

Б. Н. Кифоренко¹, А. М. Харитонов²

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
С ДВУХРЕЖИМНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

¹ *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина; e-mail: bkifor@ukr.net;*

² *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
пр. Глушкова, 2, 01601 МСП, Киев, Украина; e-mail: kharitonov@univ.kiev.ua*

Abstract. An optimization problem of the interplanetary transfer of spacecraft with bi-regime nuclear rocket engine is formulated. The transfer trajectory is forming owing to combination of parts of high and low engine thrust. An analysis of necessary conditions of optimality is carried out. The solution of the problem on transfer Earth-Mars with duration of 180 astronomical days is given.

Key words: bi-regime nuclear rocket engine, optimal interplanetary transfer, necessary conditions of optimality.

Введение.

Одной из наиболее сложных проблем современной космонавтики является разработка межорбитальных транспортных аппаратов (МТА), способных обеспечить доставку больших полезных грузов с низкой околоземной орбиты на геостационарную, а также – на орбиты спутников планет Солнечной системы и Луны. Анализ научных публикаций последних лет свидетельствует о том, что ядерные ракетные двигатели (ЯРД) и электрические ракетные двигатели (ЭРД) с ядерным источником энергии являются наиболее перспективными типами маршевых двигателей для подобных МТА [1, 13, 14, 17, 18].

Основным конструктивным элементом обеих двигательных систем является источник тепловой энергии – ядерный реактор. В двигателях ЯРД тепловая энергия рабочего тела преобразуется в сопле в кинетическую энергию реактивной струи. Диапазон значений тяги ЯРД 1-1200кН при удельном импульсе порядка 1000с [1, 7, 13, 14, 18]. Ресурс двигательной установки на основе ЯРД имеет порядок нескольких часов. При работе реактора в составе бортовой электростанции тепловая энергия преобразуется в электрическую, которая используется для бортовых нужд и питания ЭРД. Двигательные системы, образованные кластерами ЭРД, способны генерировать тягу, измеряемую десятками и даже сотнями ньютонов при потребляемой электрической мощности порядка десятков мегаватт (эл.) и удельном импульсе 5000 – 10000с [1, 7, 17]. Их ресурс имеет порядок нескольких лет. По сравнению с ЯРД двигатели ЭРД, таким образом, на порядок более экономичны, однако их применение для осуществления пилотируемых экспедиций существенно ограничено вследствие большой продолжительности перелета. Эффективность использования преимуществ двигателей большой и малой тяги при их совместном применении для выполнения того или иного маневра анализировалась во многих публикациях. Результаты исследований, обобщенные в известных монографиях [4, 16 и др.], свидетельствуют о целесообразности оптимального сочетания участков большой и малой тяги при выполнении длительных переходов между удаленными орбитами. Естественным следствием указанной особенности рационального управления движением космических аппаратов (КА)

является идея использования так называемых двухрежимных (bi-modal) ЯРД (ДЯРД), реактор которых обеспечивает последовательную работу в обоих необходимых режимах, а двигатель включает как реактивное сопло и систему подачи ускоряемого в нем рабочего тела (большая тяга), так и ЭРД малой тяги с соответствующими системами преобразования, подачи и отвода энергии [1, 7, 13, 14].

Оценки эффективности комбинирования большой и малой тяги, приведенные в различных работах [1, 2, 8 и др.], получены, как правило, при *a priori* выбранных фиксированных параметрах двигательных систем. Проблема же оптимального сочетания двигательных систем ограниченной скорости истечения (большая тяга) и ограниченной мощности (малая тяга) исследована ранее [1, 2, 8] с использованием достаточно общих теоретических представлений об этих системах как объектах регулирования. В основе указанных исследований лежал подход импульсной аппроксимации активных участков [6, 9], не позволяющий учесть специфику рабочих процессов в двигательной системе.

Целью настоящей работы является формулировка и анализ общей проблемы оптимизации параметров, управлений и траекторий КА с ДЯРД. При этом используется математическая модель ЯРД [10], учитывающая реальные особенности таких систем, а именно: ограниченность скорости истечения (температурные ограничения) и сравнительно малую тяговооруженность, приводящую к некорректности использования классического подхода импульсной аппроксимации. Результаты предложенного в работе подхода проиллюстрированы на примере оптимизации параметров двигательной установки и управления ее работой при транспортировке КА с орбиты спутника Земли на орбиту спутника Марса за 180 суток [13, 14].

§1. Формулировка задачи.

Рассмотрим задачу о доставке максимальной полезной нагрузки из заданного начального положения в фазовом пространстве (например, геоцентрическая орбита старта) в предписанное конечное положение (например, ареоцентрическая орбита назначения) за заданное время.

Начальную массу КА примем состоящей из следующих компонентов:

$$M_0 = M_\pi + M_\gamma^{(1)} + M_\gamma^{(2)} + M_\mu^{(1)}(0) + M_\mu^{(2)}(0), \quad (1.1)$$

где M_π – масса полезной нагрузки; $M_\gamma^{(i)}$, $i = 1, 2$ – массы двигательных систем большой ($i = 1$) и малой ($i = 2$) тяги; $M_\mu^{(i)}(0)$, $i = 1, 2$ – массы начальных запасов рабочих тел, используемых двигательными системами большой и малой тяги. Масса двигательной системы большой тяги, включающей и источник энергии – ядерный реактор, принимается зависящей от максимальной тяги $M_\gamma^{(1)} = M_\gamma^{(1)}(P_{\max})$ [15], двигательной системы малой тяги – от максимальной электрической мощности: $M_\gamma^{(2)} = M_\gamma^{(2)}(N_{el \max})$ [4, 7]. Вид указанных функциональных зависимостей предполагается заданным.

Таким образом, задача состоит в определении законов управления двухрежимной двигательной системой и распределении заданной массы M_0 между $M_\gamma^{(1)}$, $M_\gamma^{(2)}$ и $M_\mu^{(1)}(0)$, $M_\mu^{(2)}(0)$, с целью обеспечения максимального значения M_π при заданном времени перелета T (т.е. при заданной конфигурации расположения планет).

Рассмотрим задачу оптимизации межпланетного перелета (например, перелета Земля – Марс), сформулированную с помощью плоской круговой модели движения планет вокруг Солнца. Для решения задачи используем модифицированный метод сфер влияния (ММСВ) [6]. Предположим, что двигатель большой тяги используется только на планетоцентрических участках, а двигатель малой тяги – на гелиоцентрическом участке траектории [2]. Кроме того, примем, что схема перелета, определяемая гелиоцентрическими координатами планет в моменты начала и окончания движения КА, а также временем перелета, выбрана. На рис. 1 показан гелиоцентрический участок траектории с ограниченным временем перелета и выбор транспортирующей системы координат.

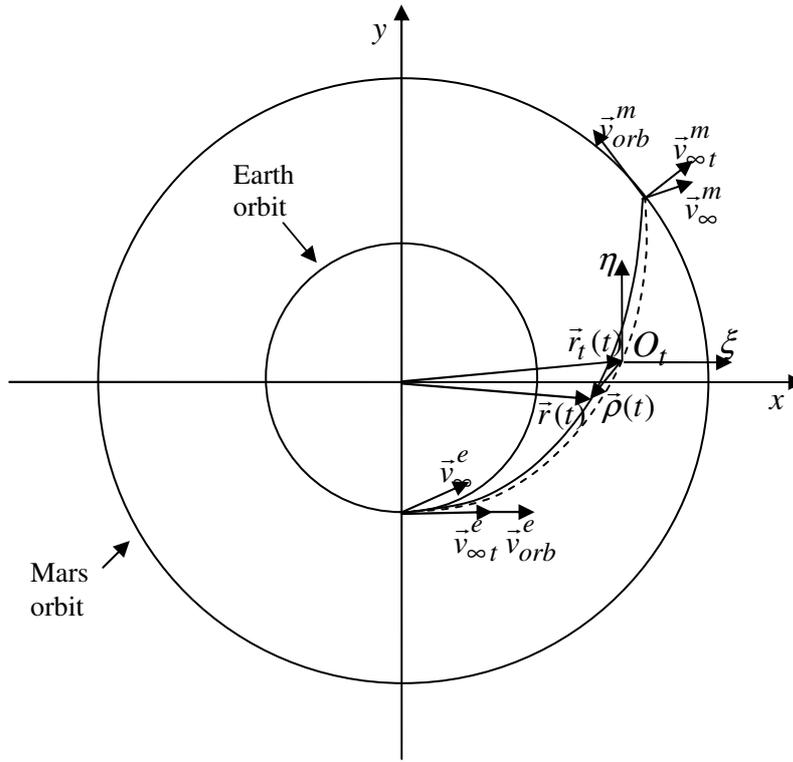


Рис. 1

Задача оптимального управления движением КА на гелиоцентрическом участке (внешняя задача ММСВ) формулируется в транспортирующей системе координат $(O_t \xi \eta)$, рис. 1), применяя нулевое приближение метода транспортирующей траектории, обеспечивающее приемлемую точность оценки затрат на выполнение маневра при умеренной угловой дальности перехода [3]. Радиус-вектор центра масс КА в гелиоцентрической системе координат $\vec{r}(t)$ представляется в виде

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_t(t) + \vec{\rho}(t), \quad (1.2)$$

где \vec{r}_t – радиус-вектор начала транспортирующей системы координат, движущейся по кеплеровскому эллипсу (штриховая линия на рис. 1), $\vec{\rho}(t)$ – радиус-вектор центра масс КА в транспортирующей системе координат $O_t \xi \eta$. В качестве транспортирующей используется эллиптическая орбита, касательная в перицентре к круговой орбите планеты старта. Такая орбита часто используется при выполнении пилотируемых межпланетных перелетов, характеризующихся сокращенным, по сравнению с оптимальными перелетами типа Гомана, временем маневра [9].

Уравнения движения и граничные условия задачи оптимизации движения на гелиоцентрическом участке в нулевом приближении метода транспортирующей траектории имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v_\xi; \quad \dot{\eta} = v_\eta; \quad \dot{v}_\xi = a \cos \theta; \quad \dot{v}_\eta = a \sin \theta; \quad J = a^2; \quad J(t_{12}) \rightarrow \min; \\ \xi(t_{11}) &= 0; \quad \eta(t_{11}) = 0; \quad v_\xi(t_{11}) = v_{\infty x}^e - v_{\infty x}^m, \quad v_\eta(t_{11}) = v_{\infty y}^e; \quad \xi(t_{12}) = 0; \\ \eta(t_{12}) &= 0; \quad v_\xi(t_{12}) = v_{\infty x}^m - v_{\infty x}^e; \quad v_\eta(t_{12}) = v_{\infty y}^m - v_{\infty y}^e; \quad J(t_{11}) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где v_ξ, v_η – компоненты вектора скорости КА в транспортирующей системе координат; t_{11}, t_{12} – моменты начала и окончания движения на гелиоцентрическом участке; a – величина реактивного ускорения; $v_{\infty x}^e, v_{\infty x}^m, v_{\infty y}^e, v_{\infty y}^m$ и $v_{\infty x}^e, v_{\infty x}^m, v_{\infty y}^e, v_{\infty y}^m$ – проекции векторов $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m, \vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$ на оси гелиоцентрической системы координат ($v_{\infty y}^e = 0$). Здесь \vec{v}_{∞}^e и \vec{v}_{∞}^m – планетоцентрические скорости на границах сфер влияния Земли и Марса, соответствующие перелету по транспортирующей траектории (с использованием только двигателя большой тяги); \vec{v}_{∞}^e и \vec{v}_{∞}^m – планетоцентрические скорости на границах сфер влияния, соответствующие перелету с комбинированием большой и малой тяги. Таким образом, перелету по транспортирующей траектории соответствуют гелиоцентрические скорости на границах сфер влияния $\vec{v}_{\infty}^e + \vec{v}_{orb}^e$ и $\vec{v}_{\infty}^m + \vec{v}_{orb}^m$, а перелету с комбинированием большой и малой тяги – $\vec{v}_{\infty}^e + \vec{v}_{orb}^e$ и $\vec{v}_{\infty}^m + \vec{v}_{orb}^m$, где \vec{v}_{orb}^e и \vec{v}_{orb}^m – орбитальные скорости Земли и Марса. Минимальное значение функционала J в задаче (1.3) определяется выражением

$$J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m) = \frac{4}{t_{12} - t_{11}} \left[\left\{ (v_{\infty x}^m - v_{\infty x}^e)^2 + (v_{\infty x}^m - v_{\infty x}^e)(v_{\infty x}^e - v_{\infty x}^e) + (v_{\infty x}^e - v_{\infty x}^e)^2 \right\} + \right. \\ \left. + \left\{ (v_{\infty y}^m - v_{\infty y}^e)^2 + (v_{\infty y}^m - v_{\infty y}^e)v_{\infty y}^e + (v_{\infty y}^e)^2 \right\} \right]. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) может быть получена из общего решения вариационной задачи минимизации функционала J при перелете между двумя заданными точками в бессилово поле [4].

Безразмерная масса КА в момент окончания движения с малой тягой определяется через массу КА в момент окончания геоцентрического участка $m(t_{11})$ и значение функционала J [4]

$$m(t_{12}) = \frac{m(t_{11})}{1 + \alpha \cdot m(t_{11}) \cdot J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m)}, \quad (1.5)$$

где $\alpha = \frac{M_* V_*^2}{2N_{el \max} t_*}$; $N_{el \max}$ – максимальная электрическая мощность питания двигателя малой тяги; M_*, V_*, t_* – масштабы массы, скорости и времени.

Формула (2.4) справедлива при предположении линейной зависимости массы источника энергии от максимального значения развиваемой им мощности $N_{el \max}$.

Внутренняя задача ММСВ сводится к оптимизации перелета КА с круговой орбиты старта на гиперболическую орбиту выхода на границу сферы влияния (для маневра в сфере влияния планеты старта) или наоборот – с гиперболической переходной орбиты на круговую орбиту вокруг планеты назначения (для маневра в сфере влияния планеты назначения) [11]. На рис. 2 представлена геометрия внутренней задачи ММСВ (выход на гиперболическую орбиту с круговой орбиты старта). Штриховой линией показана траектория центра масс КА при переходе с круговой орбиты на гиперболическую.

Предположение о том, что орбиты старта и назначения являются круговыми, существенно

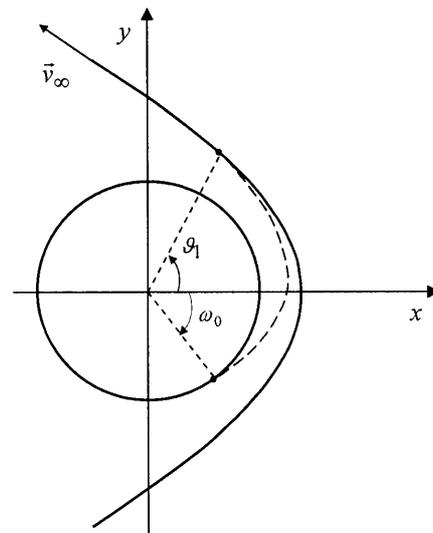


Рис. 2

облегчает общую задачу оптимизации межпланетного перелета. Действительно, в этом случае при решении внутренней задачи направление вектора планетоцентрической скорости КА на границе сферы влияния может быть произвольным, а оптимизации подлежит только его абсолютная величина v_∞ (при решении внутренней задачи радиус сферы влияния принимается бесконечным).

В соответствии с подходом [12], общая задача оптимизации рассматриваемого межпланетного перелета формулируется как задача оптимального управления динамической системой с разрывной правой частью и сменой фазового пространства, изменение фазовых координат которой описывается уравнениями для активных участков в сферах влияния планет старта и назначения (внутренние задачи ММСВ). Смена фазового пространства происходит в момент окончания активного участка маневра в сфере влияния планеты старта (Земли). При этом масса КА в момент начала второго активного участка определяется через конечную массу первого активного участка и скорости $\vec{v}_\infty^e, \vec{v}_\infty^m$ с помощью формул (1.4) и (1.5).

Предположим, что КА оснащен двухрежимной двигательной системой на основе ЯРД, а гравитационное ускорение, как это принято при использовании ММСВ, определяется только действием планеты старта или назначения и описывается с помощью модели центрального ньютоновского гравитационного поля. Тогда уравнения движения внутренней задачи, записанные в системе координат с началом в центре соответствующей планеты, имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_{xi}; \quad \dot{y}_i = v_{yi}; \quad \dot{v}_{xi} = \frac{a_0 \sqrt{N_i q_i} \cos \theta_i}{m_i} - \frac{c_i x_i}{r_i^3}; \\ \dot{v}_{yi} &= \frac{a_0 \sqrt{N_i q_i} \sin \theta_i}{m_i} - \frac{c_i y_i}{r_i^3} \quad (\dot{m}_i = -a_0 q_i, \quad i = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Граничные условия задачи имеют такой вид:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= r_0^e \cos \omega_0^e; \quad x_1(t_1) = \frac{p(r_p^e, v_\infty^e) \cos \vartheta_1^e}{1 + e(r_p^e, v_\infty^e) \cos \vartheta_1^e}; \\ y_1(0) &= r_0^e \sin \omega_0^e; \quad y_1(t_1) = \frac{p(r_p^e, v_\infty^e) \sin \vartheta_1^e}{1 + e(r_p^e, v_\infty^e) \cos \vartheta_1^e}; \\ v_{x1}(0) &= -v_0^e \sin \omega_0^e; \quad v_{x1}(t_1) = -\sin \vartheta_1^e / \sqrt{L^e \cdot p(r_p^e, v_\infty^e)}; \\ v_{y1}(0) &= v_0^e \cos \omega_0^e; \quad v_{y1}(t_1) = (e(r_p^e, v_\infty^e) + \cos \vartheta_1^e) / \sqrt{L^e \cdot p(r_p^e, v_\infty^e)}; \\ m_1(0) &= 1; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} x_2(t_1) &= \frac{p(r_p^m, v_\infty^m) \cos \vartheta_1^m}{1 + e(r_p^m, v_\infty^m) \cos \vartheta_1^m}; \quad x_2(t_2) = r_0^m \cos \omega_0^m; \\ y_2(t_1) &= \frac{p(r_p^m, v_\infty^m) \sin \vartheta_1^m}{1 + e(r_p^m, v_\infty^m) \cos \vartheta_1^m}; \quad y_2(t_2) = r_0^m \sin \omega_0^m; \\ v_{x2}(t_1) &= -\sin \vartheta_1^m / \sqrt{L^m \cdot p(r_p^m, v_\infty^m)}; \quad v_{x2}(t_2) = -v_0^m \sin \omega_0^m; \\ v_{y2}(t_1) &= (e(r_p^m, v_\infty^m) + \cos \vartheta_1^m) / \sqrt{L^m \cdot p(r_p^m, v_\infty^m)}; \quad v_{y2}(t_2) = v_0^m \cos \omega_0^m; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$m_2(t_1) = \frac{m_1(t_1)}{1 + \alpha \cdot m_1(t_1) \cdot J(\vec{v}_\infty^e, \vec{v}_\infty^m)}.$$

В формулах (1.6) – (1.8) t – время, $t \in [0, t_1]$ ($i = 1$) для движения на геоцентрическом участке, $t \in [t_1, t_2]$ ($i = 2$) – для движения на ареоцентрическом участке; $x_i, y_i, v_{xi}, v_{yi}, i = 1, 2$ – компоненты радиуса-вектора и вектора скорости центра масс КА в системе координат с началом в центре соответствующей планеты; $m_i, i = 1, 2$ – текущие значения массы КА на соответствующих участках; $N_i(t), q_i(t), \theta_i(t), i = 1, 2$ – управляющие функции, соответственно, тепловая мощность реактора, секундный массовый расход рабочего тела, ускоряемого в сопле, угол вектора тяги с осью Ox ; $a_0 = \frac{P_{\max}}{G_* M_*}$

– параметр тяговооруженности; P_{\max} – максимальная тяга двигателя большой тяги; $M_* = M_0$ – масштаб массы; $G_* = 9,81 \text{ м}^2/\text{с}$ – масштаб гравитационного ускорения;

$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, i = 1, 2$ – величина радиус-вектора центра масс КА; $c_i = \frac{\mu_i}{R_*^2 G_*}, i = 1, 2$ –

гравитационный параметр; μ – гравитационная постоянная планеты; R_* – масштаб координат x, y ; r_0, v_0 – радиус круговой орбиты искусственного спутника (ИС) и скорость орбитального движения по ней; ω_0, ϑ_1 – угловые координаты, определяющие положения КА, соответственно, на круговых и гиперболических планетоцентрических орбитах (рис. 2); r_p – радиус перицентра гиперболической орбиты; p и e – безразмерный параметр и эксцентриситет гиперболической орбиты, однозначно выражающиеся через радиус перицентра r_p и квадрат гиперболического избытка скорости

$v_\infty^2 = v_{\infty x}^2 + v_{\infty y}^2$; $p(r_p, v_\infty) = L r_p^2 v_\infty^2 + 2 r_p$; $e(r_p) = L r_p v_\infty^2 + 1$; $L = \frac{V_*^2 R_*}{\mu}$, V_* – масштаб скорости.

Верхние индексы « e » и « m » использованы для обозначения параметров, относящихся, соответственно, к маневрам в сферах влияния планет старта (Земли) и назначения (Марса). Уравнения (1.6) и условия (1.7), (1.8) безразмерны. Формулы перехода к размерным переменным приведены в [10].

Критерий качества и условия оптимизации параметров записываются в виде

$$\begin{aligned} m_\pi = m_2(t_2) - (m_{\chi HT}(P_{\max}) - m_{\chi LT}(N_{el \max})) \rightarrow \max; \\ \omega_0^e, \vartheta_1^e, r_p^e, v_{\infty x}^e, v_{\infty y}^e, \omega_0^m, \vartheta_1^m, r_p^m, v_{\infty x}^m, v_{\infty y}^m \rightarrow \text{opt}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где m_π – масса полезной нагрузки; $m_{\chi HT}(P_{\max})$ – масса двигательной системы большой тяги, зависящая от максимальной тяги P_{\max} ; $m_{\chi LT}(N_{el \max})$ – масса двигательной системы малой тяги, зависящая от максимальной электрической мощности $N_{el \max}$. Принято, что запасы рабочего тела для движителей использованы при $t = t_2$ полностью (гарантийные запасы включены в m_π).

Ограничения на управления имеют следующий вид:

$$q \in [q_{\min}, q_{\max}]; N \in [N_{\min}, \min(Dq, N_{\max})], \quad (1.10)$$

где $D, N_{\min}, N_{\max}, q_{\min}, q_{\max}$ – безразмерные параметры ограничений на управляющие функции, используемых в модели [10].

В (1.6) – (1.10) все величины, имеющие размерность длины, отнесены к $R_* = V_*^2 / G_*$; скорости – к $V_* = V_{S_{p \max}}$; $V_{S_{p \max}}$ – скорость истечения, соответствующая максимальной тяге двигателя; массы – к начальной массе M_0 ; мощности – к предель-

но достижимой тепловой мощности \bar{N}_{\max} ; расходы – к максимальному расходу Q_{\max} . Масштаб независимой переменной времени: $t_* = V_*/R_*$.

Постановка задачи (1.6) – (1.10), в отличие от [12], предполагает проведение параметрической оптимизации, заключающейся в определении оптимальных значений максимальной тяги P_{\max} двигателя большой тяги и максимальной электрической мощности $N_{el\max}$ питания двигателя малой тяги.

§2. Решение задачи.

Прежде всего отметим, что граничные условия для координат и скоростей каждой из внутренних задач содержат только абсолютные величины скоростей на сферах влияния v_{∞}^e и v_{∞}^m , а проекции этих скоростей на оси соответствующих планетоцентрических систем координат входят только в выражение для функционала $J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m)$. Поэтому для любых значений v_{∞}^e и v_{∞}^m проекции векторов скоростей $v_{\infty X}^e, v_{\infty Y}^e, v_{\infty X}^m, v_{\infty Y}^m$ могут быть определены из решения следующей задачи на условный экстремум:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m) = & \{[(v_{\infty TX}^m - v_{\infty TX}^e)^2 + (v_{\infty TX}^m - v_{\infty TX}^e)(v_{\infty TX}^e - v_{\infty TX}^e) + (v_{\infty TX}^e - v_{\infty TX}^e)^2] + \\ & + [(v_{\infty TY}^m - v_{\infty TY}^e)^2 - (v_{\infty TY}^m - v_{\infty TY}^e)v_{\infty Y}^e + (v_{\infty Y}^e)^2]\} \rightarrow \min; \\ & (v_{\infty X}^e)^2 + (v_{\infty Y}^e)^2 = (v_{\infty}^e)^2; \quad (v_{\infty X}^m)^2 + (v_{\infty Y}^m)^2 = (v_{\infty}^m)^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из необходимых условий минимума соответствующей функции Лагранжа получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v_{\infty Y}^e = & \frac{v_{\infty TY}^m v_{\infty TX}^e (2(v_{\infty TX}^m - v_{\infty TX}^e) + (v_{\infty TX}^e - v_{\infty TX}^e))}{v_{\infty X}^m v_{\infty X}^e - (v_{\infty X}^m - v_{\infty TX}^m - 2v_{\infty TX}^e)(v_{\infty TX}^e - v_{\infty TX}^e - 2v_{\infty TX}^m)}; \\ v_{\infty Y}^m = & \frac{v_{\infty TY}^m v_{\infty TX}^m (2(v_{\infty TX}^m - v_{\infty TX}^e) + (v_{\infty TX}^e - 4v_{\infty TX}^e))}{v_{\infty X}^m v_{\infty X}^e - (v_{\infty X}^m - v_{\infty TX}^m - 2v_{\infty TX}^e)(v_{\infty TX}^e - v_{\infty TX}^e - 2v_{\infty TX}^m)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При решении общей задачи оптимизации соотношения (2.2) позволяют рассматривать в качестве независимых параметров только компоненты $v_{\infty X}^e, v_{\infty X}^m$. В частном случае перелета по схеме Гомана имеем $v_{\infty TY}^m = 0$ и $v_{\infty Y}^e = v_{\infty Y}^m = 0$.

Проведем анализ необходимых условий оптимальности. В соответствии с принципом максимума Понтрягина для систем с разрывной правой частью и сменой фазового пространства [5] на каждом из интервалов непрерывности $t \in [0, t_1]$ и $t \in [t_1, t_2]$ должны выполняться условия принципа максимума для систем с непрерывной правой частью, а в момент t_1 разрыва правых частей и смены фазового пространства фазовые координаты и сопряженные функции должны удовлетворять условиям скачка. Таким образом, в каждый момент времени управляющие функции $N_i(t), q_i(t), \theta_i(t)$ ($i = 1, 2$), необходимо должны обеспечивать максимум соответствующего гамильтониана

$$\begin{aligned} H_i = & \psi_{xi} v_{xi} + \psi_{yi} v_{yi} + \psi_{v_i} \left(\frac{a_0 \sqrt{N_i q_i} \cos \theta_i}{m_i} - c_i \frac{x_i}{r_i^3} \right) + \\ & + \psi_{v_{y,i}} \left(\frac{a_0 \sqrt{N_i q_i} \cos \theta_i}{m_i} - c_i \frac{y_i}{r_i^3} \right) - \psi_{mi} a_0 q_i \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\psi_{xi}, \psi_{yi}, \psi_{v_i}, \psi_{v_{y,i}}, \psi_{mi}$ ($i = 1, 2$) – сопряженные функции.

Условия трансверсальности и условия скачка запишем, исходя из полученных в [12] условий трансверсальности модифицированной задачи оптимального управления.

Условия трансверсальности в момент $t = 0$

$$\psi_{x_1}(0) \frac{\partial x_1(0)}{\partial \omega_0^e} + \psi_{y_1}(0) \frac{\partial y_1(0)}{\partial \omega_0^e} + \psi_{v_{x_1}}(0) \frac{\partial v_{x_1}(0)}{\partial \omega_0^e} + \psi_{v_{y_1}}(0) \frac{\partial v_{y_1}(0)}{\partial \omega_0^e} = 0. \quad (2.4)$$

Условия скачка в момент $t = t_1$

$$\psi_{x_1}(t_1) \frac{\partial x_1(t_1)}{\partial \vartheta_1^e} + \psi_{y_1}(t_1) \frac{\partial y_1(t_1)}{\partial \vartheta_1^e} + \psi_{v_{x_1}}(t_1) \frac{\partial v_{x_1}(t_1)}{\partial \vartheta_1^e} + \psi_{v_{y_1}}(t_1) \frac{\partial v_{y_1}(t_1)}{\partial \vartheta_1^e} = 0; \quad (2.5)$$

$$\psi_{x_1}(t_1) \frac{\partial x_1(t_1)}{\partial r_p^e} + \psi_{y_1}(t_1) \frac{\partial y_1(t_1)}{\partial r_p^e} + \psi_{v_{x_1}}(t_1) \frac{\partial v_{x_1}(t_1)}{\partial r_p^e} + \psi_{v_{y_1}}(t_1) \frac{\partial v_{y_1}(t_1)}{\partial r_p^e} = 0; \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_{x_1}(t_1) \frac{\partial x_1(t_1)}{\partial v_{\infty x}^e} + \psi_{y_1}(t_1) \frac{\partial y_1(t_1)}{\partial v_{\infty x}^e} + \psi_{v_{x_1}}(t_1) \frac{\partial v_{x_1}(t_1)}{\partial v_{\infty x}^e} + \psi_{v_{y_1}}(t_1) \frac{\partial v_{y_1}(t_1)}{\partial v_{\infty x}^e} = \\ = \psi_{m_2}(t_1) \frac{\partial m_2(t_1)}{\partial v_{\infty x}^e}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\psi_{m_1}(t_1) = \psi_{m_2}(t_1) \frac{\partial m_2(t_1)}{\partial m_1(t_1)}; \quad (2.8)$$

$$\psi_{x_2}(t_1) \frac{\partial x_2(t_1)}{\partial \vartheta_1^m} + \psi_{y_2}(t_1) \frac{\partial y_2(t_1)}{\partial \vartheta_1^m} + \psi_{v_{x_2}}(t_1) \frac{\partial v_{x_2}(t_1)}{\partial \vartheta_1^m} + \psi_{v_{y_2}}(t_1) \frac{\partial v_{y_2}(t_1)}{\partial \vartheta_1^m} = 0; \quad (2.9)$$

$$\psi_{x_2}(t_1) \frac{\partial x_2(t_1)}{\partial r_p^m} + \psi_{y_2}(t_1) \frac{\partial y_2(t_1)}{\partial r_p^m} + \psi_{v_{x_2}}(t_1) \frac{\partial v_{x_2}(t_1)}{\partial r_p^m} + \psi_{v_{y_2}}(t_1) \frac{\partial v_{y_2}(t_1)}{\partial r_p^m} = 0; \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \psi_{x_2}(t_1) \frac{\partial x_2(t_1)}{\partial v_{\infty x}^m} + \psi_{y_2}(t_1) \frac{\partial y_2(t_1)}{\partial v_{\infty x}^m} + \psi_{v_{x_2}}(t_1) \frac{\partial v_{x_2}(t_1)}{\partial v_{\infty x}^m} + \psi_{v_{y_2}}(t_1) \frac{\partial v_{y_2}(t_1)}{\partial v_{\infty x}^m} = \\ = -\psi_{m_2}(t_1) \frac{\partial m_2(t_1)}{\partial v_{\infty x}^m}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Условия трансверсальности в момент $t = t_2$

$$\psi_{m_2}(t_2) = 1; \quad H_i = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (2.12)$$

$$\psi_{x_2}(t_2) \frac{\partial x_2(t_2)}{\partial \omega_0^m} + \psi_{y_2}(t_2) \frac{\partial y_2(t_2)}{\partial \omega_0^m} + \psi_{v_{x_2}}(t_2) \frac{\partial v_{x_2}(t_2)}{\partial \omega_0^m} + \psi_{v_{y_2}}(t_2) \frac{\partial v_{y_2}(t_2)}{\partial \omega_0^m} = 0. \quad (2.13)$$

Выражения для оптимальных управлений θ_i получим из условий максимума гамильтонианов (2.3) по θ_i

$$\cos \theta_i = \frac{\psi_{v_{x_i}}}{\psi_{v_i}}; \quad \sin \theta_i = \frac{\psi_{v_{y_i}}}{\psi_{v_i}} \quad \left(\psi_{v_i} = \sqrt{\psi_{v_{x_i}}^2 + \psi_{v_{y_i}}^2}; \quad i = 1, 2 \right). \quad (2.14)$$

Сопряженная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{xi} &= c_i \frac{\psi_{v_{xi}}(y_i^2 - 2x_i^2) - 3\psi_{v_{yi}}x_i y_i}{\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)^5}}; \quad \dot{\psi}_{yi} = c_i \frac{\psi_{v_{yi}}(x_i^2 - 2y_i^2) - 3\psi_{v_{xi}}x_i y_i}{\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)^5}}; \\ \dot{\psi}_{v_{xi}} &= -\psi_{xi}; \quad \dot{\psi}_{v_{yi}} = -\psi_{yi}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Оптимальные управления $N_{i\text{opt}}(t)$, $q_{i\text{opt}}(t)$ могут быть определены, исходя из общего анализа оптимального управления, проведенного в работе [10]. Окончательное решение задачи (1.6) – (1.10) ниже проведено для нерегулируемого по величине тяги ЯРД, т.е. в предположении $N_i(t) = N_{\max}$, $q_i(t) = q_D$, $i = 1, 2$ (q_D – значение секундного массового расхода, соответствующее максимуму эффективной скорости истечения). При данном предположении величина тяги полностью определяется тепловой мощностью N_{\max} .

Условия (1.7), (1.8) (2.4) – (2.13) образуют систему из 30-ти уравнений относительно 30-ти постоянных двухточечной краевой задачи, к которой сводится задача оптимального управления (1.6) – (1.10) после применения условий (2.2) и подстановки в уравнения движения оптимального закона управления (2.14): 10 постоянных интегрирования систем уравнений движения (1.6), 10 постоянных интегрирования сопряженных систем (2.15) и 10 параметров $\omega_0^e, \vartheta_1^e, r_p^e, v_{\infty x}^e, t_1, \omega_0^m, \vartheta_1^m, r_p^m, v_{\infty x}^m, t_2$.

Начальные приближения, необходимые для численного решения задачи, могут быть получены в результате решения подобной задачи, сформулированной с использованием модели центрального однородного гравитационного поля [12]. В этом случае уравнения движения и уравнения сопряженной системы интегрируются в квадратурах.

§3. Анализ результатов.

Исследование эффективности комбинирования большой и малой тяги выполним на примере задачи об оптимизации межпланетного перелета Земля – Марс. Предположим, что высоты круговых орбит старта и назначения заданы и равны 400км. Перелет выполняется по схеме, общий вид которой представлен на рис.1. Все параметры кеплеровской орбиты перелета, соответствующей движению только с большой тягой, определяются планетоцентрической скоростью на границе сферы влияния Земли $\vec{v}_{\infty I}^e = \{v_{\infty Ix}^e, 0\}$. Гелиоцентрическая скорость КА на границе сферы влияния Земли равна: $\vec{v}^e = \vec{v}_{\infty I}^e + \vec{v}_{orb}^e = \{v_{\infty Ix}^e + v_{orb}^e, 0\}$, где \vec{v}_{orb}^e – круговая скорость Земли. Параметр p и эксцентриситет e эллиптической орбиты перелета определяются по формулам [9]

$$p = (v^e)^2 (R^e)^2 / \mu^s; \quad e = \frac{f}{\mu^s} = \frac{R^e (v^e)^2 - \mu^s}{\mu^s},$$

где R^e – радиус круговой гелиоцентрической орбиты Земли; μ^s – гравитационный параметр Солнца; f – абсолютная величина вектора Лапласа.

Зная характеристики орбиты перелета p и e , можем определить истинную ϑ_2^e и эксцентрискую E_2 аномалии точки выхода на орбиту Марса

$$\vartheta_2^e = \arccos\left(\frac{p - R^m}{R^m e}\right); \quad E_2 = \arccos\left[e + \frac{(1 - e^2) \cos \vartheta_2^e}{1 + e \cos \vartheta_2^e}\right].$$

Время перелета определяется по формуле

$$T = \frac{(p/(1-e^2))^{3/2}}{\sqrt{\mu^s}} (E_2 - e \sin E_2).$$

Компоненты вектора планетоцентрической скорости на границе сферы влияния Марса вычисляются следующим образом:

$$v_{\infty_{ix}}^m = \sqrt{\mu^s/p} (e + \cos \vartheta_2) - \sqrt{\mu^s/R^m} \cos \vartheta_2; \quad v_{\infty_{iy}}^m = (\sqrt{\mu^s/p} - \sqrt{\mu^s/R^m}) \sin \vartheta_2.$$

Расчеты выполнены для времени перелета 180 суток [13, 14]. Для такого перелета компоненты векторов планетоцентрических скоростей на сферах влияния Земли и Марса, соответственно, равны: $v_{\infty_{ix}}^e = 3459$ м/с, $v_{\infty_{iy}}^e = 0$, $v_{\infty_{ix}}^m = 4664$ м/с, $v_{\infty_{iy}}^m = 1713$ м/с. Приняты такие значения параметров КА [13,14]: стартовая масса $M_0 = 160$ т, максимальная скорость истечения ЯРД большой тяги $V_{S_{\max}} = 9500$ м/с, температура на входе в сопло $T_{\max} = 2900$ К. Зависимость массы двигателя большой тяги от максимальной тяги принималась в виде [15]

$$m_{\chi_{HT}}(P_{\max}) = \lambda(P_{\max})P_{\max}.$$

Значения параметра λ [13 – 15] приведены в табл. 1, где даны отношения массы двигателя малой тяги к его тяге.

Таблица 1

P_{\max} , кН	66,7	112,2	222,4	333,6	1112,1
λ	36,7	32,4	21,2	19,6	16,3

Зависимость массы двигателя от максимальной электрической мощности принималась в виде [2]: $m_{\chi_{LT}}(N_{el_{\max}}) = \kappa(N_{el_{\max}})N_{el_{\max}}$.

При этом следует учесть, что для двухрежимного ЯРД масса двигательной системы малой тяги не должна включать массу ядерного источника энергии, которая уже включена в массу двигательной системы большой тяги. Поэтому значения параметра κ , приведенные в литературе [2, 7], должны быть соответствующим образом пересчитаны. Значения параметра κ , полученные в предположении, что масса источника энергии составляет 25 % общей массы двигательной системы малой тяги [7], приведены в табл. 2, где даны отношения массы двигателя малой тяги к максимальной электрической мощности.

Таблица 2

$N_{el_{\max}}$, кВт	10	15	30	50	75	120	500	1000	5000	10000
κ	89,3	69,8	50,3	39,0	30,0	19,7	3,9	2,4	1,4	1,18

Учитывая сложность численного решения задачи, оптимизация максимальных тепловой N_{\max} и электрической $N_{el_{\max}}$ мощностей была проведена путем перебора. Значения тепловой мощности N_{\max} изменялись в интервале 700 – 1700 (МВт) с шагом 100МВт; значения электрической мощности $N_{el_{\max}}$ изменялись в интервале 50 – 6500 (кВт) с шагом 50 кВт. Для каждой пары значений N_{\max} , $N_{el_{\max}}$ было получено решение рассмотренной выше задачи оптимального управления. Эффективность оптимизации проиллюстрирована на рис. 3, где показана зависимость относительной полезной нагрузки от параметров двигательных систем большой и малой тяги.

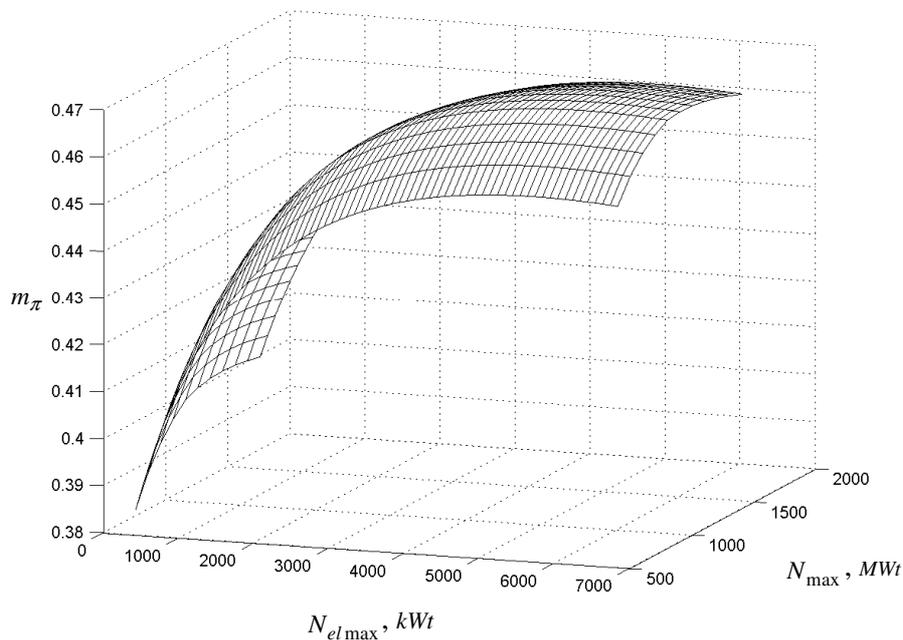


Рис. 3

Оптимальные значения параметров двигательных систем большой и малой тяги составили: $N_{\max \text{opt}} = 1200$ МВт и электрической $N_{el \max \text{opt}} = 5350$ кВт. Для оптимальных значений параметров выигрыш в полезной нагрузке за счет комбинирования движения с большой и малой тягой, по сравнению с применением только двигателя большой тяги, составляет около 17 %. значения компонентов векторов планетоцентрических скоростей на границах сфер влияния составляют: $v_{\infty \text{opt} x}^e = 1602$ м/с; $v_{\infty \text{opt} y}^e = 215$ м/с; $v_{\infty \text{opt} x}^m = 1003$ м/с; $v_{\infty \text{opt} y}^m = 288$ м/с. Таким образом, указанный выигрыш в полезной массе достигается за счет переноса значительной доли необходимых для выполнения перелета энергзатрат на участок движения с малой тягой.

С целью оценки точности использования нулевого приближения метода транспортирующей траектории, закон реактивного ускорения, оптимальный для задачи (1.3), был подставлен в уравнения движения КА на гелиоцентрическом участке, записанные с помощью модели центрального ньютоновского гравитационного поля. Параметры двигательных систем большой и малой тяги приняты оптимальными. Отклонение радиуса-вектора КА от требуемого положения в конечной точке составляет 3.06 млн. км., или 1,3 % от радиуса гелиоцентрической орбиты Марса. Абсолютная величина вектора отклонения гелиоцентрической скорости составляет около 4 % от абсолютной величины вектора потребной гелиоцентрической скорости. Таким образом, в случае траекторий с сокращенным временем перелета, типичных для пилотируемых межпланетных экспедиций, нулевое приближение метода транспортирующей траектории обеспечивает удовлетворительное выполнение граничных условий и по координатам, и по скоростям, а предложенный метод может быть использован для выполнения предварительных расчетов оптимальных траекторий с комбинированием большой и малой тяги.

Заключение.

Таким образом, в данной работе сформулирована задача оптимизации параметров, управлений и траектории космического аппарата с двухрежимным ядерным ракетным двигателем, при выполнении межпланетного перелета с сочетанием участков большой и малой тяги. Используя аналитическое решение задачи оптимального дви-

жения на гелиоцентрическом участке, задачу сведено к задаче оптимального управления динамической системой с разрывной правой частью, движение которой происходит в двух фазовых пространствах, относящихся к планетоцентрическим маневрам в сферах влияния планет старта и назначения. Проведен анализ необходимых условий оптимальности, условий трансверсальности и условий скачка. Предложен алгоритм численного решения задачи. Показано, что используя предлагаемый подход, можно выполнить экспресс-оценку оптимальных параметров двигательной системы при предварительном анализе межпланетных экспедиций.

РЕЗЮМЕ. Сформульовано проблему оптимізації міжпланетного перельоту космічного апарата з дворежимним ядерним ракетним двигуном. Траєкторія перельоту формується за рахунок комбінування ділянок великої та малої тяги. Проведено аналіз необхідних умов оптимальності. Наведено розв'язок задачі для перельоту Земля – Марс тривалістю 180 діб.

1. Акимов В.Н., Колюхов В.Г., Коротеев А.А. Эффективность применения многорежимных ядерных электродвигательных установок с машинным преобразованием энергии // Изв. РАН. Сер. Энергетика. – 2008. – № 3. – С. 20 – 27.
2. Ахметшин Р.З., Белоглазов С.С., Белоусова Н.С. и др. Оптимизация перелетов к астероидам и кометам космических аппаратов с комбинированием большой и малой тяги / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1988. – 28 с.
3. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космические исследования. – 1964. – 2, № 3. – С. 303 – 330.
4. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
5. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
6. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с.
7. Космические двигатели: состояние и перспективы / Под. ред. Л.Кейвни. – М.: Мир, 1988. – 454 с.
8. Малышев В.В., Тычинский Ю.Д., Усачов В.Е. Оптимизация траекторий межпланетных КА, формируемых двигателями большой и малой тяги, а также гравиманеврами у планет // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 2. – С. 151 – 161.
9. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
10. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 5. – С. 120 – 135.
11. Харитонов А.М. Расчет межпланетных траекторий космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями большой ограниченной тяги // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 3. – С. 108 – 118.
12. Харитонов А.М. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с двухрежимными ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 126 – 141.
13. Borowski S.K., Dudzinski L.A., McGuire M.L. Vehicle and mission design options for the human exploration of Mars/Phobos using “Bimodal” NTR and LANTR propulsion // NASA/TM – 1998 – 208834, Lewis Research Center. – 1998. – 47 p.
14. Borowski S.K. “Bimodal” nuclear thermal rocket (BNTR) propulsion for future human Mars exploration missions // NASA/CP – 2004 – 212963. – 2004. – 1. – P. 305 – 323.
15. Borowski S.K., Corban R.R., McGuire M.I., Beke E.G. Nuclear thermal rocket/vehicle design options for future NASA missions to the Moon and Mars // AIAA Paper. – 1993. – N 4170. – 36 p.
16. Chobotov V.A. Orbital Mechanics, 3 Edition. – N.Y.: AIAA. – 2002. – 460 p.
17. McGuire M.L., Martini M.C., Packard T.W. et al. Use of high-power Brayton nuclear electric propulsion (NEP) for a 2033 Mars round-trip mission // NASA TM – 2006 – 214106. – NASA, GRC, 2006. – 11 p.
18. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al. Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031 // Acta Astronautica. – 2006. – 58. – P. 88 – 104.

Поступила 26.12.2009

Утверждена в печать 15.06.2010