

Л. П. Хорошун, Д. В. Бабич

**УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
ИЗ ЗЕРНИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КОМПОНЕНТОВ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. The statement is done, the technique is represented and the solution is given for the problem on bifurcational stability of shells of revolution made of granular composite materials with allowance for the long-term damage of components

Key words: shell of revolution, granular composite material, bifurcational stability, long-term damage of components.

Введение.

Задачи устойчивости для тонкостенных конструкций с учетом кратковременной повреждаемости материалов рассмотрены в [5 – 10]. Основы структурной теории длительной повреждаемости макрооднородных и зернистых композитных материалов изложены в работах [7, 11]. Особенностью деформирования материалов при длительной повреждаемости является рост во времени макродеформаций при заданных постоянных значениях макронапряжений и снижение макронапряжений при заданных деформациях. Эти явления связаны с изменением с течением времени эффективных упругих характеристик повреждающегося материала. Аналогичные явления наблюдаются в случае ползучести материалов, описываемой теорией старения [1].

В силу формального сходства в описании процессов деформирования материалов при ползучести (вариант теории старения) и длительной повреждаемости при постановке и решении задач устойчивости тел во втором случае целесообразно использовать подходы и понятия, применяемые при исследовании устойчивости тонкостенных конструкций при ползучести [1 – 4].

При ползучести материала понятие «критическое значение нагрузки (напряжения)» теряет определенность, поскольку практически при любом значении нагрузки по истечении определенного времени («критического времени») возможна смена основной формы равновесия тонкостенной конструкции в силу самопроизвольного роста деформаций при постоянном значении нагрузки. Исследование устойчивости тонкостенных конструкций при ползучести, сводящееся к определению критического времени потери устойчивости, проводится с использованием различных вариантов критерия выпучивания [1– 4]. Наиболее предпочтительный из них связан с применением для определения критического времени формул критических напряжений, получаемых путем решения соответствующих задач устойчивости в нелинейно упругой области с использованием касательно-модульной модели (концепция продолжающегося нагружения) [6]. Процедура применения указанного подхода для определения критического времени выпучивания выпуклых оболочек вращения из зернистых композитных материалов при длительно повреждающихся компонентах показана ниже. Поскольку зернистый композитный материал моделируется изотропной однородной средой с некоторыми эффективными параметрами упругости, то при исследовании устойчивости тонкостенных элементов конструкций из такого материала можно вос-

пользоваться уравнениями нейтрального равновесия для пластин и оболочек из однородных изотропных материалов [5, 6].

Целью настоящей работы является постановка и решение задач устойчивости для выпуклых оболочек вращения из зернистых композитов при длительной повреждаемости компонентов материала, приводящей к зависимости нелинейных уравнений состояния от продолжительности нагружения.

Исследование устойчивости оболочек вращения с учетом длительной повреждаемости компонентов зернистого композита проводится в два этапа. На первом этапе с использованием касательно-модульной модели определяются формулы для критических напряжений оболочки, полученные в предположении кратковременной повреждаемости композита. Затем для заданных напряжений, которые отождествляются с критическими напряжениями оболочки из длительно повреждающегося материала, определяются соответствующие значения критического времени с использованием уравнений баланса пористости для длительно повреждающихся компонентов композита. Основанием для такого подхода служит то, что связь между макронапряжениями и макродеформациями в возмущенном состоянии конструкций для материалов при кратковременной и длительной повреждаемости по виду совпадает. Отличие состоит в форме записи уравнений баланса пористости компонентов зернистого композита, в которых отражаются особенности накопления поврежденности с течением времени нагружения.

§1. Постановка задач устойчивости. Основные уравнения.

Основой структурной теории длительной повреждаемости зернистых композитных материалов [7] является представление о неоднородности микропрочности компонентов материала, в результате чего с течением времени при постоянной нагрузке происходят рассеянные разрушения микрообъемов в компонентах композита, где предел микропрочности выше определенной комбинации напряжений, соответствующей тому или иному критерию прочности. Путем замены разрушенных микрообъемов в компонентах композита квазисферическими пораами, приходим к модели изотропного пористого материала стохастической структуры, прогрессирующая повреждаемость которого описывается увеличением пористости во включениях p_1 и матрице p_2 .

Применительно к постановке и решению задач устойчивости оболочек вращения при длительной повреждаемости зернистого композитного материала с объемной концентрацией включений c_1 и матрицы c_2 используются уравнения состояния для случая плоского напряженного состояния, при котором имеют место равенства $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Для зернистого композита с поврежденностью, характеризуемой пористостью включений p_1 и матрицы p_2 , зависимости между макронапряжениями

σ_{ij} и макродеформациями ε_{ij} с учетом равенства $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu^*}{1-\nu^*}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \frac{E^*}{1+\nu^*} \varepsilon_{ij} \quad (i, j, r = 1, 2). \quad (1.1)$$

В (1.1) ν^* , E^* – эффективные секущие характеристики упругости повреждающегося зернистого композита, которые определяются соотношениями

$$E^* = \frac{9K^* \mu^*}{3K^* + \mu^*}; \quad \nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*}, \quad (1.2)$$

где эффективные модули K^* , μ^* через соответствующие модули пористых включений K_{1p} , μ_{1p} и пористой матрицы K_{2p} , μ_{2p} выражаются формулами [11]

$$K^* = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p} - \frac{c_1 c_2 (K_{1p} - K_{2p})^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p} + n_c}; \quad (1.3)$$

$$\mu^* = c_1 \mu_{1p} + c_2 \mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\mu_{1p} - \mu_{2p})^2}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_{1p} + m_c},$$

где приняты обозначения:

$$n_c = \frac{4}{3} \mu_c; \quad m_c = \frac{(9K_c + 8\mu_c) \mu_c}{6(K_c + 2\mu_c)}, \quad (1.4)$$

при этом имеем

$$K_c = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p}; \quad \mu_c = c_1 \mu_{1p} + c_2 \mu_{2p}, \quad (1.5)$$

если жесткость пористой матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$K_c = \frac{K_{1p} K_{2p}}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p}}; \quad \mu_c = \frac{\mu_{1p} \mu_{2p}}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_{1p}} \quad (1.6)$$

– в противном случае.

Эффективные модули пористых включений K_{1p} , μ_{1p} и матрицы K_{2p} , μ_{2p} , согласно [11], определяются формулами

$$K_{ip} = \frac{4K_i \mu_i (1-p_i)^2}{4\mu_i + (3K_i - 4\mu_i) p_i}; \quad \mu_{ip} = \frac{(9K_i + 8\mu_i) \mu_i (1-p_i)^2}{9K_i + 8\mu_i - (3K_i - 4\mu_i) p_i} \quad (i=1, 2). \quad (1.7)$$

В дальнейшем используется также связь между интенсивностями макронапряжений и макродеформаций

$$\bar{I}_\sigma = \sqrt{2/3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}; \quad (1.8)$$

$$\bar{I}_\varepsilon = \sqrt{2/3} \left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 - \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 3\varepsilon_{12}^2 + \frac{\nu^*}{(1-\nu^*)^2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \right]^{1/2}, \quad (1.9)$$

которая имеет вид

$$\bar{I}_\sigma = 2\mu^* \bar{I}_\varepsilon. \quad (1.10)$$

Зависимость между приращениями интенсивностей определяется соотношением

$$d\bar{I}_\sigma = 2\mu_k d\bar{I}_\varepsilon, \quad (1.11)$$

где

$$\mu_k = \mu^* + \bar{I}_\varepsilon \frac{d\mu^*}{d\bar{I}_\varepsilon} \quad (1.12)$$

– касательный модуль сдвига.

Из (1.12) следует приближенное (в пренебрежении зависимостью коэффициента Пуассона от пористости [6]) выражение для касательного модуля упругости

$$E_k = E^* + \bar{I}_\varepsilon \left(\frac{\partial E^*}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \bar{I}_\varepsilon} + \frac{\partial E^*}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial \bar{I}_\varepsilon} \right). \quad (1.13)$$

Уравнения баланса разрушенных микрообъемов или пористости во включениях p_1 и матрице p_2 при длительной повреждаемости для заданных макронапряжений σ_{ij} представляются в виде [11]

$$p_i = p_{0i} + (1-p_{0i}) F_i [I_\sigma^i \Psi_i(\bar{t}_i)], \quad (1.14)$$

где

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \frac{1 + \bar{t}_i^{1/n_i}}{1 + \gamma_i \bar{t}_i^{1/n_i}}. \quad (1.15)$$

В (1.14) также обозначено: p_{0i} – начальная пористость в компонентах композита;

$I_{\bar{\sigma}}^i = (-1)^{i+1} \frac{\mu_{ip}(\mu^* - \mu_{(3-i)p})}{c_i(1-p_i)(\mu_{1p} - \mu_{2p})\mu^*} I_{<\sigma>}$ – второй инвариант девиатора тензора средних

напряжений по неповрежденной части материала i -компонента; $I_{<\sigma>}$ – второй инвариант девиатора тензора макронапряжений; $\bar{t}_i = t / \tau_{0i}$, τ_{0i} – соответственно, безразмерное и некоторое характерное время; показатель n_i и коэффициент γ_i определяются из экспериментальных кривых долговечности i -компонента.

Функцию $F_i(\bar{k}_i)$ предельного значения \bar{k}_i ($\bar{k}_i = I_{\bar{\sigma}} \psi_i(\bar{t}_i)$) для i -компонента можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F_i(\bar{k}_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ \left(\frac{\bar{k}_i - k_{0i}}{k_{li} - k_{0i}} \right)^{\alpha_i}, & k_{0i} \leq \bar{k}_i \leq k_{li}; \\ 1, & \bar{k}_i > k_{li} \end{cases} \quad (1.16)$$

или распределением Вейбулла

$$F_i(\bar{k}_i) = \begin{cases} 0, & \bar{k}_i < k_{0i}; \\ 1 - \exp[-m_i(\bar{k}_i - k_{0i})^{\alpha_i}], & \bar{k}_i \geq k_{0i}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Здесь k_{0i} – минимальная величина предельного значения \bar{k}_i , с которого начинается разрушение в некоторых объемах i -компонента; k_{li} , m_i , α_i – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в i -компоненте.

Понятие критической нагрузки (напряжения) в задачах устойчивости оболочек при длительной повреждаемости зернистого композитного материала, как и в случае ползучести материала, теряет определенность. Смена основной формы равновесия оболочки вращения по истечении некоторого времени возможна при значениях задаваемых макронапряжений σ_{ij}^0 , меньших критического значения для оболочки из сплошного (неповрежденного) зернистого композита. Поэтому в качестве характеристики, определяющей смену основной формы равновесия оболочки, по аналогии с теорией устойчивости при ползучести, вводится понятие критического времени, измеряемое промежутком времени от момента начала нагружения до момента смены основной формы равновесия оболочки. Поскольку повреждающийся зернистый композитный материал моделируется однородной изотропной средой с некоторыми эффективными характеристиками упругости, то для решения задач устойчивости оболочек в этом случае можно воспользоваться уравнениями устойчивости оболочек вращения из повреждающихся однородных изотропных материалов [5]. Уравнения нейтрального равновесия для оболочки вращения при длительной повреждаемости зернистого композитного материала при заданных напряжениях по виду совпадает с таковыми для оболочек из кратковременно повреждающегося материала. Различие состоит лишь в том, что при исследовании устойчивости оболочек из длительно повреждающегося материала параметры основного напряженного состояния задаются, а при

кратковременной повреждаемости – определяются. В случае длительной повреждаемости материала определению подлежит критическое время. Совпадение вида уравнений устойчивости оболочек при кратковременной и длительной повреждаемости является следствием аналогии нелинейных уравнений состояния для рассматриваемых материалов в возмущенном состоянии (1.1).

С учетом изложенного при исследовании бифуркационной устойчивости однородного основного безмоментного напряженного состояния выпуклой оболочки вращения при длительной повреждаемости зернистого композитного материала можно воспользоваться уравнениями вида [5]

$$D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] - \\ -T_{11}^0 w_{,11} - T_{22}^0 w_{,22} - 2T_{12}^0 w_{,12} - h(k_1 \Phi_{,22} + k_2 \Phi_{,11}) = 0; \quad (1.18)$$

$$A_1 \Phi_{,1111} + A_2 \Phi_{,1122} + A_3 \Phi_{,2222} - A_4 \Phi_{,1112} - A_5 \Phi_{,1222} = -Eh(k_1 w_{,22} + k_2 w_{,11}),$$

где

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} / E; \bar{A}_{ij} = EA_{ij}; \quad (1.19)$$

$$a_1 = \bar{a}_{11}; a_2 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} + 2\bar{a}_{33}; a_3 = \bar{a}_{22}; a_4 = \bar{a}_{13} + \bar{a}_{31}; a_5 = \bar{a}_{23} + \bar{a}_{32};$$

$$A_1 = \bar{A}_{22}; A_2 = \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + 2\bar{A}_{33}; A_3 = \bar{A}_{11}; A_4 = \bar{A}_{32} + \bar{A}_{23}; A_5 = \bar{A}_{13} + \bar{A}_{31}.$$

$$a_{11} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2})\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \quad (1.20)$$

$$a_{12} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{11}^0]\sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2})\bar{I}_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{13} = 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{11}^0 \sigma_{12}^0}{(1+\nu^*)\bar{I}_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{21} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2})\bar{I}_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{22} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{11}^0]\sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2})\bar{I}_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{23} = 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{22}^0 \sigma_{12}^0}{(1+\nu^*)\bar{I}_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{31} = \frac{(E_k^* - E_c^*)[(2-\nu_c^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu_c^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{12}^0}{3(1-\nu_c^{*2})\bar{I}_{\sigma^0}^2};$$

$$\begin{aligned}
a_{32} &= \frac{(E_k - E^*)[(2\nu^* - 1)\sigma_{11}^0 + (2 - \nu^*)\sigma_{22}^0]\sigma_{12}^0}{3(1 - \nu^{*2})\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
a_{33} &= \frac{E^*}{1 + \nu^*} + 2(E_k - E^*)\frac{(\sigma_{12}^0)^2}{(1 + \nu^*)\bar{I}_{\sigma^0}^2}. \\
A_{11} &= \frac{1}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^*\sigma_{22}^0)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{3\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{12} &= -\frac{\nu^*}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^*\sigma_{22}^0)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{3\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{13} &= 2\left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^*\sigma_{22}^0)\sigma_{12}^0}{\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{22} &= \frac{1}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^*\sigma_{11}^0)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{3\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{21} &= -\frac{\nu^*}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^*\sigma_{11}^0)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{3\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{23} &= 2\left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^*\sigma_{11}^0)\sigma_{12}^0}{\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{31} &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(1 + \nu^*)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)\sigma_{12}^0}{3\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{32} &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(1 + \nu^*)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)\sigma_{12}^0}{3\bar{I}_{\sigma^0}^2}; \\
A_{33} &= \frac{1 + \nu^*}{E^*} + 2\left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(1 + \nu^*)(\sigma_{12}^0)^2}{\bar{I}_{\sigma^0}^2}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

В (1.18 – 1.21) обозначено: $D = E h^3 / 12$; E – модуль упругости неповрежденного зернистого композитного материала; $T_{ij} = h\sigma_{ij}^0$, \bar{I}_{σ^0} – соответственно, тангенциальные усилия в основном безмоментном напряженном состоянии и интенсивность напряжений в оболочке вращения при основной форме равновесия; Φ – функция напряжений в мембранном напряженном состоянии оболочки; $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$ – главные кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном и окружном направлениях; w – прогиб оболочки.

К уравнениям (1.18) необходимо присоединить краевые условия, соответствующие характеру закрепления торцов оболочки вращения.

§2. Всестороннее равномерное обжатие оболочки.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим местную потерю устойчивости замкнутой оболочки вращения при действии внешнего равномерного давления интенсивности q . В этом случае усилия в основном напряженном состоянии определяются соотношениями

$$T_{11}^0 = h\sigma_{11}^0 = -\frac{qR_2}{2}; \quad T_{22}^0 = h\sigma_{22}^0 = -\frac{qR_2}{2}(2-\chi) \quad \left(\chi = \frac{k_1}{k_2} \right). \quad (2.1)$$

Решение системы уравнений (1.18) представляется в виде [1]

$$w = A \sin(k_2 \lambda x_1) \sin(k_2 n x_2) \quad (\lambda = \chi m), \quad (2.2)$$

где m, n – количество волн в меридиональном и окружном направлениях.

Критическое давление q_* определяется формулой

$$q_* = \frac{2k_2}{1+(2-\chi)\gamma} \left[Dk_2^2 \lambda^2 (a_1 + a_2 \gamma + a_3 \gamma^2)^2 + \frac{Eh(1+\chi)^2}{\lambda^2 (A_1 + A_2 \gamma + A_3 \gamma^2)} \right]. \quad (2.3)$$

При $\gamma = n^2 / \lambda^2 \gg 1$ для определения минимального значения критического давления имеем такое равенство:

$$q_* = \frac{2Eh^2 k_1 k_2^2}{\sqrt{3}(2k_2 - k_1)} \sqrt{\frac{a_3}{A_3}}. \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) k_1, k_2 – некоторые средние значения главных кривизн участков оболочки, ограниченных узловыми линиями локальных форм потери устойчивости. Из бесчисленного множества значений q_* , определяемых формулой (2.4), искомым является минимальное. В случае замкнутых выпуклых оболочек наиболее слабыми в смысле локальной устойчивости участками будут области поверхности оболочки, содержащие касательные к образующей, параллельные либо перпендикулярные к оси вращения. В частности, в эллипсоидальных оболочках такие области расположены на экваторе и в полюсах. Кривизны в полюсах (индекс p) и экваториальных точках (индекс e) в оболочке с полуосями \bar{a} (радиус экватора) и \bar{b} определяются выражениями

$$k_{1p} = \bar{b} / \bar{a}^2, \quad k_{2p} = \bar{b} / \bar{a}^2; \quad k_{1e} = \bar{a} / \bar{b}^2, \quad k_{2e} = 1 / \bar{a}. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.4) с учетом выражений (2.5) следует, что критические значения давления для эллипсоидальных оболочек при внешнем воздействии в зависимости от соотношения полуосей определяются формулами

$$q_* = q_*^0 \cdot \begin{cases} (2\bar{b}^2 / \bar{a}^2 - 1)^{-1}, & \bar{a} < \bar{b}; \\ \bar{b}^2 / \bar{a}^2, & \bar{a} > \bar{b}; \end{cases} \quad q_*^0 = \frac{2h^2 E}{\sqrt{3} \bar{a}^2} \sqrt{\frac{a_3}{A_3}}. \quad (2.6)$$

При $\bar{a} = \bar{b} = R$ из (2.6) с учетом выражений (1.20), (2.21), вычисленных при $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$, следует выражение критического давления для равномерно обжатой сферической оболочки

$$q_* = \frac{2h^2}{\sqrt{3}(1-\nu^{*2})R^2} \sqrt{E_k E^*}. \quad (2.7)$$

Соответствующие критические напряжения определяются соотношением

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^{*2})}R} \sqrt{E_k E^*}. \quad (2.8)$$

В случае неповрежденного ($p_1 = p_2 = 0$) зернистого композита формула (2.8) имеет вид

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \frac{Eh}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R}. \quad (2.9)$$

§3. Числовой пример.

Соотношения (2.6) – (2.8) являются нелинейными выражениями относительно критического времени t . Значения секущих и касательных характеристик упругости при заданных значениях напряжений σ_{ii}^0 ($i=1, 2$) определяются формулами (1.2) – (1.7), (1.13), (1.16), (1.17). При задаваемых значениях напряжений σ_{ii}^0 ($i=1, 2$), отождествляемых с критическими напряжениями, прямое решение нелинейного уравнения типа (2.8) относительно критического времени t для оболочек с заданными параметрами материала и геометрическими размерами осуществляется с помощью итерационных методов. В случаях, когда в процессе нагружения повреждается один из двух компонентов зернистого композита, целесообразно применение обратного способа решения указанного уравнения.

Процедура применения обратного способа решения уравнения (2.8) иллюстрируется на примере определения критического времени для сферической оболочки из зернистого композитного материала при длительной повреждаемости включений ($p_1 \neq 0, p_2 = 0$). Относительная толщина оболочки h/R предполагается заданной. Зависимость значений критического времени от величины критических напряжений определяется с использованием соотношения (2.8), а также уравнения баланса пористости для включений зернистого композита (1.14) и функции долговечности (1.15).

Следует отметить, что потеря устойчивости оболочки при длительной повреждаемости зернистого композита возможна не при всех значениях напряжений, меньших по величине верхнего критического значения для оболочки из неповрежденного материала, определяемого формулой (2.9). Способ определения границ диапазона изменения значений нагрузки в указанном смысле изложен ниже.

Значения постоянных упругости неповрежденных компонентов зернистого композита принимаются равными: $E_1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = 0, 2$; $E_2 = 0, 3 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_2 = 0, 35$. Распределение микропрочности во включениях зернистого композита описывается степенным законом (1.16) с параметрами $k_{11} = 0, 87682 \cdot 10^{10}$ Па; $k_{01} = 0$; $\alpha_1 = 1$. Для определения долговечности используется функция $\psi_1(\bar{t}_1)$ в виде (1.15) с параметрами $n_{11} = 1, \gamma_1 = 0, 01$.

При $p_{01} = 0$ уравнение (1.15) для определения пористости включений композита в рассматриваемом случае имеет вид

$$c_1 p_1 (1-p_1) \frac{\mu^*(\mu_{1p} - \mu_2)}{\mu_{1p}(\mu^* - \mu_2)} = \frac{\sigma_{11}^0 \psi_1(\bar{t}_1)}{\sqrt{3k_{11}}}, \quad (3.1)$$

где σ_{11}^0 – заданное напряжение.

Эффективные касательный и секущий модули упругости зернистого композита на основании (1.13), (1.2) определяются с учетом (1.2) формулами

$$E_k = E^* + \frac{2p_1(1-p_1)(1+\nu^*)(\mu_{1p} - \mu_2) \frac{\partial \mu_{1p}}{\partial p_1}}{(1-2p_1)(\mu_{1p} - \mu_2) + p_1(1-p_1) \left(\frac{\mu_2}{\mu_{1p}} \frac{\partial \mu_{1p}}{\partial p_1} - \frac{(\mu_{1p} - \mu_2)}{(\mu^* - \mu_2)} \frac{\partial \mu^*}{\partial p_1} \right)}; \quad (3.2)$$

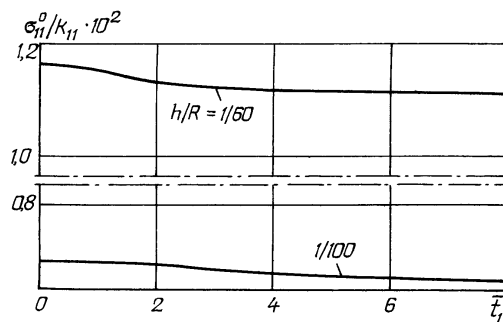
где

$$\frac{\partial \mu_{1p}}{\partial p_1} = -\frac{E_1(1-p_1)}{1+\nu_1}; \quad \frac{\partial \mu^*}{\partial p_1} = c_1 \frac{\partial \mu_{1p}}{\partial p_1} - \frac{2c_1 c_2 (\mu_{1p} - \mu_2)}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_{1p} + m_c} \frac{\partial \mu_{1p}}{\partial p_1} + \frac{c_1 c_2 (\mu_{1p} - \mu_2)^2 \left(c_2 \frac{\partial \mu_{1p}}{\partial p_1} + \frac{\partial m_c}{\partial p_1} \right)}{(c_1 \mu_2 + c_2 \mu_{1p} + m_c)^2}. \quad (3.3)$$

Зависимость критического времени от величины задаваемых напряжений определяется следующим способом. Задается последовательность значений пористости включений p_{1i} ($i=1, 2, 3, \dots$). Затем на основании уравнения (2.8) определяется последовательность значений напряжения $(\sigma_{11}^0)_i$, отождествляемых с критическими напряжениями оболочки в некоторые моменты критического времени \bar{t}_i , соответствующими последовательности p_{1i} ($i=1, 2, 3, \dots$). Далее с учетом уравнения (3.1) вычисляется последовательность значений функции $\psi_{1i}(\bar{t}_i)$, которыми в соответствии с (1.15) определяются значения критического времени \bar{t}_i .

Для рассматриваемой задачи диапазон возможных значений задаваемого напряжения σ_{11}^0 определяется следующим образом. Верхнее значение напряжения σ_{11}^0 связано с мгновенным микроразрушением ($\bar{t}_1 = 0$, $\psi_1(\bar{t}_1) = 1$). Уравнения для вычисления пористости p_1 и соответствующего значения σ_{11}^0 в этом случае вытекают из совокупности соотношений (2.8) и (3.1) при $\psi_1(\bar{t}_1) = 1$. Аналогично вычисляется нижнее значение задаваемых напряжений при условии $\lim_{\bar{t}_1 \rightarrow \infty} \psi_1(\bar{t}_1) = 1/\gamma_1$.

По указанной схеме вычислены значения критического времени для сферических оболочек с относительными толщинами $h/R = 1/60$; $1/100$ при различных допускаемых значениях задаваемых напряжений. Результаты вычисления зависимостей безразмерного параметра критического времени (\bar{t}_1) от безразмерного параметра задаваемых напряжений (σ_{11}^0/k_{11}) для оболочек из зернистого композита с объемными содержаниями компонентов $c_1 = c_2 = 0,5$ представлены на рисунке.



Значения безразмерных параметров критических напряжений для указанных оболочек без учета повреждаемости зернистого композита, соответственно, составляли: $\sigma_{11}^0/k_{11} = 1,16798 \cdot 10^{-2}$; $0,70080 \cdot 10^{-2}$.

Отметим, что в силу совпадения выражений критических напряжений для шарнирно опертой цилиндрической оболочки при осевом сжатии и критических напряжений для замкнутой сферической оболочки при равномерном внешнем давлении кривые длительной потери устойчивости типа изображенных на рисунке совпадают.

Заключение.

Таким образом, в данной работе предложена методика определения критического времени длительной потери устойчивости для оболочек вращения из длительно повреждающихся зернистых композитных материалов. Решена задача о бифуркационной устойчивости для оболочек вращения из длительно повреждающегося зернистого композитного материала при равномерном внешнем давлении. Представлены результаты числового примера и дан их анализ.

РЕЗЮМЕ. Виконано постановку, наведено методику та дано розв'язок задачі про бифуркаційну стійкість оболонок обертання із зернистих композитних матеріалів при врахуванні довготривалої пошкоджуваності компонентів.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963.– 879 с.
2. *Джерард Дж., Гильберт А.* Метод критической деформации для выпучивания пластин и оболочек при ползучести // *Механика. Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.* – 1959. – № 2. – С. 113 – 125.
3. *Хофф Н.* Обзор теорий выпучивания при ползучести // *Механика. Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.* – 1960. – № 1. – С. 63 – 96.
4. *Хофф Н.* Продольный изгиб при ползучести // *Механика. Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы.* – 1956. – № 6. – С. 118 – 134.
5. *Babich D.V., Khoroshun L.P.* Dispersed Damages in Stability Problems for Doubly Curved Shells of Revolution // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 1. – P. 70 – 76.
6. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Problems of Plate Stability in Short – Term Damaging of a Material // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 2. – P. 898 – 905.
7. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 2. – P. 217 – 227.
8. *Khoroshun L.P., Babich D.V., Shikula E.N.* Stability of Plates Made of a Particulate Composite with Non-linear Elastic Matrix and Damaged Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 7. – P. 772 – 779.
9. *Khoroshun L.P., Babich D.V., Shikula E.N.* Stability of Cylindrical Shells Made of a Particulate Composite with Nonlinear Elastic Matrix and Damaged Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 8. – P. 893 – 902.
10. *Khoroshun L.P., Babich D.V., Shikula E.N.* Stability of Coonvex Sells of Revolution Made of a Particulate Composites with Physically Nonlinear Matrix and Damageable Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 6. – P. 653 – 661.
11. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation and Long – Term Damage of Particulate Composites with Stress – Rupture Microstrength Described by a Fractional-Power Function // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1075 – 1083.

Поступила 10.09.2008

Утверждена в печать 15.06.2010