

А.Э.Бабаев¹, И.В.Янчевский²

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ
НА ЭЛЕКТРОУПРУГУЮ БИМОРФНУЮ БАЛКУ
С РАЗРЕЗНЫМИ ТОКОПРОВОДЯЩИМИ ПОКРЫТИЯМИ**

¹*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,*

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: artashes@i.com.ua

²*Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет,*

ул. Петровского, 25, 61002, Харьков, Украина; e-mail: yanchevsky@khadi.kharkov.ua

Abstract. The problem of identification is considered for an external non-stationary loading, which acts on an electroelastic bimorph (metal – piezoceramics) beam with split-type electrically conductive coverings. The solution is obtained with using the Laplace integral transform in time. The transition to the original space is done analytically. The basic quantities are determining basing on the solution of system of Volterra integral equations.

Key words: asymmetric bimorph beam, identification, non-stationary loading, Laplace integral transform.

Введение.

Конструктивные элементы, обладающие электроупругими свойствами, находят широкое практическое применение в качестве датчиков давлений или механических вибраторов, работающих, соответственно, в режиме прямого или обратного пьезоэлектрического эффекта. Вышеуказанным объясняется интерес к исследованиям в области электроупругости и гидроэлектроупругости, большинство из которых выполнено в предположении, что динамический процесс является периодическим во времени [4, 7]. К актуальным относятся задачи данного научного направления, сформулированные в нестационарной постановке. Это обусловлено расширением функциональных возможностей пьезопреобразователей энергии при их работе в переходных режимах. Библиографии публикаций, посвященных исследованиям нестационарных процессов при взаимодействии систем тонкостенных электроупругих оболочек с жидкостью, приведены в монографии [1] и обзорной статье [9]. Из публикаций последних лет по указанной проблематике отметим [11 – 13].

Достаточно распространенными в инженерной практике являются электромеханические преобразователи биморфного типа, представляющие собой двухслойные (металл – пьезокерамика) пластинки или балки. Нестационарные колебания биморфной полосы и балки со сплошными токопроводящими покрытиями при их, соответственно, электрическом и механическом возбуждениях исследованы в статьях [2, 3]. В процессе эксплуатации электроупругих конструктивных элементов возможны случаи, когда внешняя нестационарная нагрузка является априори неизвестной. Тогда ее вид может быть определен, в частности, на основании данных регистрации разности потенциалов между токопроводящими покрытиями пьезопреобразователей, работающих в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта. Указанной проблематике посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим биморфную электроупругую балку прямоугольного поперечного сечения длиной $2l$, шириной b и с толщинами слоев h_m и h_p . Индексами «m» и «p» обозначены физические и геометрические характеристики, соответственно, металлического и пьезокерамического элементов двухслойного пакета. Введем декартову систему координат xOz , ось Ox которой совпадает с осью приведения балки и отстоит от плоскости контакта слоев на расстоянии z_0 (рис. 1).

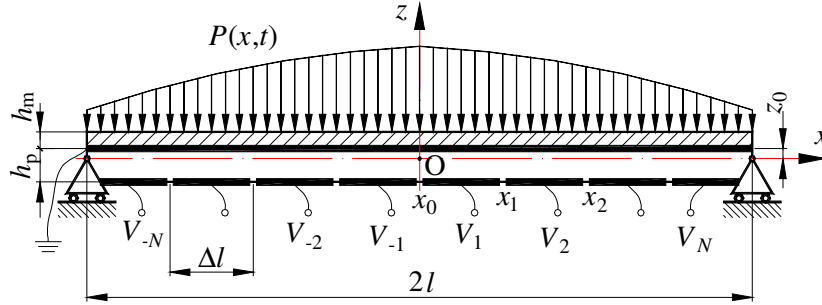


Рис. 1

Начало координат равноудалено от торцов балки. Постановка рассматриваемой задачи выполнена в рамках гипотез Кирхгофа – Лява для двухслойного пакета в целом [2, 10]. С их учетом продольные перемещения u изменяются по толщине линейно

($u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$), u_0 – перемещения точек, принадлежащих оси приведения $z = z_0$), а поперечные w – не зависят от z ($w(x, z, t) = w(x, t)$). Отметим, что

при $z_0 = \frac{c_{11}^p h_p^2 - c_{11}^m h_m^2}{2B_1}$, где $B_1 = c_{11}^p h_p + c_{11}^m h_m$, c_{11}^m и c_{11}^p – модули упругости металлического и пьезокерамического элементов пакета, функции u_0 и w удовлетворяют независимым уравнениям [2, 10]. Электроупругий слой поляризован вдоль вертикальной оси Oz . Токпроводящее покрытие (электрод) на границе $z = -h_p + z_0$ разделено разрезами на $2N$ равных частей. Сплошное покрытие на поверхности контакта слоев заземлено, что обеспечивает равенство нулю потенциала электрического поля пьезокерамического слоя при $z = z_0$. Выбран вариант шарнирного опирания торцов балки, подвижных в продольном направлении. Не понижая общности разработанного метода решения, ограничимся случаем действия на биморф нестационарной распределенной нагрузки $P(x, t)$, симметричной относительно оси Oz ($P(-x, t) = P(x, t)$).

Между токпроводящими покрытиями (сплошным и секциями разрезного: $0 < x < x_1$, $-x_1 < x < 0$; ...; $x_{N-1} < x < l$, $-l < x < -x_{N-1}$; $x_i = i \cdot \Delta l$, $i = 1, \dots, N$, $\Delta l = l/N$), в результате деформирования балки, возбуждаются разности потенциалов $V_1, V_{-1}, \dots, V_N, V_{-N}$ (имеет место режим прямого пьезоэлектрического эффекта). При этом, между разомкнутыми электродами пьезокерамического слоя не протекают токи смещений $I_1, I_{-1}, \dots, I_N, I_{-N}$. Очевидно, что в случае симметричной относительно оси Oz нагрузки, выполняются равенства $V_1 = V_{-1}, \dots, V_N = V_{-N}$.

Введем безразмерные обозначения, согласно которым продольные u_0 и поперечные w перемещения, а также геометрические параметры l, b, h_p, h_m, z_0, x и z отнесены к l ; время t – к $\sqrt{B_2 l^2 / B_1}$ ($B_2 = \rho_p h_p + \rho_m h_m$, ρ_p и ρ_m – плотности мате-

риалов двухслойного пакета); продольное усилие T_x и внешняя нагрузка P – к bB_1 ; изгибающий момент M – к bB_1l ; разности потенциалов $V_{\pm i}$ ($i=1, \dots, N$) и напряженность электрического поля E_z – к $\xi_1 = bB_1/e_{31}l$ (e_{31} – пьезомодуль керамики); индукция D_z – к $bB_1\epsilon_{33}^s/e_{31}l$ (ϵ_{33}^s – диэлектрическая проницаемость материала); токи смещений $I_{\pm i}$ между электродами $z = -h_p + z_0$ и $z = z_0 - h_m$ – к $bB_2\epsilon_{31}^s/e_{31}$.

С учетом принятых допущений неизвестные u_0 и w удовлетворяют следующим уравнениям [2]:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_0^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \gamma_0 P, \quad (2)$$

где

$$\beta_0^4 = B_2 l / B_3; \quad \gamma_0 = B_1 l^2 / B_3; \quad B_3 = c_{11}^p h_p \left(z_0^2 - z_0 h_p + \frac{h_p^2}{3} \right) + c_{11}^m h_m \left(z_0^2 + z_0 h_m + \frac{h_m^2}{3} \right) + \frac{e_{31}^2 h_p^3}{\epsilon_{33}^s 12}.$$

В случае указанных ранее условий закрепления торцов балки и условий непротекания токов смещений в пьезокерамическом слое (его электроды разомкнуты) выполняются равенства: $T_x|_{x=\pm l} = 0$, $w|_{x=\pm l} = 0$, $M|_{x=\pm l} = 0$, $I_{\pm i} = 0$ ($i=1, \dots, N$), которые записываются относительно неизвестных u_0 , w , $V_{\pm i}$ ($i=1, \dots, N$) в виде [2]

$$\frac{B_1}{e_{31} l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=\pm l} = V_{\pm N}; \quad w|_{x=\pm l} = 0; \quad \frac{B_1}{\beta_0^4 e_{31} a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm l} = -V_{\pm N};$$

$$V_{\pm i} = -\frac{e_{31} h_p}{\epsilon_{33}^s \Delta l} \left(u_0 - \frac{a}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (i=1, \dots, N; \quad a = z_0 - h_p / 2). \quad (3)$$

Начальные условия – однородные (до момента времени $t=0$ биморфная балка находится в состоянии покоя).

2. Задача идентификации.

Пусть разности потенциалов между электродами пьезокерамического слоя $V_{\pm i}$ ($i=1, \dots, N$) являются известными величинами переменной t (например, зарегистрированными измерительными устройствами). Задача состоит в определении внешней ударной нагрузки $P(x, t)$, которая аппроксимируется в виде кусочно-постоянной четной функции переменной x ,

$$\tilde{P}(x, t) = \sum_{i=1}^N p_i^{(N)}(t) \left[H(|x| - x_{i-1}) - H(|x| - x_i) \right]. \quad (4)$$

В представлении (4) $p_i^{(N)}(t)$ – искомые величины; $H(x)$ – единичная функция Хевисайда.

Разложим нагрузку $\tilde{P}(x, t)$ (4) в ряд Фурье

$$\tilde{P}(x, t) = \sum_{i=1}^N p_i^{(N)}(t) \left[\frac{\Delta l}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{k\pi x_i}{l}\right) - \sin\left(\frac{k\pi x_{i-1}}{l}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right]. \quad (5)$$

Отметим, что в задаче идентификации (1) – (5), в отличие от рассмотренной ниже прямой задачи, где внешняя ударная нагрузка $P(x, t)$ является известной функцией, продольные перемещения и прогибы балки в дальнейшем будут обозначены через \tilde{u}_0 и \tilde{w} . Ее решение, соответствующее нагрузке $\tilde{P}(x, t)$, получено с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. В пространстве изображений общие решения дифференциальных уравнений (1) – (2) при нечетных продольных \tilde{u}_0 ($\tilde{u}_0(x, t) = -\tilde{u}_0(-x, t)$) и четных поперечных \tilde{w} ($\tilde{w}(x, t) = \tilde{w}(-x, t)$) перемещениях, с учетом разложения (5), имеют вид

$$\tilde{u}_0^L(x, s) = B^L(s) \frac{1}{s} [e^{-s(l-x)} - e^{-s(l+x)}];$$

$$\tilde{w}^L(x, s) = A_1^L(s) F_1^L(x, s) + A_2^L(s) F_2^L(x, s) + \sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_i^{(1)L}(x, s), \quad (6)$$

где

$$\tilde{\Psi}_i^{(1)L}(x, s) = \alpha_0^{(1)} \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(1)}(x) \frac{1}{s^2 + \mu_k^2};$$

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{\gamma_0 \Delta l}{\beta_0^4 l}; \quad \alpha_{ik}^{(1)}(x) = \frac{\gamma_0}{\beta_0^4} \frac{2}{k\pi} \eta_{ik} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right); \quad \eta_{ik} = \sin \frac{k\pi x_i}{l} - \sin \frac{k\pi x_{i-1}}{l}; \quad \mu_k = \frac{k^2 \pi^2}{\beta_0^2 l^2}.$$

Здесь индексом L обозначены соответствующие трансформанты; s – параметр преобразования; $A_1^L(s)$, $A_2^L(s)$, $B^L(s)$ – неизвестные функции;

$$F_1^L(x, s) = f_1^L(x, s) + f_2^L(x, s); \quad F_2^L(x, s) = g_1^L(x, s) + g_2^L(x, s);$$

$$f_j^L(x, s) = \frac{1}{s} e^{-y_j(x)\sqrt{s}} \cos(y_j(x)\sqrt{s}); \quad g_j^L(x, s) = \frac{1}{s} e^{-y_j(x)\sqrt{s}} \sin(y_j(x)\sqrt{s}); \quad (7)$$

$$y_j(x) = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [l + (-1)^j x] \quad (j = 1; 2).$$

В результате подстановки решений (6) в условия (3) получим уравнение относительно неизвестной $B^L(s)$ и систему $N + 2$ уравнений относительно $A_1^L(s)$, $A_2^L(s)$ и $p_i^{(N)L}(s)$ ($i = 1, \dots, N$):

$$B^L(s)(1 + e^{-2ls}) = V_N^L(s); \quad A_1^L(s) F_1^L(l, s) + A_2^L(s) F_2^L(l, s) + \sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_i^{(1)L}(l, s) = 0;$$

$$A_1^L(s) F_2^L(l, s) - A_2^L(s) F_1^L(l, s) - \sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_i^{(2)L}(s) = -\xi_2 \frac{1}{s} V_N^L(s); \quad (8)$$

$$A_1^L(s) \Phi_{1j}^L(s) + A_2^L(s) \Phi_{2j}^L(s) - B^L(s) \xi_4 \frac{1}{s} [e^{-s(l-x_j)} - e^{-s(l-x_{j-1})} -$$

$$- e^{-s(l+x_j)} + e^{-s(l+x_{j-1})}] - \sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_{ij}^{(3)L}(s) = \xi_3 V_j^L(s) \quad (j = 1, \dots, N),$$

где введены обозначения:

$$\Phi_{1j}^L(s) = F_4^L(x_j, s) - F_4^L(x_{j-1}, s) + F_3^L(x_j, s) - F_3^L(x_{j-1}, s);$$

$$\Phi_{2j}^L(s) = F_4^L(x_j, s) - F_4^L(x_{j-1}, s) - F_3^L(x_j, s) + F_3^L(x_{j-1}, s);$$

$$F_3^L(x, s) = \sqrt{s} [f_1^L(x, s) - f_2^L(x, s)]; \quad F_4^L(x, s) = \sqrt{s} [g_1^L(x, s) - g_2^L(x, s)]; \quad (9)$$

$$\tilde{\Psi}_i^{(2)L}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(2)} \frac{1}{s(s^2 + \mu_k^2)}; \quad \tilde{\Psi}_{ij}^{(3)L}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(3)} \eta_{jk} \frac{1}{s^2 + \mu_k^2}; \quad \alpha_{ik}^{(2)} = \alpha_{ik}^{(1)}(l) \eta_{ik} \mu_k;$$

$$\alpha_{ik}^{(3)} = \frac{\gamma_0}{\beta_0^s} \frac{2\sqrt{2}}{l} \eta_{ik}; \quad \xi_2 = \beta_0^2 \frac{a}{l}; \quad \xi_3 = \xi_4 \frac{\varepsilon_{33}^s \Delta l}{e_{31} h_p}; \quad \xi_4 = \frac{\sqrt{2}l}{\beta_0 a}.$$

Решение системы уравнений (8) связано с необходимостью раскрытия определителей $N+3$ порядка. При этом получаемые формулы для искомых величин становятся настолько сложными и громоздкими, что последующая их инверсия связана с принципиальными математическими трудностями. Согласно разработанному методу решения производится строгое обращение равенств (8) и удовлетворение им осуществляется в пространстве оригиналов. В результате неизвестная функция $B(t)$ определяется по формуле

$$B(t) = V_N(t) - B(t-2l) \cdot H(t-2l), \quad (10)$$

а $A_1(t)$, $A_2(t)$ и $p_i^{(N)}(t)$ ($i=1, \dots, N$) – при решении следующей системы $N+2$ интегральных уравнений Вольтерра:

$$\begin{aligned} & \int_0^t A_1(\tau) F_1(l, t-\tau) d\tau + \int_0^t A_2(\tau) F_2(l, t-\tau) d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t p_i^{(N)}(\tau) \tilde{\Psi}_i^{(1)}(l, t-\tau) d\tau = 0; \\ & \int_0^t A_1(\tau) F_2(l, t-\tau) d\tau - \int_0^t A_2(\tau) F_1(l, t-\tau) d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t p_i^{(N)}(\tau) \tilde{\Psi}_i^{(2)}(t-\tau) dt = -\xi_2 \int_0^t V_N(\tau) d\tau; \\ & \int_0^t A_1(\tau) \Phi_{1j}(t-\tau) d\tau + \int_0^t A_2(\tau) \Phi_{2j}(t-\tau) d\tau - \sum_{i=1}^N \int_0^t p_i^{(N)}(\tau) \tilde{\Psi}_{ij}^{(3)}(t-\tau) d\tau = \\ & = \xi_3 V_j(t) + \xi_4 \left[H[t-(l-x_j)] \int_0^{t-(l-x_j)} B(\tau) d\tau - H[t-(l-x_{j-1})] \int_0^{t-(l-x_{j-1})} B(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - H[t-(l+x_j)] \int_0^{t-(l+x_j)} B(\tau) d\tau + H[t-(l+x_{j-1})] \int_0^{t-(l+x_{j-1})} B(\tau) d\tau \right] \quad (j=1, \dots, N), \end{aligned} \quad (11)$$

где принято:

$$\tilde{\Psi}_i^{(1)}(x, t) = \alpha_0^{(1)} t + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(1)}(x) \eta_{ik} \frac{1}{\mu_k} \sin(\mu_k t);$$

$$\tilde{\Psi}_i^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(2)} \eta_{ik} \frac{1}{\mu_k} [1 - \cos(\mu_k t)] d\tau; \quad \tilde{\Psi}_{ij}^{(3)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}^{(3)} \eta_{ik} \eta_{jk} \frac{1}{\mu_k} \sin(\mu_k t).$$

В приведенных равенствах ядра $F_1(l, t)$, $F_2(l, t)$ (7) и $\Phi_{1j}(t)$, $\Phi_{2j}(t)$ (9), которые выражаются через функции $F_3(x, t)$ и $F_4(x, t)$, получены аналитически с использованием таблиц операционного исчисления [5]:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-y_j(x)\sqrt{s}} \cos(y_j(x)\sqrt{s}) \right] = 1 - C \left(\frac{y_j^2(x)}{2t} \right) - S \left(\frac{y_j^2(x)}{2t} \right);$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-y_j(x)\sqrt{s}} \sin(y_j(x)\sqrt{s}) \right] = C \left(\frac{y_j^2(x)}{2t} \right) - S \left(\frac{y_j^2(x)}{2t} \right);$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-y_j(x)\sqrt{s}} \cos(y_j(x)\sqrt{s}) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \left[\frac{y_j^2(x)}{2t} \right];$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-y_j(x)\sqrt{s}} \sin(y_j(x)\sqrt{s}) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \left(\frac{y_j^2(x)}{2t} \right),$$

где $C(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\zeta \frac{\cos(\kappa)}{\sqrt{\kappa}} d\kappa$ и $S(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\zeta \frac{\sin(\kappa)}{\sqrt{\kappa}} d\kappa$ – интегралы Френеля; L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа.

Решение системы интегральных уравнений (11) получено численно. Выбранный временной интервал разбивался на отрезки Δt и на каждом шаге по времени t применены квадратурные аппроксимации искомых величин в виде прямоугольников. Для получения устойчивого решения системы использованы специальные регуляризирующие алгоритмы [6, 8]. Точность выполненных расчетов контролировалась варьированием значений шага разбиения Δt . Коэффициент относительной невязки принимался равным 0,05.

Значения $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B(t)$ и $p_i^{(N)}(t)$ ($i=1, \dots, N$) позволяют восстановить внешнюю ударную нагрузку $\tilde{P}(x, t)$, приближенно представленную в виде кусочно-постоянной функции (4), и найти продольные перемещения точек оси приведения $\tilde{u}_0(x, t)$ и прогиб балки $\tilde{w}(x, t)$, которые в результате инверсии выражений (6) определяются формулами

$$\tilde{u}_0(x, t) = H(t - (l - x)) \int_0^{t-(l-x)} B(\tau) d\tau - H(t - (l + x)) \int_0^{t-(l+x)} B(\tau) d\tau;$$

$$\tilde{w}(x, t) = \int_0^t A_1(\tau) F_1(x, t - \tau) d\tau + \int_0^t A_2(\tau) F_2(x, t - \tau) d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t p_i^{(N)}(\tau) \tilde{\Psi}_i^{(1)}(x, t - \tau) d\tau \quad (12)$$

Аналогично могут быть вычислены другие характеристики напряженно-деформированного состояния биморфа.

3. Прямая задача.

Для определения разностей потенциалов между секционированными электродами пьезокерамического слоя, используемых при идентификации внешней нагрузки $\tilde{P}(x, t)$, решена соответствующая прямая задача, при формулировке которой функции

$Q(t)$ и $R(x)$ ($P(x,t) = Q(t) \cdot R(x)$) являются заданными, а $V_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$), $u_0(x,t)$ и $w(x,t)$ – искомыми. В этом случае при записи формул (6) и (8) слагаемое $\sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_i^{(1)L}(x,s)$ следует заменить на $Q^L(s) \Psi^{(1)L}(x,s)$, $\sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_i^{(2)L}(s)$ – на $Q^L(s) \Psi^{(2)L}(s)$, $\sum_{i=1}^N p_i^{(N)L}(s) \tilde{\Psi}_{ij}^{(3)L}(s)$ – на $Q^L(s) \Psi_j^{(3)L}(s)$, где

$$\Psi^{(1)L}(x,s) = \int_0^l R(\xi) \left[\alpha_0^{(1)} \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(1)}(x)}{s^2 + \mu_k^2} \cos\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \right] d\xi;$$

$$\Psi^{(2)L}(s) = \int_{x_{N-1}}^l R(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(2)}}{s(s^2 + \mu_k^2)} \cos\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) d\xi;$$

$$\Psi_j^{(3)L}(s) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} R(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{jk}^{(3)}}{s^2 + \mu_k^2} \cos\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) d\xi;$$

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{\gamma_0}{\beta_0^4 l}; \quad \alpha_k^{(1)}(x) = \frac{\gamma_0}{\beta_0^4} \frac{2}{l} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right); \quad \alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(1)}(l) \mu_k; \quad \alpha_{jk}^{(3)} = \frac{\gamma_0}{\beta_0^5} \frac{2\sqrt{2}}{l} \eta_{jk}.$$

Оригиналы функций $\Psi^{(1)L}$, $\Psi^{(2)L}$ и $\Psi_j^{(3)L}$ являются табличными [5]. Остальные компоненты общих решений (6) и системы (8) остаются неизменными.

В результате инверсии системы уравнений, обеспечивающих принятые условия закрепления торцов и непротекания токов в пьезокерамическом слое, данная задача, как и предыдущая, сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра, аналогичной (11). Формула, описывающая прогиб балки, примет вид

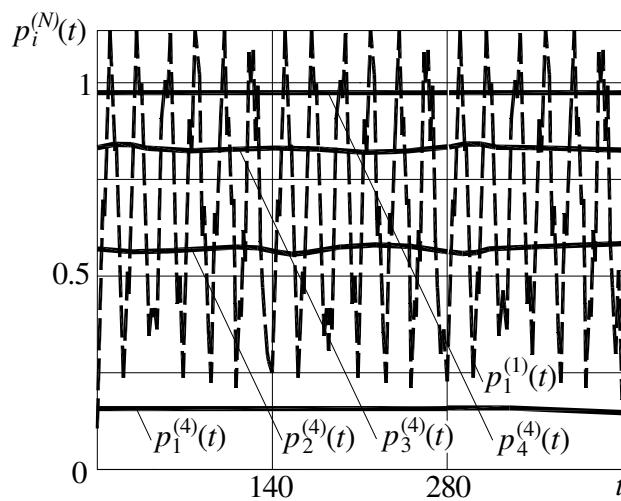
$$w(x,t) = \int_0^t A_1(\tau) F_1(x,t-\tau) d\tau + \int_0^t A_2(\tau) F_2(x,t-\tau) d\tau + \int_0^t Q(\tau) \Psi^{(1)}(x,t-\tau) d\tau.$$

На первом этапе рассмотрена прямая задача, в результате решения которой при заданной внешней нагрузке $P(x,t) = Q(t) \cdot R(x)$ определены разности потенциалов между токопроводящими покрытиями $V_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) и прогибы $w(x,t)$. Далее числовые значения функций $V_j(t)$ использованы как исходные данные при решении задачи идентификации силового воздействия.

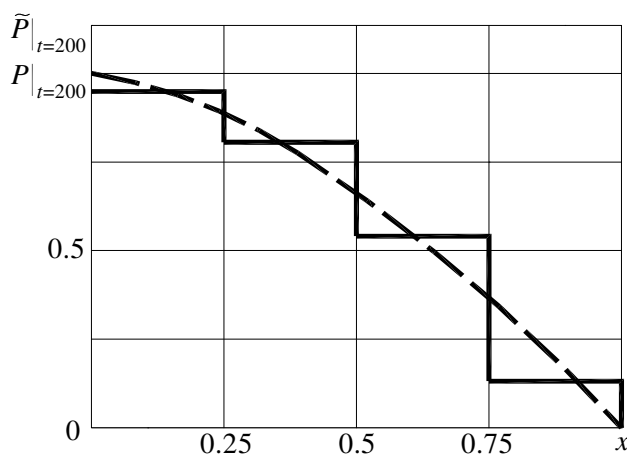
4. Числовые результаты.

При проведении расчетов приняты следующие параметры асимметричной биморфной балки: $l = 25$ мм, $b = 10$ мм; $h_p = 1$ мм, $\rho_p = 7600$ кг/м³, $c_{11}^p = 13,6 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\epsilon_{33}^s = 1280 \cdot \epsilon_0$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума; $d_{31} = -17,8 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н, $e_{31} = -7,9$ Кл/м² (пьезокерамика PZT-5 [4]); $h_m = 0,5$ мм, $\rho_m = 7800$ кг/м³, $c_{11}^m = 11,3 \cdot 10^{10}$ Н/м² (титан ВТ-6).

На рис. 2, а приведены функции $p_i^{(N)}(t)$, фигурирующие в кусочно-ступенчатом представлении внешней нагрузки $\tilde{P}(x,t)$ (4), полученные при исходных значениях



а



б
Рис. 2

$V_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$), которые были вычислены при воздействии нагрузки вида $P(x, t) = H(t) \cdot \cos(\pi x/2)$. Сплошные линии соответствуют случаю $N = 4$, штриховая – $N = 1$. На рис. 2, б показано распределение по длине балки аппроксимированной $\tilde{P}(x, t)$ при $N = 4$ (сплошная линия) и заданной при решении прямой задачи $P(x, t)$ (штриховая линия) нагрузок в момент времени $t = 200$.

Результаты расчетов свидетельствуют, что при четырехчленной аппроксимации (4) функции $p_i^{(4)}(t)$ близки к постоянным значениям. Поэтому на рис. 2, б вид $\tilde{P}(x, t)$ остается практически неизменным при любых других значениях t . В случае $N = 1$ наблюдаются значительные осцилляции $p_1^{(1)}(t)$, в результате чего значения $\tilde{P}(x, t) = p_1^{(1)}(t)$ изменяются в достаточно широком диапазоне.

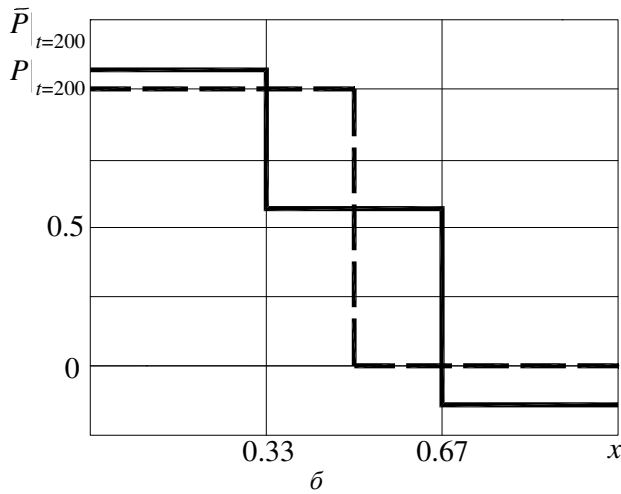
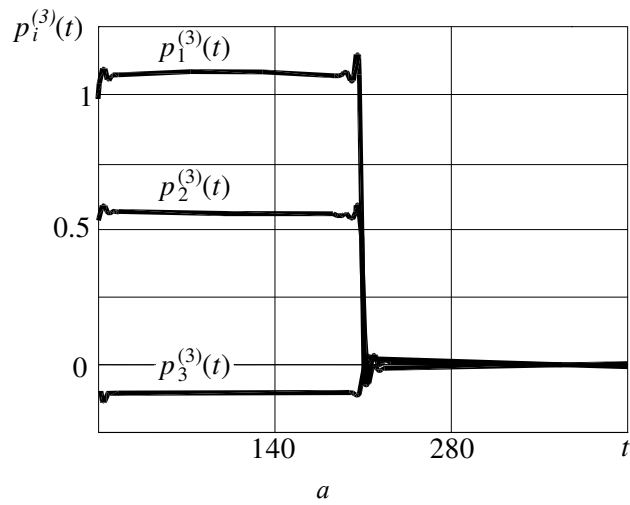


Рис. 3

На рис. 3 в виде сплошных линий изображены результаты вычислений $p_i^{(N)}(t)$ (рис. 3, а), когда $N = 3$ (токопроводящее покрытие на поверхности $z = z_0 - h_p$ состоит из шести секций), и $\bar{P}(x, t)$ – в момент времени $t = 200$ (рис. 3, б). При этом нагрузка, используемая в прямой задаче, имела вид $P(x, t) = [H(t) - H(t - 210)] \times [1 - H(|x| - 0,5)]$.

Штриховая линия иллюстрирует график $P(x, t)$ при $t = 200$ (рис. 3, б). В интервале времени ($0 \leq t \leq 210$), когда нагрузка отлична от нуля, изменения коэффициентов $p_i^{(3)}(t)$ во времени несущественны, а при $t > 210$ – они близки к нулю. Характерно, что на рис. 2, б и 3, б площади, ограниченные кривыми $\bar{P}(x, t)$ и $P(x, t)$, осью абсцисс и ординатами $x = 0$ и $x = 1$, практически совпадают. Для этого варианта нагружения выполнено сопоставление результатов расчета прогибов балки в точках $x = 0$ и $x = 0,5$, полученных при решении прямой задачи (пунктирные линии) и задачи идентификации (сплошные линии) (рис. 4).

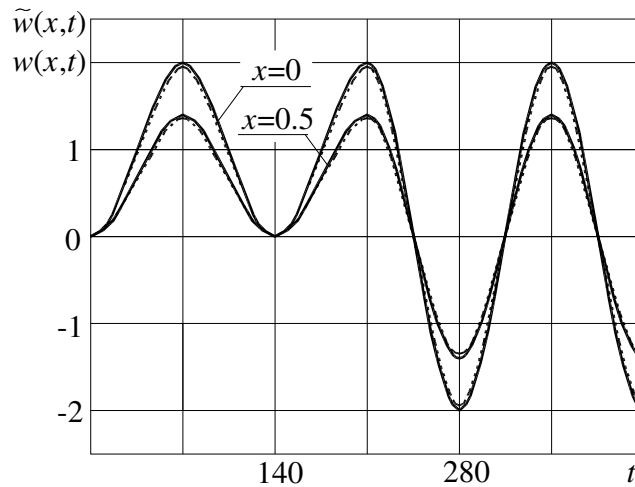


Рис. 4

Отметим, что при построении графиков значения $\tilde{w}(x,t)$ и $w(x,t)$ были отнесены к статическому прогибу балки в точке $x=0$ при действии единичной нагрузки вида $P(x) = 1 - H(|x| - 0,5)$. Несмотря на некоторое отличие кривых $\tilde{P}(x,t)$ и $P(x,t)$, приведенных на рис. 3, б, результаты расчетов прогибов $\tilde{w}(x,t)$ и $w(x,t)$ достаточно близки (рис. 4).

Заключение. Таким образом, в данной работе рассмотрена задача идентификации внешней нестационарной нагрузки, действующей на электроупругую биморфную (метал – пьезокерамика) балку с разрезанными токопроводящими покрытиями. Решение получено с использованием интегрального преобразования Лапласа во времени. Переход в пространство оригиналов выполнено аналитически. Основные величины определяются на основе решения интегральных уравнений Вольтерра.

Отметим также, что полученные результаты свидетельствуют об эффективности разработанного метода идентификации нестационарных нагрузок, действующих на электроупругие биморфные балки.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу ідентифікації зовнішнього нестационарного навантаження, що діє на електропружну біморфну (метал – п'єзокераміка) балку з розрізними струмопровідними покриттями. Розв'язок отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа у часі. Перехід в простір оригіналів виконано аналітично. Основні величини визначаються на основі розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра.

1. Бабаев А.Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
2. Бабаев А.Э., Бабаев А.А., Янчевский И.В. Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта // Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и волны. – 2007. – № 3. – С. 16 – 27.
3. Бабаев А.Э., Мосеенков Ю.Б. Нестационарные колебания тонкостенной электроупругой полосы // ДАН УССР. Серия: Математика, естествознание, технические науки. – 1994. – № 12. – С. 54 – 58.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6-ти т. Т.5.)
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 466 с.

6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
7. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
8. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воронай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
9. Guz A.N., Kubenko V.D., Babaev A.E. Dynamics of Shell Systems Interacting with a Liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 3. – P. 260 – 301.
10. Rudnitskii S.I., Sharapov V.M., Shul'ga N.A. Vibrations of a Bimorphic Disk Transducer of the Metal-Piezoceramic Type // Int. Appl. Mech. – 1990. – **26**, N 10. – P. 973 – 980.
11. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Method of Characteristics in Analysis of the Propagation of Electroelastic Thickness Oscillations in a Piezoceramic Layer under Electric Excitation // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1093 – 1097.
12. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Propagation of Two-Dimensional Nonstationary Vibrations in an Electrically Excited Piezoceramic Prismatic Body // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 11. – P. 1258 – 1264.
13. Wang H.M., Ding H.J., Chen Y.M. Dynamic Solution of a Multilayered Orthotropic Piezoelectric Hollow Cylinder for Axisymmetric Plane Strain Problems // Int. J. Solids and Struct. – 2005. – **42**, iss. 1. – P. 85 – 102.

Поступила 28.08.2009

Утверждена в печать 15.06.2010

