Т. В. Карнаухова

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА АКТИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СЕНСОРОВ

НТТУ «КПИ», проспект Победы, 37, 03056 , Киев, Украина;
e-mail: Karn@inmech. kiev. ua

Abstract. Basing on new approach, an effect of boundary conditions on effectiveness of active damping of forced resonance vibrations of a viscoelastic orthotropic plate is studied. The cases of hinged and rigid fixing the plate ends as well as the case of mixed boundary conditions are considered. The problems are solving by the Bubnov – Galerkin method. For each of mentioned cases, the formulas for potential differences are obtained, which should be applied to the actuator for damping the first mode of vibrations. It is shown that boundary conditions, dissipative properties of the material and size of sensor and actuator effect essentially on effectiveness of active damping of the plate vibrations.

Key words: viscoelastic plate, sensor, actuator, resonant vibrations, active damping.

Введение.

В последние годы активному демпфированию колебаний тонкостенных элементов с помощью пьезоэлектрических включений посвящено большое количество статей, монографий и обзоров [4, 10, 11]. Влияние температуры диссипативного разогрева на эффективность такого демпфирования исследовано в [5 – 9]. Однако во всех выполненных к настоящему времени работах внешняя механическая нагрузка принималась известной. В статье [2] предложен новый подход к активному демпфированию вынужденных резонансных колебаний прямоугольной ортотропной пластины при помощи сенсоров и актуаторов в случае, когда механическая нагрузка неизвестна. В [3] при помощи этого подхода рассмотрена задача об активном демпфировании прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов.

В данной статье рассмотрена аналогичная задача для случая смешанных граничных условий, когда одни противоположные торцы шарнирно оперты, а другие – жестко закреплены. Показано, что в отличие от рассмотренных в [2, 3] типов граничных условий при смешанных граничных условиях наиболее эффективным является выбор пьезовключений в виде полосы. Получены формулы для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки по известным показателям сенсора и для известных размеров указанной полосы.

1. Постановка и решение задачи.

Постановка задачи об активном демпфировании прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями аналогична представленной в работах [2, 3]. Отличаются лишь граничные условия на ее торцах. Для описания механического поведения материалов используется концепция комплексных характеристик [1].

Задача сводится к решению уравнения изгибных колебаний

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\rho\,\omega^2 w,-p_0(x,\ y)-\left(\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}\right)=0 \quad (1)$$

при следующих смешанных граничных условиях:

$$w=0,\ M_x=0 \text{ при } x=0;a\ ;\ \ w=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \text{ при } y=\pm b. \quad (2)$$

Предполагается, что на пластину действует равномерно распределенная по ее поверхности механическая нагрузка, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. Амплитуда и фаза механической нагрузки принимаются неизвестными. Для решения задачи используется метод Бубнова – Галеркина. Выражение для перемещений представляется в виде

$$w = A\tilde{w}, \;\; \tilde{w} = (\sin k_1 x)(b^2 - y^2)^2 \quad (k_1 = \pi / a). \tag{3}$$

При этом автоматически удовлетворяются механические граничные условия. Примем, что для демпфирования резонансных колебаний на пластину нанесено пятно размерами $(c \times 2d)$ с центром, расположенным в центре пластины. В соответствии с методом Бубнова – Галеркина выражение (3) подставим в уравнение (1), а полученный результат после умножения на функцию формы проинтегрируем по площади пластины.

В результате получим следующее выражение для комплексной амплитуды колебаний пластины:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \tag{4}$$

где для неизвестной постоянной нагрузки имеем

$$\Delta_1 = \frac{21 p_0}{\pi} + \frac{21 M_0 \sin(k_1 c/2)}{8\pi b^2}\psi(s);$$

$$\psi(s) = s\left[\frac{\pi^2 b^2}{a^2}(15 - 10s^2 + 3s^4) - 60(1 - s^2)\right]; \tag{5}$$

$$\Delta_2 = 4[126 D_{22} + 24(D_{12} + 2D_{66}) b^2 k_1^2 + 4b^4 (D_{11} k_1^4 - \tilde{\rho}\omega^2)].$$

Полагая $\Delta_1 = 0$, получаем следующее выражение для той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации внешней нагрузки:

$$V_A = -\frac{16 p_0 b^2}{(h_0 + h_1)\gamma_{31} \sin(k_1 c/2)\psi(s)}, \tag{6}$$

где введено обозначение

$$s = (d/b). \tag{7}$$

При выполнении соотношений (6), (7) амплитуда вынужденных колебаний по основной моде равна нулю и пластина может совершать только свободные колебания. Необходимо иметь в виду, что нагрузка p_0 является неизвестной. Как и в [2, 3], для ее определения следует использовать показания сенсора.

2. Анализ результатов.

Как следует из формул (6), (7), механические граничные условия оказывают существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предлагаемого подхода. Так, например, при шарнирном закреплении торцов пластины наиболее эффективным является полное покрытие пластины сенсором и актуатором [2]. При жестком защемлении торцов сенсоры и актуаторы наносятся в виде пятен определенных размеров [3]. При смешанных граничных условиях активное демпфирование будет наиболее эффективным при $c = a$ и при одновременном достижении функцией $\psi(s)$ максимума. Так, например, для квадратной пластины он достигается при $s_{\max}$, являющемся корнем уравнения

$$s^4 - 2\left(1 + \frac{6}{\pi^2}\right)s^2 + \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) = 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что указанный выше метод активного демпфирования будет наиболее эффективным при длине диагонали актуатора $d = b\sqrt{s_{\max}}$. Из (6), (7) следует также, что при $s \to 0$ и при $s \to s_k$, где s_k – корень уравнения

$$\frac{\pi^2 b^2}{a^2}(15-10s^2+3s^4)+60(1-s^2)=0, \qquad (9)$$

разность потенциалов стремится к бесконечности. Таким образом, при покрытии пластины актуатором размером $d=bs_k$ и при очень малых размерах актуатора управлять поведением пластины невозможно.

Предположим, что размещение и размеры актуатора и сенсора зафиксированы. Основные недостатки подхода, основанного на формулах (6), (7), состоят в том, что: 1) свободные колебания не демпфируются; 2) необходимо знать внешнюю механическую нагрузку.

Поэтому здесь используем подход, предложенный в [2]. Для определения величины и фазы внешней нагрузки используем показания сенсора, занимающего площадь S_1. Для коротко замкнутых электродов величина заряда определяется выражением

$$Q=-\gamma_{31}(h_0+h_1)\iint\limits_{(S_1)}(\kappa_1+\kappa_2)dxdy. \qquad (10)$$

Для разомкнутых электродов разность потенциалов определяется по формуле

$$V_S=\frac{h_1 Q}{S_1\gamma_{33}}. \qquad (11)$$

Подставляя в (10) выражение (2), получаем следующие выражения для показаний сенсора через амплитуду колебаний:

$$Q=-\frac{4}{15k_1}\gamma_{31}(h_0+h_1)Ab^3\psi(s)\sin\frac{k_1 c}{2}. \qquad (12)$$

Из этого выражения видно, что размеры сенсора, при которых его работа наиболее эффективна, определяются по представленным выше формулам для актуатора.

Для определения величины и фазы нагрузки p_0 воспользуемся выражением для амплитуды колебаний пластины на частоте, близкой к основной резонансной.

Использование метода Бубнова – Галеркина дает следующее решение задачи о резонансных механических колебаниях ортотропной пластины со смешанными граничными условиями на торцах при колебаниях по основной (первой) моде:

$$A=\Pi_1/\Pi_2, \qquad (13)$$

где введены такие обозначения:

$$\Pi_1=21p_0/\pi); \qquad (14)$$

$$\Pi_2=\Delta_2. \qquad (15)$$

При этом первая резонансная частота определяется формулой

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{2\tilde{\rho}b^4}}\ \sqrt{63D'_{22}+12(D'_{12}+2D'_{66})b^2k_1^2+2D'_{11})b^4k_1^4}. \qquad (16)$$

Из равенств (12), (13) получим связь между показаниями сенсора и разностью потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной внешней нагрузки. Она имеет вид

$$V_A=\frac{20}{7ab}\frac{\pi^2\Delta_2 Q}{(h_0+h_1)^2\gamma_{31}^2\psi^2(s)}. \qquad (17)$$

Аналогичное соотношение получим и при снятии с сенсора разности потенциалов. Для этого необходимо использовать представленное выше соотношение (11).

При использовании предлагаемого подхода к актуатору подводится разность потенциалов, определяемая через показания сенсора по формуле (17). При таком подходе необходимо лишь знать электромеханические свойства материалов пластины и размеры пассивной пластины и пьезовключений.

При численном решении задачи используем указанный в работе [2] подход. Для этого необходимо решить указанные в [2] эталонные задачи для смешанных механических граничных условий.

Заключение.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена задача об активном демпфировании вынужденных резонансных изгибных колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями на ее торцах в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Она определяется по показаниям сенсора. Получены формулы для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки с использованием только показаний сенсора. Отметим, что полученные в работах [2, 3] результаты показывают, что механические граничные условия оказывают существенное влияние на размеры пьезоэлектрических включений, обеспечивающие наибольшую эффективность активного демпфирования прямоугольных пластин. Так, при шарнирном закреплении торцов пластины предлагаемый подход для активного демпфирования колебаний наиболее эффективен при полном покрытии пластины сенсором и актуатором. При жестком защемлении торцов наиболее эффективным является нанесение пьезовключений в виде пятен оптимальных размеров. При смешанных граничных условиях работа сенсора и актуатора будет наиболее эффективной, если их выбрать в виде полосы, параллельной жестко защемленным торцам. Как и в [2, 3], вязкость пассивного материала оказывает существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предлагаемого подхода. Остаются в силе и представленные в [5 – 10] результаты о влиянии температуры диссипативного разогрева на эффективность деформирования колебаний пластин.

Р Е З Ю М Е . На основі запропонованого автором нового підходу досліджено вплив змішаних механічних граничних умов на ефективність активного демпфування вимушених резонансних коливань термов'язкопружних ортотропних пластин. Задачу розв'язано методом Бубнова – Гальоркіна. Одержано формули для різниці потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для демпфування першої моди коливань. Показано, что механічні граничні умови, дисипативні властивості матеріалів і розміри сенсорів та актуаторів суттєво впливають на ефективність активного демпфування коливань пластин.

1. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. –428 с.
2. *Карнаухова Т.В.* Активное демпфирование колебаний пластин при действии неизвестного давления // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 5. – С. 84 – 89.
3. *Карнаухова Т.В.* Демпфирование колебаний жестко защемленной пластины при действии неизвестного давления // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 6. – С. 83 – 87.
4. *Gabbert U., Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Acad. Publication, 2001. – 384 p.
5. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Basic Relations for Thermoviscoelastic Plates with Distributed Actuators under Monoharmonic Loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 200 – 214.
6. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Damping the Resonant Flexural Vibration of a Hinged Plate with Actuators // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 448 – 456.
7. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Damping the Flexural Vibration of a Clamped Viscoelastic Rectangular Plate with Piezoelectric Actuators // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 5. – P. 546 – 557.
8. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Basic Relations of the Theory of Thermoviscoelastic Plate with Distributed Sensors // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 6. – P. 660 – 669.
9. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Resonant Vibrations of a Hinged Viscoelastic Rectangular Plate // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 7. – P. 762 – 771.
10. *Tani J, Takagi T, Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51** – P. 505 – 521.
11. *Tzou HS., Bergman LA.* Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.

Поступила 08.09.2009 Утверждена в печать 08.06.2010