

Р.Е. Кочуров¹, К.В. Аврамов^{1,2}

**МНОГОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

¹ *Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе 21, 61002, Харьков, Украина;*

² *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Дм. Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина; e-mail: kvavr@kharkov.ua*

Abstract. The nonlinear parametric vibrations of cylindrical shell are described by the Donell-Mushtari-Vlasov equations. The motion is represented in the form of multi-mode expansion by modes. A discretization is carried out by the Bubnov-Galerkin method. By use of harmonic balance method, the motion in regimes of the running waves and the nonlinear normal modes is studied for the system with dissipation and without one.

Key words: parametric vibrations, multi-mode shall model, Donell-Mushtari-Vlasov equations, harmonic balance method.

Введение.

Аналізу нелінійних коливань тонкостінних циліндричних оболонок посвячено більше число досліджень. В роботах [3, 4] розглянуті моделі нелінійних коливань циліндричних оболонок з трьома і чотирма степенями свободи, які описують вільні, вимушені і параметричні коливання. Взаємодія двох пар сопряжених форм коливань циліндричних оболонок розглянуто в [9]. Детальний огляд робіт по динаміці оболонок міститься в статті [8].

Аналіз лінійних коливань циліндричних оболонок показує, що спектр власних частот може бути дуже щільним. В цьому випадку тільки багатомірними моделями, які описують взаємодію між модами з щільним спектром, можна описати нелінійну динаміку циліндричних оболонок.

В даній роботі для аналізу параметричних коливань циліндричних оболонок при їх геометрично нелінійному деформуванні враховуються три пари сопряжених форм коливань, які мають близькі частоти лінійних коливань. В статті детально досліджені два види рухів: нелінійні моди і бегущі хвилі.

1. Постановка задачі і рівняння коливань.

Розглянемо шарнірно оперту циліндричну оболочку без початкових непрямокутностей, стиснуту вздовж образуючої розподіленої періодичної навантажувальної форми $N_x(t) = N_0 + N_1 \cos 2vt$, $N_0, N_1 = \text{const} > 0$.

Оболочка здійснює коливання з помірними амплітудами. Тоді деформації є малими, а переміщення – помірними і зв'язи між деформаціями і переміщеннями описуються нелінійними рівняннями. Зв'язь між напруженнями і деформаціями описується законом Гука. Тоді коливання оболочкі моделюються рівняннями Донелла – Муштари – Власова [3, 4]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right);$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (1)$$

где w – радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки; x – продольная координата; y – окружная координата; R – радиус оболочки; ρ – плотность материала оболочки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; F – функция напряжений; $D = (Eh^3)/12(1-\mu^2)$ – цилиндрическая жесткость оболочки.

В цилиндрических оболочках сопряженные собственные формы колебаний $\cos s y \sin r x$ и $\sin s y \sin r x$ имеют одинаковые частоты. При нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек эти формы, в основном, возбуждаются совместно. В общем случае, бесконечное число собственных форм свободных колебаний цилиндрических оболочек при геометрически нелинейном деформировании оказываются связанными. Однако, в данной работе рассматривается случай основного параметрического резонанса: $\nu \approx \omega_1$, где ω_1 – первая собственная частота колебаний. При анализе параметрических колебаний учитываются только собственные формы с частотами, близкими к ω_1 . Для широкого класса оболочек – это три первые собственные формы колебаний, которые рассмотрены ниже. Динамический прогиб оболочки w аппроксимируем разложением

$$w = \sum_{i=1}^3 (f_{2i-1} \cos s_i y + f_{2i} \sin s_i y) \sin r x + f_7 \sin^2 r x + f_8, \quad (2)$$

где $s_i = n_i / R$; $r = m \pi / L$; $i = \overline{1, 3}$; n_i – число волн в окружном направлении; m – число полуволн вдоль образующей. Слагаемое $f_7 \sin^2 r x$ отражает несимметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным перемещением к центру кривизны. Слагаемое f_8 описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты y , т. е. предполагается, что торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [3].

Функцию напряжений F получим из второго уравнения системы (1). Ее представим так: $F = F_h + F_p$. Общее решение второго уравнения системы (1) F_h определяется, удовлетворяя условие периодичности окружных перемещений [4], и имеет следующий вид:

$$F_h = \frac{E}{16} \sum_{i=1}^6 s_i f_i^2 x^2 - \frac{1}{4} \frac{E}{R} f_7 x^2 - \frac{1}{2} \mu N_x x^2 - \frac{1}{2} N_x y^2. \quad (3)$$

Частное решение второго уравнения системы (1) F_p представим так:

$$F_p = F_1^{(0)} \cos 2r x + \sum_{i=1}^3 F_{i+2}^{(0)} \cos 2s_i y + \sum_{i=1}^3 F_{i+5}^{(0)} \sin 2s_i y + F_1^* \sin r x + F_2^* \sin 3r x + F_4^* + F_5^* \cos 2r x, \quad (4)$$

где

$$F_k^* = \sum_{i=1}^3 (F_i^{(k)} \cos s_i y + F_{i+3}^{(k)} \sin s_i y);$$

$$\begin{aligned}
F_l^* = & F_1^{(l)} \cos(s_1 + s_2)y + F_2^{(l)} \cos(s_1 - s_2)y + F_3^{(l)} \cos(s_1 + s_3)y + F_4^{(l)} \cos(s_1 - s_3)y + \\
& + F_5^{(l)} \cos(s_2 + s_3)y + F_6^{(l)} \cos(s_2 - s_3)y + F_7^{(l)} \sin(s_1 + s_2)y + F_8^{(l)} \sin(s_1 - s_2)y + \\
& + F_9^{(l)} \sin(s_1 + s_3)y + F_{10}^{(l)} \sin(s_1 - s_3)y + F_{11}^{(l)} \sin(s_2 + s_3)y + F_{12}^{(l)} \sin(s_2 - s_3)y; \\
& k = 1, 2; l = 3, 4.
\end{aligned}$$

Выражения (2), (4) вводятся во второе уравнение системы (1) и приравниваются коэффициенты при одинаковых гармониках. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров F_i системы (4). Величины F_i здесь не приводятся для краткости изложения.

К первому уравнению системы (1) применяется метод Бубнова – Галеркина. В результате получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую колебания цилиндрической оболочки. Эту систему перепишем относительно безразмерных переменных: $\tilde{t} = \omega_0 t$, $\tilde{f}_i(t) = h^{-1} f_i(t)$. Опуская волну (знак \square) в обозначениях, модель с конечным числом степеней свободы относительно безразмерных переменных и параметров представим в следующем виде:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_7) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0 \quad (i = \overline{1, 6}); \quad (5)$$

$$\ddot{f}_7 + \frac{4}{3} \ddot{f}_8 + \omega_7^2 f_7 + \tilde{\omega}_8^2 f_8 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{f}_8 + \frac{1}{2} \ddot{f}_7 + \omega_8^2 f_8 + \tilde{\omega}_7^2 f_7 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 = 0, \quad (7)$$

где

$$R_i(f_1, \dots, f_7) = \sum_{j=1}^6 \gamma_{ij} f_j^2 + \lambda_i f_7 + \zeta_i f_7^2, \quad i = \overline{1, 6};$$

$$G_{1,2}(f_1, \dots, f_6) = \eta_{17}(f_{5,6}(f_{3,4}^2 - f_{4,3}^2) + 2f_{3,4}f_{4,3}f_{6,5});$$

$$G_{3,4}(f_1, \dots, f_6) = \eta_{37}(f_{1,2}f_{3,4}f_{5,6} + f_{1,2}f_{4,3}f_{6,5} + f_{2,1}f_{4,3}f_{5,6} - f_{2,1}f_{3,4}f_{6,5});$$

$$G_{5,6}(f_1, \dots, f_6) = \eta_{57}(f_{1,2}(f_{3,4}^2 - f_{4,3}^2) + 2f_{3,4}f_{4,3}f_{2,1}).$$

Величины γ_{ij} , ζ_i , η_{ij} зависят от параметров оболочки и здесь не приводятся для краткости. В формулах берутся отдельно первые или вторые индексы, разделенные запятой. Частоты ω_7 , ω_8 значительно больше частот $\omega_1, \dots, \omega_6$. Поэтому при анализе уравнений (6), (7) предполагается, что $\ddot{f}_7 = 0$, $\ddot{f}_8 = 0$. В результате из уравнений (6), (7) получаем

$$\begin{aligned}
f_7 = & \left(\tilde{\omega}_8 \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 - \omega_8 \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 \right) \eta^{-1}; \\
f_8 = & \left(\omega_7 \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 - \tilde{\omega}_7 \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 \right) \eta^{-1}; \quad \eta = \tilde{\omega}_7 \tilde{\omega}_8 - \omega_7 \omega_8. \quad (8)
\end{aligned}$$

Уравнения (8) введем в (5). Тогда функции R_i , $i = \overline{1, 6}$, системы (5) примут следующий вид:

$$R_i(f_1, \dots, f_6) = \sum_{j=1}^6 \eta_{ij} f_j^2 \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (9)$$

Итак, параметрические колебания оболочки описываются системой уравнений (5) с функциями R_i в виде (9). В дальнейших исследованиях параметрическую нагрузку примем в виде $N_x(t) = N_1 \cos 2vt$.

2. Анализ нелинейных колебаний.

Исследуем динамику системы (5). В этой системе существуют две нелинейные нормальные формы: $f_{2i-1} = \pm f_{2i}$, $i = 1, 3$. Движения на этих нормальных формах описываются системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (10)

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i \tilde{R}_i(f_1, f_3, f_5) + \tilde{G}_i(f_1, f_3, f_5) + \chi_i N_x f_i = 0 \quad (i = 1, 3, 5). \quad (10)$$

Итак, получены нелинейные моды, которые являются прямыми линиями в конфигурационном пространстве динамической системы (5). Подчеркнем, что эти прямые линии являются точным решением системы (5). Теория нелинейных нормальных форм параметрических колебаний – это неисследованный вопрос теории нелинейных колебаний [1, 5]. К сожалению, ничего не известно о существовании нелинейных нормальных форм, отличных от исследуемых в системе (5).

Для исследования движений на нормальной форме (10) воспользуемся методом гармонического баланса и движение представим так:

$$f_i = A_i \cos(vt) + B_i \sin(vt) \quad (i = 1, 3, 5). \quad (11)$$

Теперь (11) введем в (10) и приравняем амплитуды при $\cos(vt)$ и $\sin(vt)$. В результате получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_i \left(\omega_i^2 - v^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(A)} &= 0; \\ B_i \left(\omega_i^2 - v^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(B)} &= 0 \quad (i = 1, 3, 5), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} G_1^{(A)} &= \eta_{13} A_3 B_1 B_3 + \eta_{15} A_5 B_1 B_5 + \frac{1}{2} \eta_{17} A_3 B_3 B_5 + \frac{1}{4} \eta_{17} A_5 (3A_3^2 + B_3^2); \\ G_1^{(B)} &= \eta_{13} B_3 A_1 A_3 + \eta_{15} B_5 A_1 A_5 + \frac{1}{2} \eta_{17} B_3 A_3 A_5 + \frac{1}{4} \eta_{17} B_5 (3B_3^2 + A_3^2); \\ G_3^{(A)} &= \frac{1}{2} (3\eta_{37} A_1 A_3 A_5 + \eta_{37} A_1 B_3 B_5 + \eta_{37} A_3 B_1 B_5 + \eta_{37} A_5 B_1 B_3); \\ G_3^{(B)} &= \frac{1}{2} (3\eta_{37} B_1 B_3 B_5 + \eta_{37} B_1 A_3 A_5 + \eta_{37} B_3 A_1 A_5 + \eta_{37} B_5 A_1 A_3); \\ G_5^{(A)} &= \eta_{53} A_3 B_3 B_5 + \eta_{51} A_1 B_1 B_5 + \frac{1}{2} \eta_{57} A_3 B_1 B_3 + \frac{1}{4} \eta_{57} A_1 (3A_3^2 + B_3^2); \\ G_5^{(B)} &= \eta_{53} B_3 A_3 A_5 + \eta_{51} B_1 A_1 A_5 + \frac{1}{2} \eta_{57} B_3 A_1 A_3 + \frac{1}{4} \eta_{57} B_1 (3B_3^2 + A_3^2). \end{aligned} \quad (13)$$

В системе (12) существуют следующие группы решений:

$$\begin{aligned}
& 1.1) A_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_i = 0; \quad 1.2). B_1 \neq 0; B_3 = B_5 = 0; A_i = 0; \\
& 2.1) A_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_i = 0; \quad 2.2). B_3 \neq 0; B_1 = B_5 = 0; A_i = 0; \\
& 3.1) A_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_i = 0; \quad 3.2). B_5 \neq 0; B_1 = B_3 = 0; A_i = 0; \\
& 4.1) A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; A_3 = 0; B_i = 0; \quad 4.2). B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; B_3 = 0; A_i = 0; \\
& 5.1) A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_i = 0; \quad 5.2). B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0; A_i = 0 \quad (14) \\
& \quad \quad \quad (i = 1, 3, 5).
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из групп решений в отдельности. Исследуем согласно (14) решения 1.1), 1.2). Они определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (12) при фиксированном значении ν , которое задается с некоторым шагом. Тогда амплитуды колебаний A_1 , B_1 определяются так:

$$A_1^2 = [2\nu^2 - 2\omega_1^2 - \chi_1 N_1] / 3\eta_{11}; \quad B_1^2 = [2\nu^2 - 2\omega_1^2 + \chi_1 N_1] / 3\eta_{11}. \quad (16)$$

Решения 2.1), 2.2), 3.1), 3.2) также могут быть определены аналитически. Тогда амплитуды A_3 , B_3 , A_5 , B_5 определяются так:

$$A_i^2 = [2\nu^2 - 2\omega_i^2 - \chi_i N_i] / 3\eta_{ii}; \quad B_i^2 = [2\nu^2 - 2\omega_i^2 + \chi_i N_i] / 3\eta_{ii} \quad (i = 3, 5). \quad (17)$$

Исследуем группы решений 4.1), 4.2), варьируя с некоторым шагом частотой ν . Для каждого значения ν решается система нелинейных алгебраических уравнений (12). Эта система имеет следующее аналитическое решение:

$$\begin{aligned}
A_1^2 &= \theta^{-1} \left[\eta_{55} (2\nu^2 - 2\omega_1^2 - \chi_1 N_1) - \eta_{15} (2\nu^2 - 2\omega_5^2 - \chi_5 N_1) \right] / 3; \\
B_1^2 &= \theta^{-1} \left[\eta_{55} (2\nu^2 - 2\omega_1^2 + \chi_1 N_1) - \eta_{15} (2\nu^2 - 2\omega_5^2 + \chi_5 N_1) \right] / 3; \\
A_5^2 &= \theta^{-1} \left[\eta_{11} (2\nu^2 - 2\omega_5^2 - \chi_5 N_1) - \eta_{51} (2\nu^2 - 2\omega_1^2 - \chi_1 N_1) \right] / 3; \\
B_5^2 &= \theta^{-1} \left[\eta_{11} (2\nu^2 - 2\omega_5^2 + \chi_5 N_1) - \eta_{51} (2\nu^2 - 2\omega_1^2 + \chi_1 N_1) \right] / 3, \quad (18)
\end{aligned}$$

где $\theta = \eta_{11}\eta_{55} - \eta_{15}\eta_{51}$.

В случаях 5.1), 5.2) амплитуды колебаний определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (12), которая решается численно методом Ньютона относительно A_1 , B_1 , A_3 , B_3 , A_5 , B_5 , а параметр ν варьируется с некоторым шагом.

Теперь исследуем нелинейные колебания оболочки с учетом диссипации энергии. В систему (5) введем слагаемые, которые описывают линейное демпфирование колебаний. Тогда эта система преобразуется к виду

$$\ddot{f}_i + \xi_i \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_7) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0 \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (19)$$

Функции R_i этой системы определяются из (9).

В системе с диссипацией (19) существуют нелинейные моды $f_{2i-1} = \pm f_{2i}$, $i = \overline{1, 3}$. Отметим, что эти нелинейные моды существуют и в системе без диссипации (10). Для

исследования этих нелинейных мод воспользуемся методом гармонического баланса и движение системы представим в форме (11). Тогда получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд гармоник (11)

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + B_i \xi_i \nu + G_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) - A_i \xi_i \nu + G_i^{(B)} = 0 \quad (i = 1, 3, 5). \quad (20)$$

Здесь функции $G_i^{(A)}$, $G_i^{(B)}$ определяются по формулам (13). В системе (20) существуют следующие группы решений:

- 1) $A_1 \neq 0; B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_3 = B_5 = 0;$
- 2) $A_3 \neq 0; B_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_1 = B_5 = 0;$
- 3) $A_5 \neq 0; B_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_1 = B_3 = 0;$
- 4) $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; A_3 = 0; B_3 = 0;$
- 5) $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0.$ (21)

Решения (21) системы (20) исследуются численно. Задавая параметр ν с некоторым шагом, методом Ньютона определяются все неизвестные.

Рассмотрим режим бегущих волн в цилиндрической оболочке, который описывается системой (19). Для исследования этих движений воспользуемся методом гармонического баланса и колебания системы представим так:

$$f_i = A_i \cos(\nu t) + B_i \sin(\nu t), \quad f_{i+1} = A_i \sin(\nu t) + B_i \cos(\nu t) \quad (i = 1, 3, 5). \quad (22)$$

Тогда амплитуды гармоник (22) описываются системой нелинейных алгебраических уравнений

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm B_i \xi_i \nu + \tilde{G}_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm A_i \xi_i \nu + \tilde{G}_i^{(B)} = 0 \quad (i = 1, 3, 5); \quad (23)$$

$$\tilde{G}_1^{(A)} = \eta_{13} A_3 B_1 B_3 + \eta_{15} A_5 B_1 B_5 + \eta_{17} A_3 B_3 B_5 + \frac{1}{2} \eta_{17} A_3^2 A_5;$$

$$\tilde{G}_1^{(B)} = \eta_{13} B_3 A_1 A_3 + \eta_{15} B_5 A_1 A_5 + \eta_{17} B_3 A_3 A_5 + \frac{1}{2} \eta_{17} B_3^2 B_5;$$

$$\tilde{G}_3^{(A)} = \eta_{37} A_1 A_3 A_5 + \eta_{37} A_1 B_3 B_5 + \eta_{37} A_5 B_1 B_3 + \eta_{31} A_1 B_1 B_3 + \eta_{35} A_5 B_3 B_5;$$

$$\tilde{G}_3^{(B)} = \eta_{37} B_1 B_3 B_5 + \eta_{37} B_1 A_3 A_5 + \eta_{37} B_5 A_1 A_3 + \eta_{31} B_1 A_1 A_3 + \eta_{35} B_5 A_3 A_5;$$

$$\tilde{G}_5^{(A)} = \eta_{51} A_1 B_1 B_5 + \eta_{53} A_3 B_3 B_5 + \eta_{57} A_3 B_1 B_3 + \frac{1}{2} \eta_{57} A_1 A_3^2;$$

$$\tilde{G}_5^{(B)} = \eta_{51} B_1 A_1 A_5 + \eta_{53} B_3 A_3 A_5 + \eta_{57} B_3 A_1 A_3 + 0,5 \eta_{57} B_1 B_3^2. \quad (24)$$

В системе (23) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 = B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = B_3 = B_5 = 0;$
- 2). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 = 0;$
- 3). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 \neq 0.$ (25)

Движения (25) исследуются при изменении частоты параметрической нагрузки ν численным решением системы (23) методом Ньютона.

Теперь свяжем параметры полученных колебаний с радиальными прогибами оболочки. Нормальным формам, которые описываются уравнениями $f_{2i-1} = \pm f_{2i}, i = \overline{1,3}$, отвечают такие радиальные перемещения оболочки:

$$w(x, y, t) = \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^3 (A_{2i-1} \cos(\nu t) + B_{2i-1} \sin(\nu t)) \left(\cos \frac{n_i y}{R} \pm \sin \frac{n_i y}{R} \right) + C \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + E; \quad (26)$$

$$C = \eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} \left[\tilde{\omega}_8 (\gamma_{8j} + \gamma_{8j+1}) f_j^2 - \omega_8 (\gamma_{7j} + \gamma_{7j+1}) f_j^2 \right];$$

$$E = \eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} \left[\omega_7 (\gamma_{7j} + \gamma_{7j+1}) f_j^2 - \tilde{\omega}_7 (\gamma_{8j} + \gamma_{8j+1}) f_j^2 \right].$$

В случае бегущих волн (22) колебания радиальных перемещений оболочки определяются так:

$$w(x, y, t) = \sin \frac{m\pi x}{L} \sum_{i=1}^3 \left[A_{2i-1} \cos \left(\nu t - \frac{n_i y}{R} \right) + B_{2i-1} \sin \left(\nu t + \frac{n_i y}{R} \right) \right] + \tilde{C} \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + \tilde{E}; \quad (27)$$

$$\tilde{C} = \eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} \left\{ \tilde{\omega}_8 [\gamma_{8j} f_j^2 + \gamma_{8j+1} f_{j+1}^2] - \omega_8 [\gamma_{7j} f_j^2 + \gamma_{7j+1} f_{j+1}^2] \right\},$$

$$\tilde{E} = \eta^{-1} \sum_{j=1,3,5} \left\{ \omega_7 [\gamma_{7j} f_j^2 + \gamma_{7j+1} f_{j+1}^2] - \tilde{\omega}_7 [\gamma_{8j} f_j^2 + \gamma_{8j+1} f_{j+1}^2] \right\}.$$

Слагаемое $A_{2i-1} \cos(\nu t - (n_i y)/R)$ уравнения (27) отвечает вращению всей картины деформаций оболочки вокруг оси симметрии в направлении возрастания y с угловой скоростью $\Omega_* = \nu/n_i$, а второе слагаемое $B_{2i-1} \sin(\nu t + (n_i y)/R)$ уравнения (27) соответствует движению волны с той же угловой скоростью, но в противоположном направлении.

3 Численный анализ колебаний.

Рассмотрим оболочку со следующими численными значениями параметров [6]:

$$h = 0,002 \text{ м}; \quad L = 0,4 \text{ м}; \quad R = 0,2 \text{ м}; \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad \mu = 0,3; \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3;$$

$$\xi_i = 0,001 \frac{\omega_i}{\omega_0} \quad (i = \overline{1,6}); \quad \omega_0 = 3165,03; \quad N_1 = 0,6 N_{cr}, \quad (28)$$

где $N_{cr} = Eh^2 / R\sqrt{3(1-\nu^2)}$ – статическая критическая нагрузка [9], которая для параметров оболочки (28) принимает значение: $N_{cr} = 2,54 \cdot 10^6$ Н/м. Собственные частоты линейных колебаний оболочки с параметрами (28), в рад/с, таковы: $\omega_{1,3} = 5636,32$; $\omega_{1,4} = 3745,32$; $\omega_{1,5} = 3165,03$; $\omega_{1,6} = 3437,18$; $\omega_{1,7} = 4214,28$; $\omega_{1,8} = 5289,51$, где первый индекс показывает число полуволн вдоль образующей, а второй индекс – число волн в окружном направлении. Из анализа частот следует, что в дальнейшем исследовании будут учитываться моды колебаний, имеющие такие параметры волнообразования: $n_1 = 4$; $n_2 = 5$; $n_3 = 6$; $m = 1$.

Для представленных выше параметров оболочки проведен численный анализ нелинейных нормальных форм. На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), которая выражает зависимость амплитуд колебаний A_1 , B_1 от частоты параметрической силы ν . На этом рисунке приняты следующие обозначения: буквами $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$ обозначены ветви АЧХ для случая 1.1), 1.2), которые представлены в (14). В этом случае в колебаниях участвует только одна из трех сопряженных форм колебаний из разложения (2). На рис. 1 показаны ветви $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, которые отвечают случаю возбуждения двух сопряженных форм колебаний. Эти решения отражают случаи 4.1) и 4.2), представленные в формулах (14). Ветви АЧХ $A_1^{(3)}$, $B_1^{(3)}$ отражают случай возбуждения трех сопряженных форм колебаний, что отвечает случаям 5.1) и 5.2) в формулах (14).

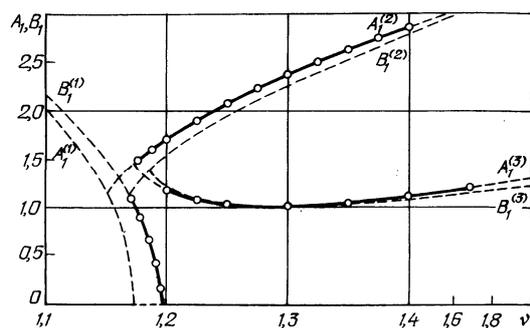


Рис. 1

Для подтверждения результатов аналитического анализа проводилось прямое численное интегрирование системы (10) при различных значениях частот гармонического воздействия ν . Результаты расчетов представлены на рис. 1 точками. Эти результаты свидетельствуют об очень хорошем совпадении результатов прямого численного интегрирования и данных метода гармонического баланса.

Для исследования устойчивости параметрических колебаний производилось прямое численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (5) на интервалах времени t порядка 1000 периодов колебаний. Начальные условия определялись из уравнений (11), (22). На рис. 1 устойчивые движения представлены сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной линией.

Исследовано также поведение динамической системы (5) при потере устойчивости нормальных форм. Для этого проведено прямое численное интегрирование системы (5). Результаты расчета представлены на рис. 2. Данные, представленные на рис. 2, а соответствуют группе решений 1.1), которые описываются формулой (14), при таких параметрах: $\nu = 1,18$, $A_1 = 0,3694$. На рис. 2, б представлена динамика системы (5) после потери устойчивости решений из группы 4.1), которые описываются формулой (14). Эти решения имеют следующие параметры: $\nu = 1,43$, $A_1 = 2,8494$, $A_2 = 2,6091$.

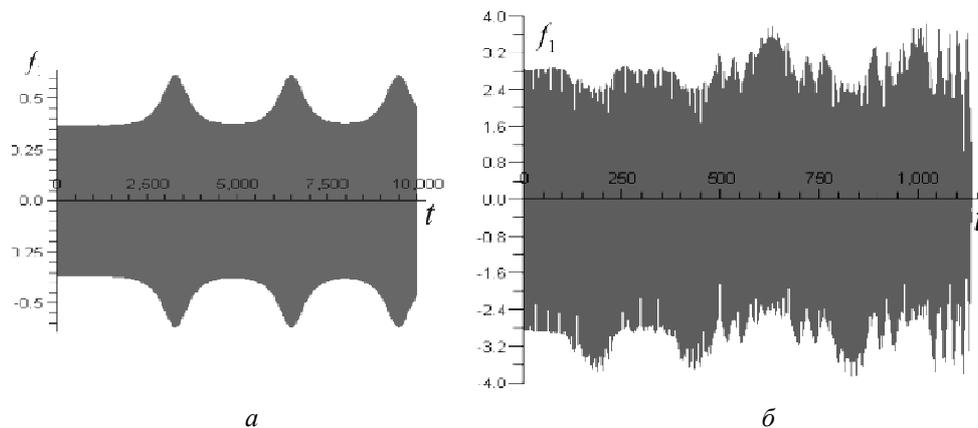


Рис. 2

На рис. 3 представлена АЧХ, описывающая динамику системы (19) на нелинейных модах; здесь показана зависимость амплитуд колебаний A_1 , B_1 от частоты возмущающей силы ν . Здесь ветви АЧХ, соответствующие группам решений (21), для случая 1) обозначены буквами $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$. При этом в колебаниях участвует только одна из трех сопряженных форм колебаний разложения (2). На рис. 3 показаны ветви $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, которые отвечают случаю возбуждения двух пар сопряженных форм колебаний и соответствуют группе 4), представленной в формулах (21). Ветви АЧХ $A_1^{(3)}$, $B_1^{(3)}$ отражают случай возбуждения трех пар сопряженных форм колебаний, что отвечает случаю 5) в формулах (21).

Произведен численный анализ режимов типа бегущих волн на основании методики, представленной выше. Результаты анализа представлены в виде АЧХ на рис. 4, где показана зависимость амплитуд колебаний A_1 от частоты возмущающей силы ν . Здесь ветви АЧХ, соответствующие группам решений (25) для случая 1), обозначены буквами $A_1^{(1)}$. При этом в колебаниях участвует только одна из трех пар сопряженных форм колебаний из разложения (2). На рис. 4 показаны ветви $A_1^{(2)}$, которые отвечают случаю возбуждения двух пар сопряженных форм колебаний и соответствуют группе 2), представленной в формулах (25). Ветви АЧХ $A_1^{(3)}$ отражают случай возбуждения трех пар сопряженных форм колебаний, что отвечает случаю 3) в формулах (25).

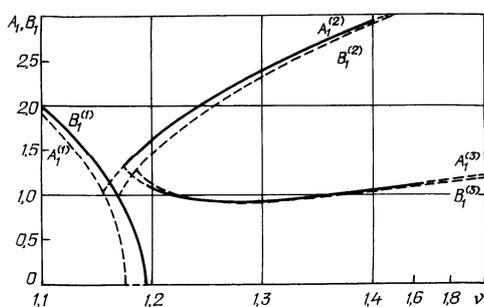


Рис. 3

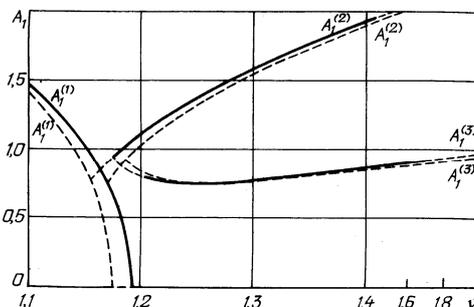


Рис. 4

Выводы.

Существует большой класс цилиндрических оболочек, для которых двух и трехмодовые аппроксимации колебаний не достаточны для адекватного описания динамики. Это объясняется близостью собственных частот различных мод колебаний. В этом случае только многомодовые модели адекватно описывают колебания.

При многомодовом режиме колебаний оболочки обнаружено, что существуют нелинейные моды, которые описываются прямыми линиями в конфигурационном пространстве. Отметим, что одинаковые нелинейные моды существуют как в системе без диссипации, так и в системе с диссипацией. Существование таких нормальных форм объясняется циклической симметрией цилиндрических оболочек.

РЕЗЮМЕ. Нелінійні параметричні коливання циліндричних оболонок описано рівняннями Доннелла – Муштарі – Власова. Рухи представлено у вигляді багатомодового розкладу за формами коливань. Дискретизацію проведено методом Бубнова – Гальоркіна. За допомогою методу гармонічного балансу досліджено рухи в режимі біжучих хвиль та нелінійні нормальні моди в системі з дисипацією та без неї.

1. *Аврамов К.В.* Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // ДНАУ. – 2008. – № 11. – С. 41 – 47.
2. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 423 с.
3. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наук. думка, 1984. – 218 с.
4. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща шк., 1989. – 207 с.
5. *Avramov K.* Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics // J. Sound and Vibrations. – 2009. – **322**. – P. 476 – 489.
6. *Gonçalves P.B., Del Prado Z.J.G.N.* Nonlinear Oscillations and Stability of Parametrically Excited Cylindrical Shells // Meccanica – 2002. – **36**. – P. 105 – 116.
7. *Kovalchuk P.S., Kruk L.A.* Forced nonlinear oscillations of cylindrical shells interacting with fluid flow // J. Sound and Vibration. – 2003. – **265**. – P. 245 – 268.
8. *Kubenko V.D., Kovalchuk P.S.* Nonlinear Problems of Oscillations of Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 8. – P. 703 – 728.
9. *Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Kruk L.A.* Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // J. Sound and Vibration. – 2003. – **265**. – P. 245 – 268.
10. *Pellicano F., Amabili M.* Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // Int. J. Solid and Struct. – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.
11. *Yamaki N.* Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. – North-Holland, Amsterdam, 1984.

Поступила 15.05.2009

Утверждена в печать 15.06.2010