

**И. Ю. Бабич**<sup>1</sup>, **Н. Б. Жукова**<sup>2</sup>, **Н. П. Семенюк**<sup>3</sup>, **В. М. Трач**<sup>4</sup>

### УСТОЙЧИВОСТЬ ГОФРИРОВАННЫХ ПО ОКРУЖНОСТИ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

<sup>1-3</sup> *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: comros@inmech.kiev.ua*

<sup>4</sup> *Национальный университет водного хозяйства и природопользования,  
ул. Соборная, 11, 33018, Ровно, Украина; e-mail: trach-vm@ukr.net*

**Abstract.** A technique of solving the problem on stability of corrugated shells is stated when the uniform compression is acting over all the shell surface including the end bottoms. Determination of critical loads is carried out by solving the inhomogeneous boundary problem with unknown amplitude of perturbations by the orthogonal mode. The high sensitivity of shell to the axial component of hydrostatic pressure is shown.

**Key words:** stability, corrugated shell, critical load, hydrostatic pressure, inhomogeneous boundary problem, toroid-like or sinusoidal surface.

#### Введение.

Придание оболочкам определенного вида волнистости является одним из способов управления их жесткостями при проектировании оболочечных конструкций, подверженных воздействию эксплуатационных нагрузок. В частности, при равномерном внешнем давлении применяется гофрирование оболочек в поперечном направлении. Как показано в работе [12], при надлежащем выборе параметров волнистости можно значительно повысить устойчивость оболочек, не увеличивая их вес. В случае действия на оболочку осевых нагрузок может оказаться весьма полезным гофрирование в продольном направлении [11, 15, 18]. На практике поперечно гофрированные оболочки используются в конструкциях, где необходима незначительная изгибная жесткость в продольном направлении и высокая – в поперечном [14]. Типичный пример поперечно гофрированных оболочек – сильфоны, основной эксплуатационной нагрузкой для которых является внутреннее давление [12]. При этом оболочка очень мало деформируется в окружном направлении, но может испытывать значительные смещения в осевом. Установлено [10], что оболочка с гофрами, характерными для сильфонов, может терять устойчивость при внутреннем давлении. Оболочки с синусоидальным гофрированием [12] также обладают высокой изгибной жесткостью в окружном направлении и не высокой – в продольном. Этот факт может влиять отрицательно на критическое значение внешнего давления, если оно действует не только на боковую поверхность, но и на поверхность днищ. Однако достоверные данные о характере этого влияния в публикациях отсутствуют. Ниже исследуется устойчивость гофрированных цилиндрических оболочек при всестороннем внешнем давлении.

#### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим устойчивость при внешнем давлении оболочек, срединная поверхность которых образуется при вращении вокруг оси  $x$  кривой, заданной в плоскости  $m$  уравнением

$$y = R_0 + Hf(x), \quad (1)$$

где  $R_0$  – радиус цилиндрической поверхности, которой придана волнистость с профилем волн, определяемым функцией  $f(x)$ . Эта функция периодическая с периодом

$2l = L/m$ ,  $m$  – целое число;  $H$  – амплитуда волны. В работе [12] рассмотрены оболочки с синусоидальным гофрированием, когда  $f(x) = \sin((m\pi X)/L)$ . Методика расчета оболочки вращения на устойчивость, изложенная в [12], применима при произвольном виде меридиана. Однако ниже ограничимся классом оболочек, для которых функция  $f(x)$  в выражении (1) может быть представлена рядом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{N=1}^{\infty} \left( a_m \cos \frac{2m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{2m\pi x}{L} \right). \quad (2)$$

Для многочисленных видов профилей волн найдены значения коэффициентов  $a_m, b_m$  [3], что можно использовать при расчете конкретных оболочек. В ряде случаев аналитическое определение коэффициентов  $a_m, b_m$  не возможно. Вместо рядов (2) целесообразно использовать тригонометрические полиномы

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{j=1}^N \left( A_j \cos \frac{2j\pi x}{L} + B_j \sin \frac{2j\pi x}{L} \right), \quad (3)$$

коэффициенты которых находятся численно

$$A_j = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f(x_k) \cos \frac{2\pi jk}{M}; \quad B_j = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f(x_k) \sin \frac{2\pi jk}{M}, \quad (4)$$

где  $M$  – четное количество точек разбиения интервала  $(0, 2l)$

$$x_k = k \Delta l; \quad \Delta l = 2l/M. \quad (5)$$

При  $N = M/2$  имеем  $F(x_k) = f(x_k)$ , что облегчает контроль точности аппроксимации с помощью полиномов  $F(x)$  функции  $f(x)$ . Как показано в [11], перспективным типом гофрирования оболочек, подверженных сжимающим нагрузкам, является использование гофров в виде дуг окружности. При вращении сопряженных дуг окружностей, опирающихся на образующую цилиндрической поверхности радиуса  $R_0$ , образуется поверхность, состоящая из сегментов тора (рис. 1). В этом случае имеем равенство

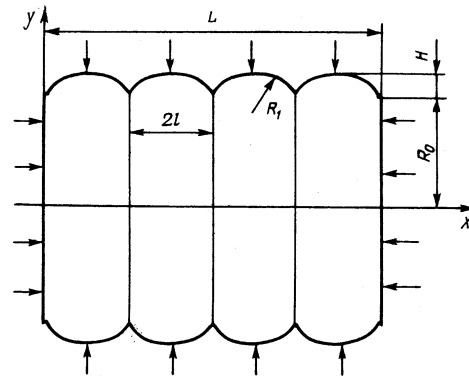


Рис. 1

$$f(x) = 1 - \frac{R_1}{H} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{(x-l)^2}{R_1^2}} \right). \quad (6)$$

Радиус  $R_1$ , если заданы амплитуда  $H$  и длина  $l$ , определяется как

$$R_1 = \frac{1}{2} H \left( 1 + \frac{l^2}{H^2} \right). \quad (7)$$

Геометрические параметры оболочки определим, используя формулы

$$A_1 = \sqrt{1 + y'^2}; \quad A_2 = y; \quad a_r = \frac{1}{A_1 A_2} y'; \quad k_1 = \frac{1}{R_1}; \quad k_2 = \frac{1}{y A_1}.$$

Кривизна  $k_1$  будет положительной или отрицательной в зависимости от знака амплитуды  $H$ .

Так как  $y' = -\frac{x-l}{R_1\sqrt{1-\frac{(x-l)^2}{R_1^2}}}$ , то  $A_1 = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x-l)^2}{R_1^2}}}$ ;  $a_2 = -\frac{x-x_0}{yR_1}$ .

Обозначим  $f_1(x) = A_1(x)$ ;  $f_2(x) = y$ ;  $f_3(x) = a_2$ ;  $f_4(x) = \frac{1}{R_1}$ ;  $f_5(x) = k_2$ .

Каждую из функций  $f_r(x)$  аппроксимируем полиномом  $F_r(x)$ ,  $r = 1, \dots, 5$ .

Использование тригонометрических полиномов – один из способов получения периодических функций на всем интервале  $(0, L)$ , если задана форма периодически повторяющегося элемента на подинтервале  $(0, 2l)$ . Кроме того, если исходная функция имеет некоторое число разрывов, то при такой аппроксимации разрывы устраняются, что ближе к геометрии реальных конструкций.

Исследование устойчивости гофрированных оболочек возможно на основе нелинейной теории, более полно учитывающей особенности их деформирования при выпучивании по сравнению с известными упрощенными вариантами, применимость которых правомочна к оболочкам положительной кривизны [1]. Кроме того, волнообразные (гофрированные) оболочки могут быть однослойными и многослойными, изотропными и анизотропными. Поэтому при разработке расчетной методики воспользуемся вариантом соотношений нелинейной теории слоистых анизотропных оболочек, предложенном в работе [2]. Разрешающая система дифференциальных уравнений выведена в [2] из условия стационарности смешанного функционала, полученного методом Гамильтона из функционала потенциальной энергии при активных перемещениях, усилиях и моментах, с помощью которых для замкнутых оболочек вращения формулируются граничные условия при  $x = \text{const}$ . Эта система имеет вид

$$\varepsilon_{11}(u) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} - A_{13}M_{11} + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{12} = 0;$$

$$\varepsilon_{12}(u) - A_{12}T_{11} - A_{22}T_{12} - A_{23}M_{11} + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}k_{22} + d_{23}k_{12} = 0;$$

$$k_{11}(u) - A_{13}T_{11} - A_{23}T_{12} - A_{33}M_{11} + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{12} = 0;$$

$$\theta_1(u) + \theta = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \varphi} + a_1(T_{12}^* + T_{21}^*) + a_2(T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_1} T_{13}^* + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \varphi} + a_2(T_{12}^* + T_{21}^*) - a_1(T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_2} T_{23}^* + q_2 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}^*}{\partial \varphi} + a_2 T_{13}^* + a_1 T_{23}^* + \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{23}}{R_2} + q_3 = 0; \quad (8)$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + 2a_1 M_{12} + a_2(M_{11} - M_{22}) - T_{13} = 0.$$

Присутствующие в этих уравнениях коэффициенты  $A_{ij}$  и  $d_{ij}$  выражаются через жесткостные параметры соотношений обобщенного закона Гука, записанного в стандартном виде [1]. Если из общей матрицы жесткостей выделить блоки

$$H_{11} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & B_{11} \\ C_{16} & C_{66} & B_{16} \\ B_{11} & B_{16} & D_{11} \end{bmatrix}; \quad H_{12} = \begin{bmatrix} C_{12} & B_{12} & B_{16} \\ C_{26} & B_{26} & B_{66} \\ B_{12} & D_{12} & D_{16} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

то получим формулы

$$[A_{ij}] = H_{11}^{-1}; \quad [d_{ij}] = H_{11}^{-1}H_{12}. \quad (10)$$

Усилие  $T_{22}$  и моменты  $M_{22}, M_{12}$  определяются через разрешающие функции

$$\begin{bmatrix} T_{22} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = H_{12}^T H_{11}^{-1} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ M_{11} \end{bmatrix} + (H_{22} - H_{12}^T H_{11}^{-1} H_{12}) \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где принято

$$H_{22} = \begin{bmatrix} C_{22} & B_{22} & B_{26} \\ B_{22} & D_{22} & D_{26} \\ B_{26} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Жесткости  $C_{ij}, D_{ij}$  вычисляются по известным формулам [1]. Для компонентов деформации  $\varepsilon_{ij}$ , приращений кривизн и кручения  $\kappa_{ij}$  в уравнениях (8) используются выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \theta_1^2); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \theta_2^2); \quad \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1\theta_2; \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 v - \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + a_2 u - \frac{w}{R_2}; \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x} - a_1 u; \\ \omega_2 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - a_2 v; \quad \theta_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{R_1}; \quad \theta_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_2}; \\ k_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} + a_1 \psi; \quad k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + a_2 \theta; \quad k_{12} = \tau_1 + \tau_2; \\ \tau_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} - a_1 \theta - \frac{\omega_2}{R_1}; \quad \tau_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - a_2 \psi - \frac{\omega_1}{R_2}; \\ a_1 &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi}; \quad a_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для рассматриваемой оболочки  $a_1 = 0$ . Так как используемый вариант теории оболочек основан на гипотезах Кирхгофа – Лява, то

$$\theta = -\theta_1; \quad \psi = -\theta_2; \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau. \quad (14)$$

Формально различаются три варианта записи параметра кручения  $k_{12}$ :

$$a) k_{12} = \tau_1 + \tau_2; \quad b) k_{12} = 2\tau_1; \quad c) k_{12} = 2\tau_2. \quad (15)$$

Приемлемой для используемого варианта разрешающих уравнений является запись c).

Учет в выражениях деформаций (13) нелинейных членов, обусловленных вращением малых элементов не только вокруг касательных к осям координат на поверхности, но и вокруг вертикальной оси, приводит к таким проекциям усилий  $T_{ij}^*$  на направления осей до деформации:

$$T_{12}^* = T_{12} + T_{11}\omega_1 - \frac{2}{R_2}M_{12}; \quad T_{21}^* = T_{12} + T_{22}\omega_2; \quad T_{13}^* = T_{13} + T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2;$$

$$T_{23}^* = \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} - a_1(M_{11} - M_{22}) + 2a_2M_{12} + T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2. \quad (16)$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (8) в частных производных и соотношения (13) представлены в виде, позволяющем после разделения переменных получить нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения воспользуемся методом дискретной ортогонализации [5].

Граничные условия, которые также вытекают из вариационного принципа [2], формулируются относительно четырех функций, принятых по одной из четырех пар:

$$(T_{11}, w); (T_{12}^*, v); (T_{13}^*, w); (M_{11}, \theta). \quad (17)$$

## 2. Расчет критических нагрузок и форм потери устойчивости.

Полагаем, что на оболочку действует равномерное всестороннее давление  $q_3$ . Поэтому докритическое состояние оболочки вращения при независимых от окружной координаты  $\varphi$  жесткостях и граничных условиях будет также осесимметричным. Нелинейные уравнения (8) сохраняют свой вид, но частные производные по координате  $x$  становятся обыкновенными, а производные по координате  $\varphi$  следует положить равными нулю.

Граничные условия при гидростатическом давлении в отличие от чисто бокового, будут неоднородными. Осевая нагрузка  $P = \pi R_0^2 q_3$  распределяется по торцевому сечению длиной  $2\pi R_0$ , создавая сжимающее усилие  $T_{11}^0 = -(q_3 R_0)/(2 \cos \varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  – угол между касательной к меридиану и осью оболочки.

Решение осесимметричной краевой задачи после ее линеаризации определяется численным методом дискретной ортогонализации [5]. В частности, применение этого метода не ограничивается нагрузками, меньшими предельных критических значений. Показано [7, 17, 16], что при движении по траектории нагружения в рамках инкрементальной процедуры прохождение регулярных и предельных точек осуществляется по единому алгоритму. Если принять во внимание это обстоятельство, то оказывается, что при расчете критических нагрузок, соответствующих явлению бифуркации, нет необходимости в применении предположения Эйлера о существовании смежных форм равновесия при одной и той же нагрузке. Вместо решения однородной краевой задачи, являющейся следствием применения критерия Эйлера, для определения нагрузок бифуркации будем искать решение неоднородной краевой задачи с неизвестным параметром нагружения.

Пусть оболочка находится в состоянии равновесия при осесимметричном внешнем давлении интенсивностью  $q_0$ . Является ли это состояние устойчивым можно проверить, приложив малое неосесимметричное давление  $\delta q \cos n\varphi$ . Амплитуда  $\delta q$  полагается неизвестной, но достаточно малой, чтобы реакция оболочки на эту нагрузку была линейной. Разрешающие функции в возмущенном состоянии будут равны сумме их значений в исходном состоянии  $(T_{1,c}, \theta_{1,c}, \dots)$  и малых приращений в близком неосесимметричном состоянии, для которых новых обозначений вводить не будем. Запишем каждое из уравнений (8) в виде  $\Pi_i = 0, i = 1, \dots, 8$ . Нелинейные слагаемые в (8) в результате линеаризации приобретут вид

$$\varepsilon_{11}(u) = \varepsilon_1 + \omega_{1,c} \omega_1 + \theta_{1,c} \theta_1; \quad \varepsilon_{22}(u) = \varepsilon_2 + \omega_{2,c} \omega_1 + \theta_{2,c} \theta_2;$$

$$\varepsilon_{12}(u) = \omega_1 + \omega_2 + \theta_{1,c} \theta_2 + \theta_1 \theta_{2,c},$$

$$T_{12}^* = T_{12} + T_{11,c} \omega_1 + T_{11} \omega_{1,c} - \frac{2}{R_2} M_{12}; \quad T_{21}^* = T_{12} + T_{22,c} \omega_2 + T_{22} \omega_{2,c};$$

$$T_{13}^* = T_{13} + T_{11,c} \theta_1 + T_{11} \theta_{1,c} + T_{12,c} \theta_2 + T_{12} \theta_{2,c}; \quad (18)$$

$$T_{23}^* = \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - a_1 (M_{11} - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + T_{12,c} \theta_1 + T_{12} \theta_{1,c} + T_{22,c} \theta_2 + T_{22} \theta_{2,c},$$

где учтено, что докритическое состояние – осесимметричное. Функции  $\omega_{1,c}$ ,  $\omega_{2,c}$ ,  $\theta_{2,c}$ ,  $T_{12,c}$  равны нулю для изотропных и ортотропных оболочек. Они возникают при взаимосвязи в соотношениях упругости деформаций растяжения и сдвига, изгиба и кручения [2]. Ввиду замкнутости оболочки по окружной координате, усилия, моменты и перемещения являются периодическими функциями от перемещений  $\varphi$ . В рассматриваемом случае решение может быть представлено в виде рядов Фурье

$$(T_{11}, T_{13}^*, M_{11}, u, w, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{11,n}, T_{13,n}, M_{11,n}, u_n, w_n, \theta_n) \cos n\varphi; \quad (19)$$

$$(T_{12}^*, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{12,n}, v_n) \sin n\varphi.$$

Если подставить разложения (19) в линеаризованные уравнения  $\Pi_i = 0$  и выполнить интегрирование в соответствии с методом Бубнова – Галеркина, то получим систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = F_i(y_{i,c}, y_i), \quad (20)$$

где

$$y_1 = T_{11,n}, \quad y_2 = T_{12,n}^*; \quad y_3 = T_{13,n}^*; \quad y_4 = M_{11}; \quad y_5 = u; \quad y_6 = v; \quad y_7 = w; \quad y_8 = \theta. \quad (21)$$

Граничные условия формулируются относительно функций  $y_i (i = 1, \dots, 8)$ . Если ввести вектор  $Y$ , компонентами которого являются функции  $y_i$ , и матрицы  $B_1$  и  $B_2$  размером  $(4 \times 8)$ , то граничные условия удобно сформулировать в виде

$$B_1 Y = b_1; \quad B_2 Y = b_2 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L. \quad (22)$$

Для решения системы уравнений (20) при соответствующих граничных условиях используем метод дискретной ортогонализации.

В его основу положен метод начальных параметров, с помощью которого краевая задача приводится к задаче Коши, метод численного интегрирования системы дифференциальных уравнений типа Рунге – Кутта, процедура Грамма – Шмидта ортогонализации векторов, образующих матрицу решений. Весь интервал интегрирования  $\alpha_{1,0} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1,l}$  делится на  $k$  участков. На  $j$ -м участке полное решение записывается в виде

$$Y^{(j)} = \bar{Y}^{(j)} C^{(j)}, \quad (23)$$

где  $\bar{Y}^{(j)}$  – матрица решений, состоящая из четырех векторов-решений однородной системы и одного – неоднородной. Решение при  $x=0$  удовлетворяет граничным условиям независимо от значения констант  $C_i$ . Для определения этих констант используются граничные условия при  $x=L$ . Подставив (23) в (22), получим

$$B_2 \bar{Y}^{(k)} C^{(k)} = 0. \quad (24)$$

Матрица  $B_2 \bar{Y}^{(k)}$  имеет размер (4x5). Учитывая, что последний компонент вектора  $C^{(k)}$  равен 1 [5, 8], система (24) относительно четырех неизвестных компонент будет неоднородной и ее решение существует, если  $\text{rang}(B_2 \bar{Y}) = 4$ . Видоизменим процедуру определения решения, учитывая то, что компоненты столбца матрицы, являющиеся решением неоднородной задачи, пропорциональны значению возмущающей нагрузки  $\delta q$  (или  $\delta P$ ). Примем величину  $\delta q$  заданной с некоторым коэффициентом  $c^j$ . Тогда вектор  $C^{(j)}$  будет определяться пятью компонентами [7, 12, 17, 16]

$$C^{(j)} = (c_1^j, c_2^j, c_3^j, c_4^j, c_5^j). \quad (25)$$

Система уравнений

$$B_2 \bar{y}^j C^{(j)} = 0, \quad (26)$$

при этом состоит из четырех уравнений относительно пяти неизвестных. Дополнительное уравнение примем в таком же виде, как при шаговом нагружении вдоль кривой множества решений системы [17, 16]. Указанное уравнение выражает тот факт, что вектор  $C^{(j)}$  – единичный:

$$(c^j, c^j) = 1. \quad (27)$$

Решение системы (26) при условии (27) имеет вид

$$c_i^j = \frac{\pm \Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}; \quad c_5^j = \frac{\pm \Delta}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad (28)$$

где  $\Delta_i$  – определители 4-го порядка, которые образуются из основного определителя  $\Delta$  путем замены  $i$ -го столбца столбцом коэффициентов при неизвестном  $c_5^j$  с обратным знаком. Если ранг расширенной матрицы  $B_2$  равен 4, то решение в виде (28) существует независимо от того, равен определитель  $\Delta$  нулю или нет. При критической нагрузке  $\Delta = 0$ , поэтому

$$c_i^j = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}; \quad c_5^j = 0. \quad (29)$$

Из (29) следует, что константа  $c_i^j$  не зависит от изменения значения  $\delta q$ , а система уравнений (26) будет однородной.

Если нагрузка  $q_0$  равна критической, то амплитуда возмущения  $\delta q$  равна нулю. Подтверждается справедливость критерия Эйлера, с одной стороны, а с другой, применение указанного подхода не противоречит традиционной постановке задачи устойчивости. Преимущество использования предлагаемого варианта расчета заключается в том, что упрощается расчет формы выпучивания. Однако возникает вопрос о его применимости в случае совпадения нескольких собственных значений, что соответствует вырождению матрицы, из равенства нулю определителя которой определяется критическая нагрузка. Авторами работы [9] предложены методы решения задач

устойчивости, в которых предусмотрено наличие кратных собственных значений. Что касается задачи рассматриваемого в настоящей работе типа, то возникновение указанной проблемы практически невозможно. Дело в том, что система дифференциальных уравнений распадается при использовании рядов (19) на независимые для каждого значения  $n$ . Минимальные собственные значения некоторых из этих систем могут совпадать, но формы выпучивания будут различны вследствие указанной независимости. При определении закритического поведения рассматриваемых оболочек необходимо учитывать кратность собственных значений.

### 3. Анализ результатов расчета.

Выполним расчет устойчивости стеклопластиковых оболочек, образованных вращением вокруг оси, которая совпадает с осью цилиндра радиуса  $R_0$ , кривой, заданной уравнением (1) в случае  $f(x) = \sin(m\pi x)/L$  и  $f(x)$  в виде (6). Необходимые при расчете модули материала  $E_1, E_2, G_{12}$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1$  определим с помощью известных формул [4] по заданным модулю стекловолокна  $E_a = 70$  ГПа, коэффициенте Пуассона  $\nu_a = 0,2$  и модулю связующего  $E = 3,15$  ГПа, коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,382$ . Объемное содержание волокон  $\xi = 0,7$ , угол армирования  $\theta = 0$ . Радиус цилиндрической оболочки  $R_0 = 1$  м, толщина  $t = 0,01$  м, длина  $L = 2$  м остаются неизменными. Будем варьировать амплитуду  $H$  при некоторых значениях полуволн  $m$  или количестве дуг окружности. Исходная цилиндрическая оболочка теряет устойчивость при  $q_c = 0,094$  МПа в случае только бокового давления и при  $q_c = 0,092$  МПа, если давление действует также на днища. В обоих случаях количество волн в окружном направлении  $n = 7$ .

На рис. 2, 3 приведены графики, иллюстрирующие зависимость критических нагрузок от амплитуды  $H$  для оболочек с синусоидальным ( $m=12$ ) гофрированием и для оболочек, состоящих из 4-х сегментов тора, соответственно. По оси абсцисс отложены значения отношения амплитуды  $H$  к толщине оболочки  $t$ , по оси ординат – отношения критической нагрузки ( $q_c(H)$ ) для гофрированной оболочки с амплитудой гофра  $H$  к критической нагрузке гладкой цилиндрической оболочки  $q_c(0)$ . Прерывистые кривые на обоих рисунках получены при внешнем давлении, действующем на боковую поверхность оболочки, сплошные – при всестороннем. Видно, что между этими кривыми имеется существенное различие, что свидетельствует о степени влияния давления, приложенного к днищам, на критическое значение всестороннего давления. Для гладких цилиндрических оболочек критическое значение всестороннего давления незначительно меньше того, которое действует только на боковую поверхность [6]. При малых значениях амплитуды  $H$  характер кривых на рис. 2, 3 не противоречит этому выводу. С увеличением амплитуды волн чувствительность гофриро-

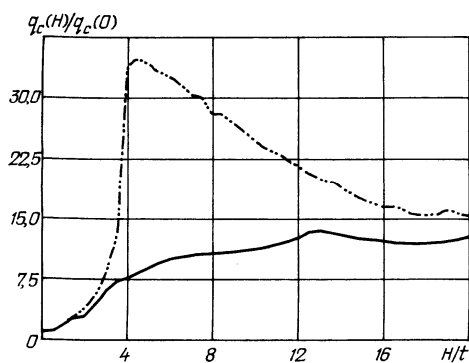


Рис. 2

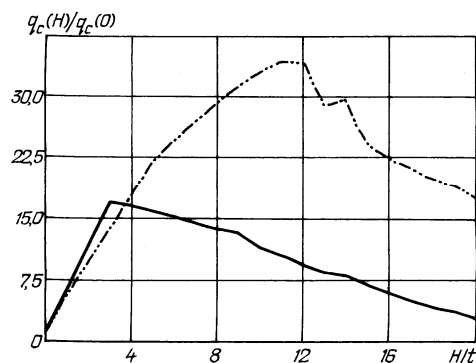


Рис. 3



ванных оболочек к осевому сжатию возрастает. При  $H/t = 4,5$  на рис. 2 и  $H/t = 8$  на рис. 3 значения ординат прерывистых кривых в 2,6 и 2,4 раза больше сплошных кривых, соответственно. Представление о том, как отличаются критические значения интенсивности поверхностного давления в случае действия его только на боковую поверхность  $q_{c,e}$  и когда оно действует также на днища  $q_{c,g}$  во всем рассмотренном диапазоне изменения отношения  $H/t$  дают графики на рис. 4. Из приведенных здесь двух кривых номером 1 обозначена кривая, на которой нанесены значения отношения  $q_{c,g}/q_{c,e}$  для оболочек с синусоидальным гофрированием, номером 2 – для оболочек с профилем гофров в виде дуг окружностей. На кривой 2 начальный участок свидетельствует о том, что при  $0 < H/t < 2$  давление на днища положительно влияет на устойчивости оболочки второго типа. Оболочка, состоящая из сегментов тора, в указанном диапазоне амплитуд при всестороннем давлении будет выдерживать большие нагрузки, чем при только боковом давлении. Для оболочек с синусоидальным гофрированием, если судить по характеру кривой 1, можно отметить, что наличие осевой нагрузки отрицательно влияет на их устойчивость независимо от амплитуды  $H$ .

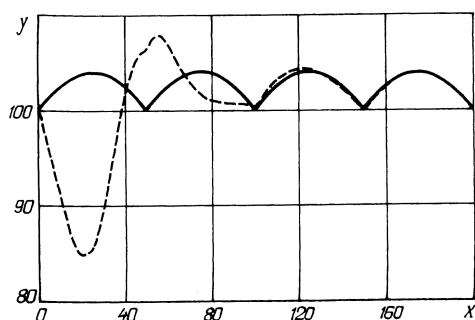


Рис. 5

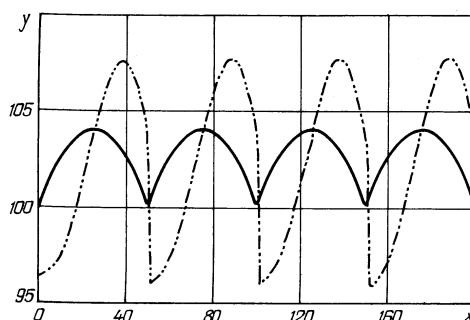


Рис. 6

Отличаются также формы потери устойчивости гофрированных оболочек в зависимости от распределения давления только на боковой поверхности или по всей поверхности, включая днища. На рис. 5 показан вид выпучивания меридиана оболочек с 4-мя гофрами – дугами окружностей при  $H/t = 4$  в случае действия только бокового внешнего давления, а на рис. 6 – при действии всестороннего давления. При боковом давлении прогиб при бифуркации имеет вид волны с максимальной амплитудой возле торца, который закреплен шарнирно-подвижно, затухающий – при приближении к шарнирно-неподвижному краю. Если же на подвижный торец действует осевая нагрузка, то характер прогибов напоминает складывающуюся «гармошку».

#### Выводы.

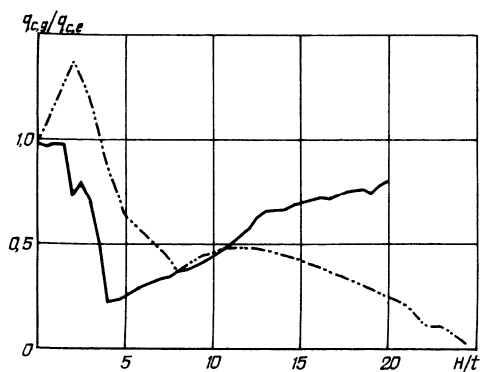


Рис. 4

1. Предложенная в работе [12] процедура решения задач устойчивости поперечно гофрированных оболочек при внешнем давлении обобщена на случай действия всестороннего давления. Основными этапами этой процедуры являются расчет нелинейного осесимметричного докритического состояния и расчет находящейся в этом состоянии оболочки на устойчивость. Особенностью второго этапа является то, что вместо решения однородной краевой задачи решается неоднородная, которая возникает при действии на нагруженную давлением обо-

лочку малого с неизвестной амплитудой возмущения по неосесимметричной форме. Потере устойчивости соответствует нулевая амплитуда возмущения.

2. Применимость процедуры решения расширена на задачи устойчивости оболочек с многообразными видами профилей гофров, геометрическая форма которых может быть аппроксимирована тригонометрическими полиномами.

3. Показано, что гофрированные в поперечном направлении цилиндрические оболочки весьма чувствительны к осевой нагрузке, возникающей вследствие действия на оболочку не только поверхностного бокового давления, но и давления на днища, которыми закрыты торцевые сечения. Если для гладких цилиндрических оболочек критические значения бокового или всестороннего давления практически не различаются, то для гофрированных учет осевой составляющей давления может приводить к снижению критических значений в два-три раза.

4. Практическая ценность полученных результатов заключается не только в подтверждении указанного фактора чувствительности, но и в обнаружении возможности выбора подходящих профилей гофров, с помощью которых можно уменьшить негативное влияние осевой составляющей при действии всестороннего давления.

Р Е З Ю М Е . Викладено методику розв'язання задачі стійкості гофрованих оболонок при рівномірному тиску, який діє на всій поверхні оболонки, включно з торцевими днищами. Визначено критичні навантаження шляхом розв'язання неоднорідної крайової задачі з невідомою амплітудою збурень по ортогональній формі. Показано високу чутливість оболонок, що розглядаються, до осьової складової всестороннього тиску.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. Борисейко А.В., Семенюк Н.П., Трач В.М. О канонических уравнениях геометрически нелинейной теории тонких анизотропных оболочек // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 2. – С. 53 – 63.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука. – 1967. – 608 с.
4. Ванин Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, вып. 3. – С. 171 – 174.
6. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Физматгиз. – 1978. – 360 с.
7. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
8. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 264 с.
9. Гуляев В.М., Баженов В.А., Гоцуляк Б.А. Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255 с.
10. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – К.: Наук. думка, 1990. – 135 с.
11. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Устойчивость некруговых цилиндрических оболочек, поперечное сечение которых образовано дугами окружностей // Доп. НАН України. Сер.А. – 2003. – № 3. – С. 53 – 58.
12. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б., Бабич И.Ю. Устойчивость поперечно гофрированных цилиндрических оболочек при внешнем давлении // Прикл. механика. – 2010. – **46**, N 8. – P. 78 – 89.
13. Феодосьев В.И. Упругие элементы точного приборостроения. – М.: Оборонгиз, 1949. – 344 с.
14. Ross C.T.F. A redesign of the corrugated thin can // Thin-Walled Structures. – 1996. – **26**, issue 3. – P. 179 – 193.
15. Semenyuk N.P., Babich I.Yu. Stability of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells under Uniform Surface Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 11. – P. 1236 – 1247.
16. Semenyuk N.P., Trach V.M., Ostapchuk V.V. Nonlinear Axisymmetric Deformation of Anisotropic Spherical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 10. – P. 1101 – 1111.
17. Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B. Incremental Analysis of the Nonlinear Behavior of Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1025 – 1031.
18. Semenyuk N.P., Zhukova N.B., Ostapchuk V.V. Stability of Corrugated Composite Noncircular Shells under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 12. – P. 1380 – 1389.

Поступила 09.07.2009

Утверждена в печать 15.06.2010