедуры. Так, применив этот метод к какому-либо из упомянутых массивов (1.2), можно получить оценки искомых параметров, которые могут быть использованы как начальное приближение в нелинейном аналоге метода Прони.

Метод Прони (§3) и нелинейный аналог метода Прони (§7) легко могут быть адаптированы к аналогичным задачам.

Действительно, для каждого из упомянутых массивов (1.2) можно составить систему линейных уравнений типа (3.4) относительно компонент вектора \hat{a} . Далее, объединив эти системы, можно получить одну систему, определяющую искомые коэффициенты \hat{a}_j полинома (3.1). Для решения полученной таким образом системы можно использовать описанный в §5 метод наименьших квадратов или тотальный метод наименьших квадратов.

В случае нелинейного аналога метода Прони необходимо для каждого из массивов строить функции невязки типа (7.2) и далее минимизировать суммарную (с теми или иными весовыми множителями) функцию невязки.

Таким образом, в случае задачи комплексования, когда есть несколько массивов типа (1.2), можно использовать описанные выше процедуры метода Прони при соответствующей их модификации.

Рассмотрим другую задачу комплексования. Предположим, что в массиве (1.2) отсутствуют результаты измерений в некоторых точках. В этом случае массив (1.2) можно представить в виде совокупности массивов, в каждом из которых измерения производятся через равные промежутки времени. Далее, к полученной таким образом

совокупности массивов результатов измерений можно применить алгоритмы метода Прони, аналогично тому, как было описано выше. Однако, в этом случае задачи комплексирования более эффективным может оказаться алгоритм [18] решения задачи идентификации при нерегулярной последовательности результатов измерений.

Отметим, что, как будет ясно из §9, алгоритм [18] достаточно трудоемок. В этой связи его использование целесообразно лишь при наличии достаточно хорошего начального приближения. Поэтому общая схема решения задачи комплексирования в случае отсутствия некоторых измерений может включать в себя этап грубой оценки коэффициентов полинома $\Delta(s)$ в (4.1) с помощью метода Прони, уточнение этой оценки с помощью нелинейного метода Прони и дальнейшее уточнение полученных оценок коэффициентов $\Delta(s)$ с помощью алгоритма [18]. Значение коэффициентов $N(s)$ – числителя передаточной функции (4.1) можно найти, используя соотношения (4.5), (4.6).

§9. Нерегулярная последовательность моментов измерений.

Снимем предположение, что измерения производятся через равные промежутки времени, только предположим, что в (1.2) $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_\ell$. В этом случае, задавшись какой либо регулярной последовательностью моментов времени $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\ell$, можно путем той или иной процедуры интерполяции результатов измерений $y_E(t_i)$ получить оценки величин $\bar{y}_E(\tau_i)$. Далее, применительно к этой регулярной последовательности можно использовать описанные выше алгоритмы оценки параметров модели. Однако, приняв во внимание отмеченную выше высокую чувствительность оценок параметров модели к точности исходной информации, такой подход, как отмечено в [18], позволяет получить только довольно грубые оценки параметров модели. В этой связи рассмотрим обобщение нелинейного аналога метода Прони на случай нерегулярной последовательности моментов измерений. Заметим, что в случае регулярной последовательности моментов измерений суть метода Прони (обращение в нуль выражения (3.2)) базируется на теореме Гамильтона – Кэли, а именно, на том факте, что матрица e^{At_s} удовлетворяет своему характеристическому полиному. В данном случае эту теорему удобно интерпретировать как факт, что существует обращающаяся в нуль линейная комбинация ϑ матриц $e^{A\vartheta T_s}$ ($\vartheta = 0, \dots, n$). Существенно, что, в общем случае, такую комбинацию матриц можно построить в случае нерегулярной последовательности измерений, когда $t_i \neq (i-1)T_s$. Действительно, пусть из последовательности (1.2) выбран $n+1$ элемент

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}. \quad (9.1)$$

Движение модели описывается уравнением (2.2). Сопоставим последовательности (9.1) последовательность матриц

$$D_r = e^{At_r}, \quad r = 1, \dots, n+1. \quad (9.2)$$

В этом случае аналогом (3.2) будет следующее соотношение:

$$y_{n+1} + \hat{a}_1 y_n + \dots + \hat{a}_n y_1 = C [D_{n+1} + \hat{a}_1 D_n + \dots + \hat{a}_n D_1] x(0). \quad (9.3)$$

Пусть матрица Λ приводит матрицы D_r к диагональной форме

$$\Lambda D_r \Lambda^{-1} = \text{diag} \{ \lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr} \}, \quad (9.4)$$

где λ_{jr} – j -е собственное значение матрицы D_r .

Рассмотрим линейную комбинацию матриц (9.2)

$$\Sigma_d = D_{n+1} + \hat{a}_1 D_n + \dots + \hat{a}_n D_1. \quad (9.5)$$

Согласно (9.8) функция (9.9) зависит от выбранных значений a_j и наблюдаемых величин y_{Ei} . Таким образом, как и в §7, для нахождения оценок коэффициентов a_j по результатам наблюдений (1.2) можно использовать ту или иную процедуру минимизации целевой функции (9.9).

§10. Примеры.

Проиллюстрируем описанные выше алгоритмы на следующих примерах.

Пример 1. Рассмотрим процедуру комплексирования применительно к задаче идентификации параметров системы виброзащиты [7 – 10], изображенной на рис. 1. Система состоит из двух масс m_1, m_2 , которые с помощью пружин c_1, c_2 и демпферов β_1, β_2 соединены между собой и с неподвижным основанием. Координаты масс обозначим x_1, x_2 . До момента времени $t=0$ система находилась в равновесии и к массе m_2 была приложена постоянная сила \vec{F} . В момент $t=0$ сила \vec{F} снимается и на интервале времени $t \in [0, T_f]$ регистрируется переходной процесс с периодом регистрации $T_s = T_f / 2^q$. Предполагается, что регистрируются смещение массы m_2 (координата x_2) и её ускорение $\left(w_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right)$. Таким образом, получаются два массива, аналогичных (1.2), т.е.

$$A_x = \{x_2(t_i) + \varepsilon_{xi}\}; \quad A_w = \{w_2(t_i) + \varepsilon_{wi}\}; \quad t_i = (i-1)T_s. \quad (10.1)$$

Погрешности регистрации $\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{wi}$, как и в [6], моделируются путем сохранения только фиксированного числа ν значащих цифр после запятой. Отметим, что процессы $x_2(t)$ и $w_2(t)$ будут иметь структуру, аналогичную (1.1). Они будут отличаться только параметрами d_j . Задача состоит в получении оценок параметров μ_j модели на основании измерений, содержащихся в массивах (10.1). Отметим, что кроме четырех параметров μ_i в (1.1), которые определяются параметрами системы, изображенной на рис. 1, в массиве A_x будет присутствовать постоянная составляющая. Поэтому необходимо принимать во внимание соотношение (7.3), так как характеристическое уравнение имеет нулевой корень.

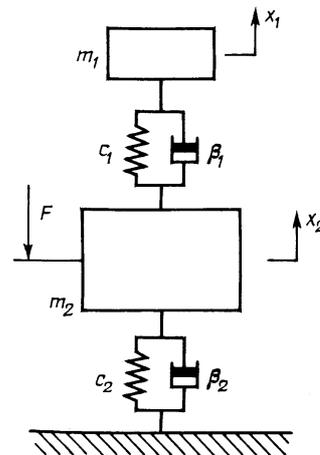


Рис. 1

Итак, принимаются следующие параметры модели, изображенной на рис.1: $m_1 = 10, m_2 = 1, c_1 = 50, c_2 = 10, \beta_1 = 0, \beta_2 = 5, F = 1$ (размерности в рамках данной задачи несущественны). Предполагается также, что массивы (10.1) получены при следующих параметрах регистрации: $T_f = 10, q = 7, \nu = 2$.

Результаты регистрации переходного процесса в системе (массивы A_x, A_w) приведены на рис. 2 (сплошная линия соответствует w_2).

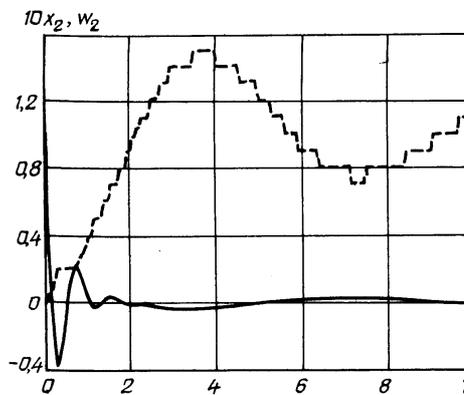


Рис. 2

Процесс идентификации (определение параметров μ_j) включал в себя следующие этапы. Используя только массив A_x , с помощью метода матричного пучка были получены оценки параметров μ_j . Эти оценки принимались в качестве начального приближения при решении задачи комплексирования на базе нелинейного аналога метода Прони, используя оба массива A_x и A_w . Результаты моделирования приведены в табл. 2, где дано сравнение оценок корней μ_j .

Таблица 2

μ_j	I	II	III
μ_1	-2,3301+7,5623i	-0,1609+8,0374i	-2,3986+7,6130i
μ_2	-2,3301-7,5623i	-0,1609-8,0374i	-2,3986-7,6130i
μ_3	-0,1699+0,8773i	-0,1725+0,8609i	-0,2035+0,9103i
μ_4	-0,1699-0,8773i	-0,1725-0,8609i	-0,2035-0,9103i

В столбце I приведены точные значения μ_j ; в столбце II – оценки μ_j , полученные с помощью метода матричного пучка; в столбце III – оценки μ_j , полученные с помощью нелинейного аналога метода Прони при использовании массивов A_x и A_w .

Сравнивая столбцы табл. 2, можно констатировать, что процедура идентификации системы путем совместной обработки массивов результатов измерений смещения и ускорения (комплексирование результатов измерений) позволила существенно повысить точность оценок параметров μ_1, μ_2 , которые определяют «быстрые» движения в переходном процессе.

Пример 2. В этом примере есть один массив результатов измерений (1.2), но в нем отсутствуют некоторые точки. Как и в [24], передаточная функция (4.1) идентифицируемой системы имеет вид

$$G(s) = \frac{-6400s + 1600}{s^4 + 5s^3 + 408s^2 + 416s + 1600}.$$

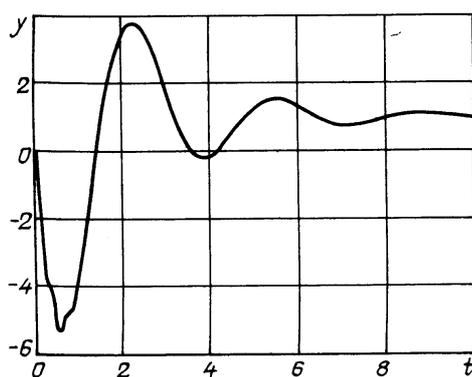


Рис. 3

В обозначениях (4.1) имеем: $a_1 = 5, a_2 = 408, a_3 = 416, a_4 = 1600, b_1 = b_2 = 0, b_3 = -6400, b_4 = 1600$. Реакция этой системы на единичный скачок приведена на рис. 3 [24, Fig. 4.3].

Параметры регистрации выхода $y(t_i)$ системы приняты такими же, как и в примере 1, а именно: $T_f = 10, q = 7, \nu = 2$. Предполагается, что в массиве $A_y = \{y(t_i)\}$ отсутствуют точки, соответствующие индексам $i = 8, 9, 10, 11, 22, 23, 32, 33$, и все

точки с индексом $i > 44$. По причине отсутствия упомянутых точек исходный массив распадается на 4 массива результатов регулярных измерений. Эти массивы схематически изображены на рис. 4 (представлен исходный массив при отсутствии отдельных измерений).

Задача идентификации состоит в нахождении оценок параметров $a_1, a_2, a_3, a_4, b_3, b_4$ по результатам этих измерений.

Обозначим векторы точных значений и получаемых оценок коэффициентов знаменателя и числителя a_{00}, b_{00} и a_0, b_0 , соответственно. Тогда имеем

$$a_{00} = [5 \ 408 \ 416 \ 1600];$$

$$b_{00} = [-6400 \ 1600]. \quad (10.2)$$

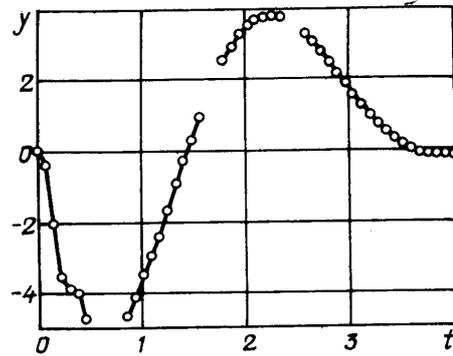


Рис. 4

Качество аппроксимации вектора a_{00} оценкой a_0 будем характеризовать следующим образом:

$$N_0 = \frac{\|a_0 - a_{00}\|}{\|a_{00}\|}. \quad (10.3)$$

Аналогично для полного вектора искомых параметров принимаем

$$N_\theta = \frac{\|\theta_0 - \theta_{00}\|}{\|\theta_{00}\|}; \quad \theta_{00} = [b_{00} \ a_{00}]; \quad \theta_0 = [b_0 \ a_0]. \quad (10.4)$$

В (10.3), (10.4) символ $\|\cdot\|$ означает спектральную норму, векторы a_{00}, b_{00} определяются (10.2). Введем также характеристику точности [24], а именно,

$$NEE(\theta_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left[\frac{\theta_{00}(i) - \theta_0(i)}{\theta_{00}(i)} \right]^2}.$$

Как отмечено в §8, на первом этапе решения этой задачи идентификации находится оценка a_0 . В данном примере, используя метод Прони и тотальный метод наименьших квадратов, получено:

$$a_0 = [5,5 \ 404,5 \ 529,3 \ 1585,4]. \quad (10.5)$$

Этой оценке соответствует $N_0 = 0,0671$. Далее оценка (10.5) уточнялась путем использования процедуры нелинейного аналога метода Прони. Получена следующая оценка θ_0 :

$$\theta_0 = [-6714,9 \ 1647,0 \ 5,1 \ 403,4 \ 441,1 \ 1642,2], \quad (10.6)$$

которой соответствуют

$$N_0 = 0,0289; \quad N_\theta = 0,0473; \quad NEE(\theta_0) = 0,0914.$$

Уточнение оценки (10.6) производилось с использованием алгоритма, описанного в §9. При этом получены следующие результаты:

$$\theta_0 = [-6376,4 \ 1594,2 \ 5,1 \ 406,8 \ 414,6 \ 1595,3];$$

$$N_0 = 0,0029, \quad N_\theta = 0,0036, \quad NEE(\theta_0) = 0,0245.$$

Таким образом, как видно из приведенных результатов, описанные в §9 процедуры идентификации при отсутствии отдельных измерений оказались достаточно эффективными.

§11. Заключение.

В данной статье предложены алгоритмы комплексирования результатов измерений при идентификации линейных стационарных систем по результатам наблюдений переходных процессов в дискретные моменты времени. Подробно рассмотрена задача идентификации при одновременной регистрации нескольких фазовых координат (смещения и ускорения некоторой точки) системы. Процедура идентификации обобщена на случай, когда отсутствуют результаты измерений в некоторые моменты времени. Эффективность предлагаемых алгоритмов демонстрируется на примерах.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано алгоритми комплексирования результатів вимірювань при ідентифікації лінійних стаціонарних систем за результатами спостережень перехідних процесів в дискретні моменти часу. Детально розглянуто задачу ідентифікації при одночасній реєстрації декількох фазових координат системи. Процедуру ідентифікації узагальнено на випадок, коли відсутні результати вимірювань в деякі моменти часу. Ефективність запропонованих алгоритмів демонструється на числових прикладах.

1. Апостолок А.С., Бобров Б.Ф., Бордюг Б.А. и др. Оптимизация метода Прони при идентификации линейных динамических систем. – К., 1987. – 64 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т математики; № 87 – 66).
2. Апостолок А.С., Ларин В.Б. Об идентификации линейных стационарных систем // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 4. – С. 38 – 47.
3. Бахтизин Р.Н., Латышов А.Р. Оценка порядка линейных объектов по экспериментальной информации // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 3. – С. 108 – 112.
4. Иванов Ю.П., Синяков А.Н., Филатов И.В. Комплексирование информационно-измерительных устройств летательных аппаратов / Под ред. В.А. Боднера. – Л.: Машиностроение, 1984. – 297 с.
5. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа: обзор // Тр. ин-та инженеров электро- и радиотехники. – 1981. – 69, № 11. – С. 5 – 51.
6. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа: Справ. руководство. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
7. Ларин В.Б. Выбор параметров системы виброизоляции приборов // Прикл. механика. – 1966. – 11, № 6. – С. 99 – 104.
8. Ларин В.Б. Некоторые вопросы конструирования систем виброизоляции приборов // Инж. журнал. Механика твердого тела. – 1966. – 6. – С. 20 – 26.
9. Ларин В.Б. Статистические задачи виброзащиты. – К.: Наук. думка, 1974. – 127 с.
10. Ларин В.Б. Некоторые задачи оптимизации систем виброзащиты // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 4. – С. 39 – 67.
11. Льюнг Л. О точности модели в идентификации систем // Изв. АН. Техн. кибернетика. – 1992. – № 6. – С. 55 – 64.
12. Немюра А.А. Оптимизация шага дискретности времени при идентификации непрерывных динамических систем и процессов // Тез. докл. VII Всесоюз. совещ. по проблемам управления, Минск, 21 – 25 нояб. 1977г. – М.: Минск: Ин-т проблем управления, Ин-т технической кибернетики, 1977. – Кн. 1. – С. 221 – 225.
13. Поляк Б.Т., Назин С.А. Оценка параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 1 – 2. – С. 103 – 115.
14. Тобольский А.В. Свойства и структура полимеров. – М.: Химия, 1964. – 324 с.
15. Хемминг Р.В. Численные методы. Для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
16. Abatzoglou T.J., Mendel J.M., Harada G.A. The Constrained Total Least Squares Technique and its Applications to Harmonic Superresolution // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1991. – 39, N 5. – P. 1070 – 1086.
17. Aliev F.A., Larin V.B. Parametrization of Set of Regulators which are Stabilizing Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 6. – P. 599 – 618.
18. Apostolyuk A.S., Larin V.B. On linear stationary system identification at regular and irregular measurements // Appl. and Comp. Math. – 2009. – 8, N 1. – P. 42 – 53.
19. Bellman R. On the separation of exponentials // Boll. Unione Matem. Ital. – 1960. – III, 15, N 1. – P.38 – 39.

20. Bryson, JR. A.E. Some Connections Between Modern and Classical Control Concepts // Trans. ASME. J. Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1979. – **101**, June. – P. 91 – 98.
21. DeGroat R.D., Dowling E.M. The Data Least Squares Problem and Channel Equalization // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1993. – **41**, N 1. – P. 407 – 411.
22. Deychenkova L.V., Larin V.B. The Method of Least Squares Used in the Identification of Vibromeasuring Systems // Soviet Autom. Contr. – 1977. – N 3. – P. 11 – 17.
23. Fassions S.D., Eman K.F., Wu S.M. Sensitivity analysis of the discrete-to-continuous dynamic system transformation // Trans. ASME. J. Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1990. – **112**. – P. 1 – 9.
24. Garnier H., Wang L. (Eds.). Identification of Continuous-time Models from Sampled Data. – London: Springer-Verlag, 2008. – 281 p.
25. Hildebrand F.B. Introduction to Numerical Analysis. – New York: McGraw-Hill, 1956. – 341 p.
26. Hua Y., Sarkar T.K. Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped / Undamped Sinusoids in Noise // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Proc. – 1990. – **38**, N 5. – P. 814 – 824.
27. Kailath T. Linear systems. – N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980. – 682 p.
28. Larin V.B. The Use of Matrix Pencils in an Identification Problem // J. of Automat. and Inform. Sci. – 1996. – **28**(3&4). – P. 53 – 62.
29. Larin V.B. About Stabilization of Systems with Delay // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1148 – 1160.
30. Larin V.B. About Control of the Composite Wheeled Vehicle with Two Steering Wheels // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1413 – 1420.
31. Larsson E.K., Mossberg M., Sonderstrom T. Identification of continuous-time ARX model from irregularly sampled data // IEEE Trans. Automat. Control. – 2007. – **52**, N 3. – P. 417 – 427.
32. Moustafa K.A.F. Time-domain structural identification using free response measurements // Int. J. Control. – 1992. – **56**, N 1. – P. 51 – 65.
33. Reddy V.U., Biradar L.S. SVD-Based Information Theoretic Criteria for Detection of the Number of Damped / Undamped Sinusoids and Their Performance Analysis // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1993. – **41**, N 9. – P. 2872 – 2881.
34. Smith F. W. System Laplace-Transform Estimation from Sampled Data // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1968. – **13**, N 1. – P. 37 – 45.
35. Yanyutin E.G., Povalyaev S.I. Identification of Nonstationary Axisymmetric Load Distributed Along a Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 7. – P. 794 – 801.
36. Yasinskii A.V. Identification of the Thermal and Thermostressed States of a Two-Layer Cylinder from Surface Displacement // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 1. – P. 34 – 40.

Поступила 26.06.2009

Утверждена в печать 15.06.2010