

УДК 532.595

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН В СИСТЕМАХ ПОДАТЛИВЫХ ТРУБОК

Н. Н. КИЗИЛОВА

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Получено 2.06.2002 ◊ Пересмотрено 20.09.2003

Исследовано осесимметричное волновое течение вязкой несжимаемой жидкости в системе, состоящей из длинной тонкой упругодеформируемой трубки и терминального элемента с комплексной проводимостью. Получено выражение для проводимости системы с учетом отражения волн на конце трубки. Исследована зависимость проводимости от геометрических и механических параметров системы. Получено уравнение для определения гармоник, на которых проводимость имеет экстремумы. Показано, что эти гармоники являются резонансными в том смысле, что любые изменения параметров терминального элемента вызывают значительные изменения амплитуд резонансных гармоник. В широком диапазоне, соответствующем артериальным руслам, проведено исследование влияния изменения параметров модели на амплитуду и фазу входной проводимости системы. Обсуждена возможность использования предложенной модели для интерпретации данных пульсовой диагностики.

Досліджено осесиметричну хвильову течію в'язкої нестисливої рідини в системі, яка складається з довгої тонкої пружнодеформованої трубки й термінального елемента з комплексною провідністю. Отримані вирази для провідності системи з урахуванням відбиття хвиль на кінці трубки. Досліджено залежність провідності від геометричних і механічних параметрів системи. Отримано рівняння для визначення гармонік, на яких провідність має екстремуми. Показано, що ці гармоніки є резонансними, тобто будь-які зміни параметрів термінального елемента викликають значні зміни амплітуд резонансних гармонік. У широкому діапазоні, який відповідає артеріальним руслам людини, проведено дослідження впливу зміни параметрів моделі на амплітуду й фазу входної провідності системи. Обговорено можливість використання запропонованої моделі для інтерпретації даних пульсової діагностики.

Axisymmetric wave motion of a viscous incompressible liquid in the system consisting of a long thin elastic tube and a terminal element with a complex conductivity is investigated. The expression for the input conductivity of the system taking into account wave reflection at the end of the tube is obtained. The dependence of conductivity on the geometrical and mechanical parameters of the system is investigated. The equation for calculation of the harmonics for which the conductivity reaches the extreme is obtained. These harmonics are shown to be the resonant ones, i. e., any changes in the terminal conductivity cause significant changes of their amplitudes. The influence of variations of the model's parameters on the amplitude and the phase of the input conductivity is investigated. Possible application of the proposed model for interpretation of data of the pulse diagnosis is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности распространения и отражения волн в заполненных жидкостью трубках из упругих и вязкоупругих материалов широко исследовались в гидромеханике [1–11]. Помимо технических систем, возможные приложения такого рода задач связаны с методиками пульсовой диагностики, имеющими своей целью определение состояния ряда внутренних органов и систем организма по характеристикам пульса некоторых артерий при их специальном поджатии. Существующие методики пульсовой диагностики основаны на эмпирических данных, а их рациональная интерпретация с точки зрения современной гидромеханики кровообращения отсутствует. Особенности распространения и отражения волн в артериях и системах артерий, а также в модельных системах латексных трубок неоднократно исследовались теоретически и экспериментально [1, 3–5, 7].

На обширном эмпирическом материале показано, что линеаризованные модели осесимметричного волнового движения вязкой жидкости в пода-

тливых трубках адекватно описывают большинство обнаруженных экспериментально закономерностей [1–7]. Материал стенки трубки обычно считается линейным вязкоупругим, однородным и изотропным, а трубка – прикрепленной к окружающим тканям, которые допускают ее перемещения в радиальном направлении. Для трубок, у которых $h/R \leq 0.1$ (h – толщина стенки, R – ее внутренний радиус) использование моделей тонкостенных и толстостенных трубок приводит к одинаковым выражениям для величин, характеризующих распространение и отражение волн [1, 2].

Локальные расширения или сужения сосудов, а также любые неоднородности механических свойств их стенок являются источником дополнительных отраженных волн в артериальных системах [1, 3, 7, 8, 10, 11]. Сосудистое русло в целом или русла отдельных внутренних органов часто рассматриваются как упругая трубка с некоторой эффективной длиной и единственным местом отражения пульсовых волн на ее конце [1, 5]. Учет многократных ветвлений сосудов, и следовательно, дополнительных источников отраженных волн

позволяет исследовать особенности распространения пульсовых волн по артериальным руслам с определенной геометрией [3, 4, 10, 11]. Исследован ряд особенностей распространения волн в ветвящихся системах податливых трубок [3, 4, 7, 10, 11], соответствующих строению различных артериальных русел внутренних органов [11, 12].

Спектральные характеристики пульсовой волны могут быть использованы в целях медицинской диагностики [9–11, 13–16]. При исследовании параметров пульса должны учитываться особенности геометрии системы и ее механические свойства [10, 11, 13–16]. Один из методов анализа пульса базируется на наличии у артериальных систем внутренних органов собственных резонансных частот. Это позволяет проводить диагностику, используя только спектральные характеристики пульса периферических артерий [13–15]. Характеристики набора упомянутых частот связаны с характером распространения и отражения волн в сосудистом русле данного органа и определяются геометрией русла [11, 12, 14–16]. Эксперименты и клинические наблюдения показали, что изменения состояния органа вызывают существенное изменение амплитуды одной резонансной частоты при незначительном изменении амплитуд других частот. Например, спектр входного импеданса артериальной системы почек Z , вычисляемый как отношение амплитуд давления P и расхода Q на входе в основную артерию $Z = P/Q$, имеет максимум и минимум для второй и третьей гармоник пульсовой волны соответственно [14]. Аналогичный эффект удается воспроизвести на модели системы кровообращения как эластичной трубки с присоединенными упругими камерами, собственная частота колебаний которых подбиралась в соответствии с резонансными частотами имитируемых органов [13]. Экспериментально обнаружена зависимость амплитудного и фазового спектра отраженной волны от длины основной артерии [15]. Наличие у артериальных русел резонансных свойств отмечалось и ранее, но только в последние годы стала широко обсуждаться возможность применения этих свойств для диагностики.

В данной работе на основе модели волнового течения вязкой жидкости исследуются резонансные свойства модели сосудистого русла, состоящей из деформируемой трубки с терминальным сопротивлением, определяющим условия отражения волн на ее конце. Полученные результаты обсуждаются с точки зрения возможности их практического применения в медицинской диагностике.

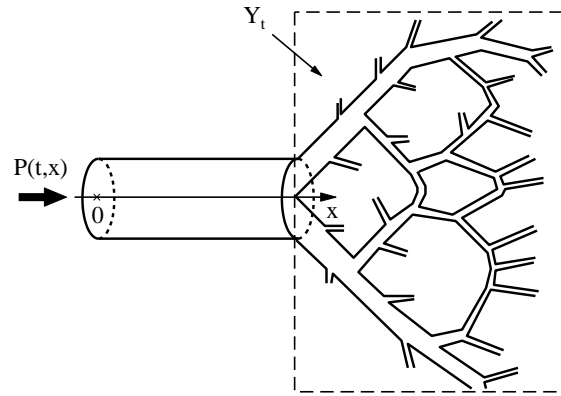


Рис. 1. Модель сосудистого русла

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, состоящую из длинной тонкой трубки кругового сечения, имеющей длину L и радиус $R \ll L$, соединенной последовательно с терминальным элементом с проводимостью Y_t (рис. 1). Система рассматривается как модель артериального русла органа, который включен в общую систему кровообращения. При этом на входе в трубку задается давление $p(t, 0) = P e^{i\omega t}$ ($\omega = 2\pi f$, f – частота), а во входном ее сечении могут быть измерены давление и объемный расход жидкости Q , а также вычислена входная проводимость $Y = (Z)^{-1}$. Проводимость Y_t определяется строением и состоянием сосудистого русла, лежащего вниз по течению, и считается заданной величиной, в общем случае, комплексной. Величина Y_t для терминального сосудистого русла конкретного органа может быть вычислена непосредственно по результатам прямых измерений давления и кровотока.

Исследуем волновое осесимметричное течение однородной несжимаемой жидкости с плотностью ρ и вязкостью μ в трубке, используя линеаризованные уравнения Навье–Стокса в связанной с трубкой цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p – давление; $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$ – скорость течения; $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость. Материал трубки будем считать однородным и изотропным, а для тонкостенной трубки используем уравнения линейной теории осесимметричных оболочек [1, 2]:

$$\begin{aligned} \rho_w h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \left(p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - \\ &\quad - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{u_r}{R^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \\ \rho_w h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \Big|_{r=R} + \\ &\quad + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_r}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ_w , E , σ – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала стенки соответственно; R – внутренний радиус трубки; $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ – перемещение стенки. Приближение тонкостенной трубки может быть использовано для артерий внутренних органов, для которых выполняется условие $h/R \leq 0.1$ [1]. Граничные условия на стенке трубки записываются в виде

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R, \\ v_r &= 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На конце трубки зададим условия непрерывности давления и расхода:

$$p = \frac{q(t)}{Y_t}, \quad Q = q(t) \quad \text{при} \quad x = L, \quad (4)$$

где $q(t)$ – объемный расход во входном сечении терминального русла.

Вводя характерные значения неизвестных задачи (1)–(3) p^* , v_r^* , v_x^* , u_r^* , u_x^* и соответствующие безразмерные величины p° , v_r° , v_x° , u_r° , u_x° , а также безразмерные переменные $t^\circ = t/t^*$, $r^\circ = r/R$, $x^\circ = x/L$, из первого уравнения системы (1) получим $v_r^*/v_x^* \sim R/L \ll 1$. Следовательно, вторыми производными по x в системе (1) можно пренебречь. Теперь оставшиеся два ее уравнения запи-

шем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{St} \frac{R}{L} \frac{\partial v_r^\circ}{\partial t^\circ} &= -\frac{1}{Eu} \frac{\partial p^\circ}{\partial r^\circ} + \\ &\quad + \frac{1}{Re} \frac{R}{L} \left(\frac{\partial^2 v_r^\circ}{\partial r^{\circ 2}} + \frac{1}{r^\circ} \frac{\partial v_r^\circ}{\partial r^\circ} - \frac{v_r^\circ}{r^{\circ 2}} \right), \\ \frac{1}{St} \frac{\partial v_x^\circ}{\partial t^\circ} &= -\frac{1}{Eu} \frac{R}{L} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ} + \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial r^{\circ 2}} + \frac{1}{r^\circ} \frac{\partial v_x^\circ}{\partial r^\circ} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь St , Eu , Re – числа Струхала, Эйлера и Рейнольдса соответственно.

В первом уравнении системы (5) коэффициенты при производных v_r° имеют порядок R^2/L^2 и ими можно пренебречь по сравнению с производной от давления. Поэтому уравнение сводится к соотношению $\partial p^\circ / \partial r^\circ = 0$.

Решение задачи будем искать в виде $f_j = F_j(r) e^{i\omega(t-x/c)}$, где $f_j = \{p, v_r, v_x, u_r, u_x\}$ – вектор неизвестных; $F_j = \{P, V_r, V_x, U_r, U_x\}$ – амплитуды неизвестных; c – скорость распространения пульсовой волны. Подставляя соответствующие выражения для неизвестных, из второго уравнения (5) получим уравнение Бесселя для амплитуды V_x° :

$$\frac{d^2 V_x^\circ}{dr^{\circ 2}} + \frac{1}{r^\circ} \frac{dV_x^\circ}{dr^\circ} - i\omega \frac{Re}{St} V_x^\circ = \frac{Re}{Eu} \frac{R}{L} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ}.$$

Его решение, удовлетворяющее условиям (3), в размерном виде записывается как

$$V_x(r) = \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{J_0(i^{3/2}\alpha r/R)}{J_0(i^{3/2}\alpha)} \right). \quad (6)$$

Здесь J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $W = R\sqrt{\omega\nu}$ – число Уомерсли. Объемный расход Q через сечение трубки с учетом уравнений (5) имеет вид

$$Q = 2\pi \int_0^R u_x r dr = \text{Re} \left(\frac{dp}{dx} \frac{e^{i\omega t} \pi R^2}{i\omega \rho} (1 - F_{01}) \right),$$

где $F_{01} = 2J_1(z)/(zJ_0(z))$ – функция Уомерсли; $z = Wi^{3/2}$; J_1 – функция Бесселя первого порядка. Подставляя уравнение (6) в систему (1), (2), можно обычным способом получить дисперсионное уравнение, решения которого исследовались ранее для моделей тонко- и толстостенных трубок с разными условиями закрепления наружной стенки трубки [1, 2]. При этом было обнаружено существование двух типов волн: волн давле-

ния, распространяющихся в жидкости, и волн Ламе, распространяющихся в стенке трубки. Рассмотрим распространение волн первого типа, которые имеют скорость [1, 2]:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{1 - F_{10}}{1 - \sigma^2}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho R}}. \quad (7)$$

В общем случае c – комплексная величина, которая может быть определена из формулы (7) и записана в виде $c = i\omega/(\alpha + i\beta)$, где $\beta = 2\pi/\lambda$; α – коэффициент затухания волны, связанный с деформируемостью стенки трубки [1]. При $\alpha = 0$, $\beta = \omega/c_0$, выражение (7) переходит в формулу Моэнса – Кортвега: $c = c_0$. В силу зависимости $F_{01}(\omega)$ имеет место дисперсия скорости $c = c(\omega)$ и зависимость проводимости системы от частоты: $Y = Y(\omega)$. Последнее свойство известно из результатов измерений давления и расхода в артериальных системах.

При наличии терминального элемента с проводимостью $Y_t \neq Y_0$, где $Y_0 = S/(\rho c)$, на конце трубки возникает отраженная волна. Здесь Y_0 – характеристическая проводимость трубки, т.е. проводимость при отсутствии отраженной волны. Система (1)–(3) описывает распространение волн давления $p = P e^{i\omega(t-x/c)}$ и расхода $Q = Y_0 P e^{i\omega(t-x/c)}$ вверх и вниз по течению. Исходя из этого, ее общее решение можно записать в виде суперпозиции проходящей и отраженной волн с амплитудами p_0 и p_1 соответственно:

$$\begin{aligned} p(t, x) &= p_0 e^{i\omega(t-x/c)} + p_1 e^{i\omega(t+(x-2L)/c)}, \\ Q(t, x) &= Y_0(p_0 e^{i\omega(t-x/c)} - p_1 e^{i\omega(t+(x-2L)/c)}). \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь входную проводимость системы $Y = Q(t, 0)/p(t, 0)$ можно определить из выражений (8) и условий (4). Учитывая, что $Y_t = q(t)/p(t, L)$, получим

$$Y = Y_0 \frac{1 - \Gamma e^{-2i\omega L/c}}{1 + \Gamma e^{-2i\omega L/c}}, \quad (9)$$

где $\Gamma = p_1/p_0 = (1 - Y_t^\circ)/(1 + Y_t^\circ)$ – коэффициент отражения волны на конце трубки; $Y_t^\circ = Y_t/Y_0$ – безразмерная проводимость терминального элемента.

В общем случае терминальная проводимость имеет вид $Y_t^\circ = Y_1 + iY_2$, где Y_1 и Y_2 связаны с резистивным сопротивлением и податливостью терминального элемента соответственно. Представив безразмерную проводимость системы $Y^\circ = Y/Y_0$ в виде $Y^\circ = y e^{i\psi}$, из уравнения (9) получим выраже-

ния для амплитуды y и фазы ψ :

$$y = \frac{((\zeta^2 - \Gamma_3)^2 \tau_1^2 + 16\zeta^2 B^2)^{1/2}}{(\zeta^2 + \Gamma_3)\tau_1 + 2\zeta((1 - \tau^2)\Gamma_1 - 4\tau\Gamma_2)}, \quad (10)$$

$$\psi = \arctg \left(\frac{4\zeta(\Gamma_1\tau + \Gamma_2(1 - \tau^2))}{(\zeta^2 - \Gamma_3)\tau_1} \right), \quad (11)$$

где

$$\Gamma_1 = (1 - Y_1^2 - Y_2^2)/\delta; \quad \Gamma_2 = 2Y_2/\delta;$$

$$\Gamma_3 = ((1 - Y_1)^2 + Y_2^2)/\delta;$$

$$\alpha = \omega \mathbf{Im}(c)/|c|^2; \quad \beta = \omega \mathbf{Re}(c)/|c|^2;$$

$$|c| = \sqrt{\mathbf{Re}^2(c) + \mathbf{Im}^2(c)};$$

$$\delta = (1 + Y_1)^2 + Y_2^2; \quad B = \tau\Gamma_1 + (1 - \tau^2)\Gamma_2;$$

$$\tau = \text{tg}(\beta L); \quad \tau_1 = 1 + \tau^2; \quad \zeta = e^{2\alpha L}.$$

Величина Y° определяет параметры пульсовой волны, которая отражается сосудистым руслом органа, распространяется по всей системе кровообращения и содержит информацию о состоянии данного органа. В рамках предложенной модели это состояние выражается через параметры $Y_{1,2}$, α , β , E , σ , h , R и L , характеризующие свойства терминального сосудистого русла, геометрию и механические свойства трубки (основной артерии органа).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Для трубки с закрытым концом ($Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$) из выражений (10), (11) получаем

$$\begin{aligned} y &= \frac{((\zeta^2 - 1)^2 \tau_1^2 + 16\tau\zeta^2)^{1/2}}{(\zeta^2 + 1)\tau_1 + 2\zeta(1 - \tau^2)}, \\ \psi &= \arctg \left(\frac{4\tau\zeta}{(\zeta^2 - 1)\tau_1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

При $\mathbf{Im}(c) = 0$ из формулы (12) следует, что $y = \tau$, $\psi = \pm\pi/2$. Это соответствует результатам [1]. Соотношение (12) позволяет исследовать зависимость амплитуды входной проводимости y от коэффициента затухания пульсовой волны α . При $\alpha \rightarrow \infty$ имеем $y(\alpha) \rightarrow 1$, причем при $\alpha > 2$ справедливо $0.95 < y(\alpha) < 1$ – амплитуда близка к единице. Если $|\tau| < 1$, то $0 < y < 1$ и наоборот, если $|\tau| > 1$, то $y > 1$. Таким образом, соотношение между проводимостью системы и характеристической проводимостью трубки определяется параметром τ , что также согласуется с результатами предыдущих исследований [1].

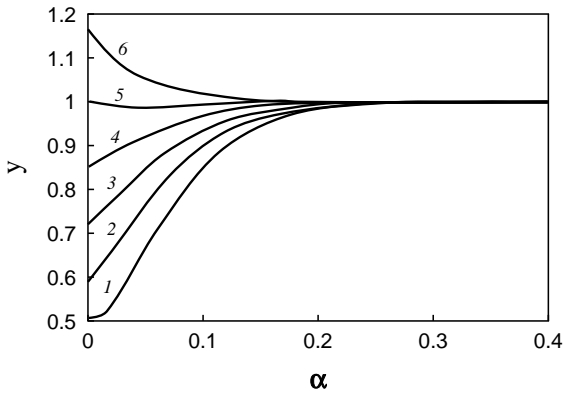


Рис. 2. Зависимости $y(\alpha)$ при $Y_2=0.5$:
1–6 – $Y_1=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

В случае чисто резистивного терминального сопротивления и согласования проводимостей трубки и терминального элемента (приближение длинной трубки, $Y_1=1, Y_2=0$) из формул (10), (11) получаем $y=1, \psi=\pm\pi/2$. Таким образом, при данных условиях проводимость системы совпадает с характеристической при любых значениях параметра α .

В случае достаточно короткой трубки с длиной $L \leq |c|^2/(\omega \text{Re}(c))$ из формул (10), (11) имеем

$$y = \frac{((\zeta^2 - \Gamma_3)^2 + 16\zeta^2\Gamma_2^2)^{1/2}}{\zeta^2 + \Gamma_3 + 2\zeta\Gamma_1}, \quad (13)$$

$$\psi = \arctg \left(\frac{4\zeta\Gamma_2}{\zeta^2 - \Gamma_3} \right).$$

При $\alpha \rightarrow 0$ выражения (13) переходят в известные соотношения [1]:

$$y = (Y_1^2 + Y_2^2)^{1/2}, \quad \psi = \arctg(Y_2/Y_1).$$

При заданных значениях $Y_{1,2}$ с ростом α для амплитуды справедлива тенденция $y(\alpha) \rightarrow 1$. Вид зависимостей $y(\alpha)$ для ряда значений параметра Y_1 при фиксированном Y_2 приведен на рис. 2. Соответствующие характеристики $y(\alpha)$ при фиксированном значении Y_1 и вариациях Y_2 имеют сходный вид. При фиксированных значениях τ функция $y(\alpha)$ аналогична кривым, приведенным на рис. 2. При этом, в зависимости от соотношения между величинами $Y_{1,2}$ и значений τ , амплитуда проводимости системы может стать как меньше, так и больше характеристической проводимости трубки. Используя выражение (10), получаем, что $y > 1$, если выполняются следующие условия:

$$\Gamma_1 < 0, \quad \beta L \in [\pi n, \pi/2 + \pi n]$$

или

$$\Gamma_1 > 0, \quad \beta L \in [\pi/2 + \pi n, \pi(n+1)],$$

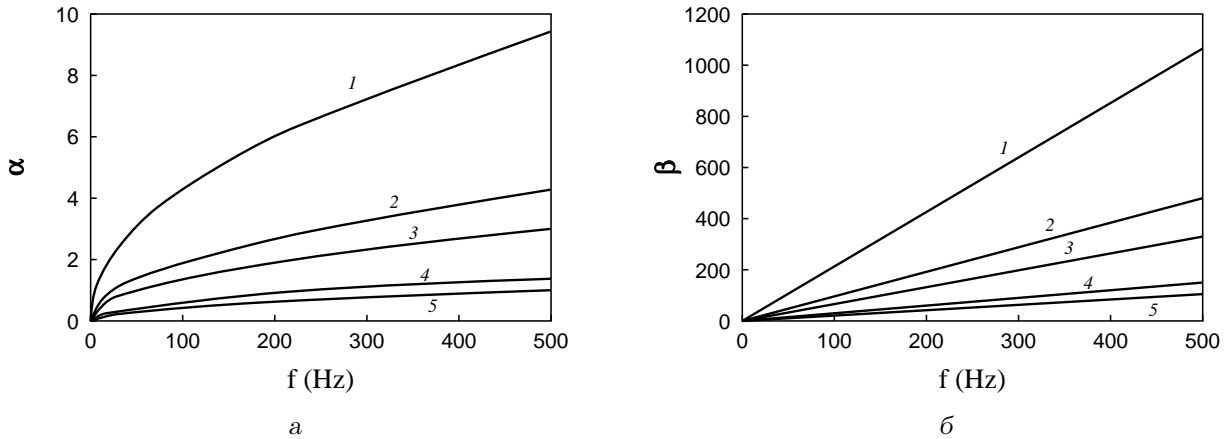
где $n \in Z$. Для чисто резистивного ($Y_2=0$) терминального элемента и $Y_1=0$ формулы (10), (11) переходят при $\alpha=0$ в соотношения, рассматривавшиеся ранее (см. [1]).

Исследуем зависимость входящих в формулы (10), (11) величин α и β от параметров системы, которые входят в соотношения (7). Для E, σ, μ, R и h выберем диапазоны, соответствующие их физиологическим вариациям в сосудистой системе человека: $E=5 \cdot (10^5 \div 10^7)$ Па, $\sigma=0.2 \div 0.4, \mu=(3 \div 10) \cdot 10^{-3}$ Па·с, $R=0.1 \div 5$ мм, $h=0.01 \div 0.5$ мм, принимая во внимание первоначальное допущение модели $h/R \leq 0.1$. Результаты исследования показали, что при фиксированной частоте ω значения α монотонно увеличиваются с ростом μ и монотонно убывают с ростом остальных параметров. Наиболее значительное влияние на коэффициент затухания пульсовой волны α оказывают изменения диаметра и толщины трубки (при этом в диапазоне частот $f=0 \div 512$ Гц величина α увеличивается в 8.2 и 3.4 раза соответственно) и изменение модуля упругости стенки трубки (α увеличивается в 1.9 раза). При этом $\alpha(\omega) \sim \sqrt{\omega}$, а $\beta(\omega) \sim \omega$.

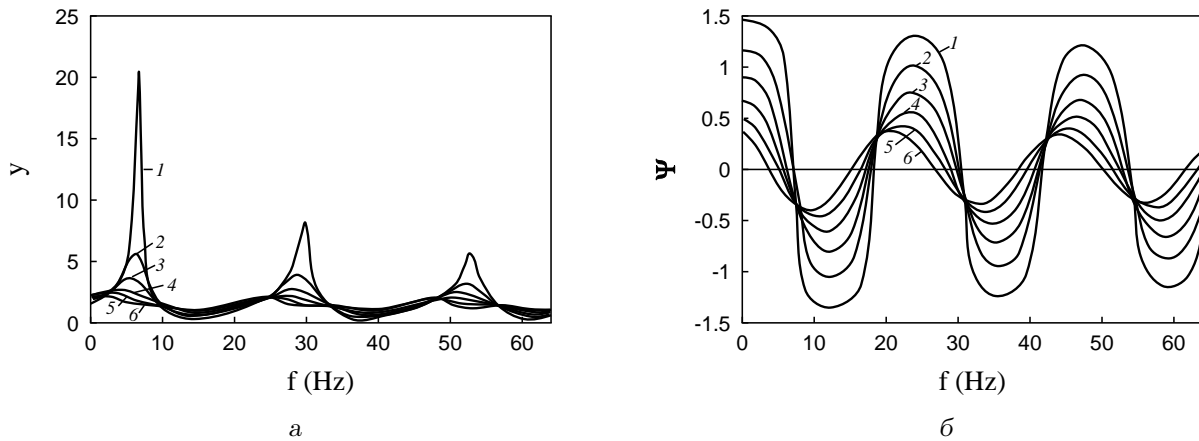
Частотные зависимости $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ приведены на рис. 3. В исследованном диапазоне частот при вариации геометрических и механических параметров трубки и вязкости крови коэффициент затухания пульсовой волны составляет $\alpha \leq 9.27 \text{ м}^{-1}$. Стоит заметить, что при различных патологиях изменения параметров сосудистой стенки часто происходят согласованно. Это обстоятельство должно быть учтено для более детальных оценок возможных диапазонов значений параметра α . Так, следует ожидать значительного роста α при патологиях, связанных с увеличением податливости сосудистой стенки, при аневризмах сосудов и отеке тканей. В норме влияние параметра α на амплитуду и фазу проводимости системы связано также с длиной трубки. По данным [13, 15] величина L сильно влияет на резонансные свойства входной проводимости сосудистого русла.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Поскольку предложенная в [13–15] новая методика пульсовой диагностики связана с наличием у входной проводимости резонансных частот, исследуем зависимости $y(\omega) = y(\alpha(\omega)L, \tau(\omega))$,


 Рис. 3. Частотные зависимости при фиксированных значениях σ , μ , R , h :

а – для $\alpha(\omega)$, б – для $\beta(\omega)$;
 1–5 – $E = 5 \cdot 10^5, 10^6, 5 \cdot 10^6, 10^7, 5 \cdot 10^7$ Па


 Рис. 4. Частотные зависимости при $Y_2 = 0.5$, $L = 20$ см, $R = 0.5$ см, $h = 0.5$ мм,

$E = 10^6$ Па, $\sigma = 0.3$, $\mu = 4.5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 1.05$ г/см³:

а – для $y(f)$, б – для $\psi(f)$;
 1–6 – $Y_1 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

$\psi(\omega) = \psi(\alpha(\omega)L, \tau(\omega))$, используя базовые выражения (10), (11). Из условия $y'_\omega = 0$ можно получить трансцендентное уравнение для определения резонансных частот вида

$$y'_\alpha \alpha'_\omega + y'_\beta \beta'_\omega = 0, \quad (14)$$

которое не приводится здесь полностью в силу своей громоздкости. Исследование корней уравнения (14) при различных параметрах модели показало, что значения ω , на которых $y(\omega)$ достигает экстремума, зависят от длины трубки, а амплитуды проводимости в точках экстремума определяются параметрами терминального русла $Y_{1,2}$. С ростом частоты амплитуда проводимости в точках миниму-

ма монотонно убывает (рис. 4, а), что связано с наблюдающимся при этом увеличением коэффициента затухания волн (рис. 3, а). С ростом резистивной части терминальной проводимости Y_1 и снижением ее податливости Y_2 максимальные амплитуды входной проводимости снижаются (рис. 4, а). В точках, соответствующих максимумам амплитуды проводимости, фаза проводимости меняет знак. Эта особенность была исследована нами ранее для ветвящихся артериальных русел с анастомозами [16]. Именно это свойство входной проводимости делает возможным анализ пульсовых кривых в тех случаях, когда за счет патологического повышения значений Y_1 или уменьшения Y_2

выделение отдельных максимумов на кривых $y(f)$ становится затруднительным (см., например, кривые 5, 6 на рис. 4, а).

Особый интерес представляет исследование свойств входной проводимости при вариации тех параметров модели, которые соответствуют патологическим изменениям кровообращения в рассматриваемом органе. Эти изменения могут быть разнообразными, но в рамках данной модели они определяются только двумя параметрами – $Y_{1,2}$. Большая степень детализации может быть достигнута при моделировании терминального элемента Y_t системой податливых трубок (артерий) с определенной геометрией ветвлений [3, 7, 11]. На рис. 5 представлены результаты исследования влияния параметров $Y_{1,2}$ на амплитуду входной проводимости $y(n)$, где n – номер гармоники в ее Фурье-спектре. В качестве основной выбрана частота $f_0 = 1$ Гц, соответствующая средней частоте сердечных сокращений взрослого здорового субъекта в состоянии покоя. Для приведенных на рис. 5 кривых длина основной артерии $L = 10$ см определяет набор резонансных гармоник модели, соответствующих $n = 6, 8, 10$. Изменения величины Y_1 ведут к значительному изменению входной проводимости системы на $n = 6$ при разных значениях Y_2 . В то же время, вариации податливости терминального элемента заметно изменяют амплитуду второй резонансной гармоники $n = 8$. Детальные расчеты показали, что изменения механических свойств трубки E и σ существенно изменяют амплитуду резонансной третьей гармоники $n = 10$, практически не вызывая изменений проводимости в области других резонансных частот. Фазовый спектр входной проводимости во всех случаях обладает свойством, отмеченным выше: в области резонансных гармоник происходит изменение знака фазы $\psi(n)$. Это свойство способствует точному определению набора резонансных гармоник даже в тех случаях, когда вследствие патологических изменений параметров системы амплитуды входной проводимости выражены слабо [16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование модели артериального русла внутреннего органа показало, что входная проводимость, которая может быть рассчитана по результатам измерений колебаний давления и расхода во входном сечении основной артерии органа, обладает набором резонансных частот. На резонансных частотах амплитуда входной проводимости достигает максимальных значений. Набор резонансных частот определяется геометрией модели, причем

в большей степени длиной основной артерии органа. Учитывая, что “калибр” артерии определяет размеры лежащего вниз по течению артериального русла, которое в модели рассматривается как терминальный элемент с комплексной проводимостью, можно считать, что резонансные частоты определяются геометрией артериального русла в целом [11]. При этом изменения состояния терминального русла, связанные с его резистивными свойствами и податливостью стенок, приводят к значительным изменениям амплитуды резонансных гармоник и незначительным изменениям амплитуд остальных гармоник.

Так как все внутренние органы включены в общую систему кровообращения, то отражение пульсовой волны во входном сечении основной артерии соответствующего органа должно привести к появлению в магистральных периферических артериях отраженной пульсовой волны, параметры которой будут определяться состоянием кровообращения в данном органе. Эти параметры в наибольшей степени сказываются на амплитудах соответствующих резонансных частот, которые в силу различия длин и механических свойств артерий разных органов будут различными. Это делает возможным проведение неинвазивной диагностики состояния внутренних органов по параметрам пульса произвольной периферической артерии. При этом, если проводимость русла внутреннего органа патологически повышена (понижена), то в спектре кривых давления амплитуда соответствующих органу резонансных гармоник будет соответственно ниже (выше) нормы. Следовательно, регистрация пульсовых кривых на периферической артерии и анализ их спектра могут выявить изменения, связанные с патологией отдельных внутренних органов.

Следует отметить, что резонансные свойства ветвящихся артериальных русел изучались ранее экспериментально и теоретически [1, 3], однако после появления результатов клинических исследований [13–15] детальная разработка соответствующих диагностических методик и теоретических моделей стали особенно актуальны.

1. *Milnor W. R.* Hemodynamics.– Baltimore: Williams–Wilkins, 1989.– 419 p.
2. *Cox R. H.* Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis // *J. Biomech.*– 1969.– 2, N 3.– P. 251–265.
3. *Taylor M. G.* The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes // *Biophys. J.*– 1966.– 6, N 1.– P. 29–51.
4. *Avolio A. P.* Multi-branched model of the human arterial system // *Med. Biol. Engng Comput.*– 1980.– 18, N 6.– P. 709–718.

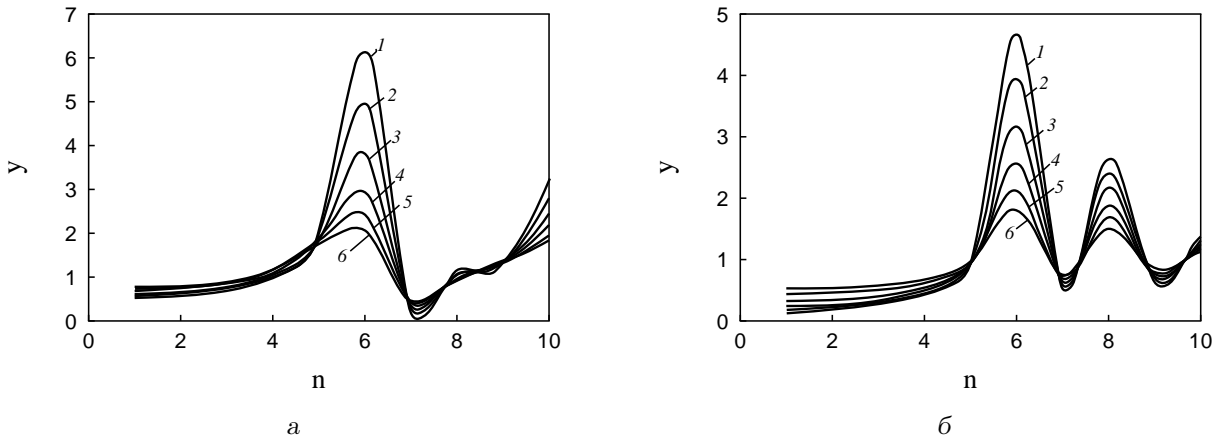


Рис. 5. Зависимости $y(n)$:
 а – для $Y_2 = 0.5$, б – для $Y_2 = 0.1$;
 1–6 – $Y_1 = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

5. Campbell K. B., Lee L. C., Frasch H. F., Noordergraaf A. Pulse reflection sites and effective length of the arterial system // *Amer. J. Physiol.*– 1989.– **256**, N 6.– P. H1684–H1689.
6. Reuderink P. J., Hoogstraten H. W., Sipkema P. et al Linear and nonlinear one-dimensional models of pulse wave transmission at high Womersley numbers // *J. Biomech.*– 1989.– **22**, N 8/9.– P. 819–827.
7. Brown D. J. Input impedance and reflection coefficient in fractal-like models of asymmetrically branching compliant tubes // *IEEE Trans. Biomed. Engng.*– 1996.– **43**, N 7.– P. 715–722.
8. Селезов И. Т., Каплун Ю. М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // *Бионика.*– 1991.– **24**.– С. 50–54.
9. Моисеева И. Н., Регирер С. А. Некоторые особенности отражения пульсовых волн в артериях // *Изв. АН СССР. МЖГ.*– 1983.– N 4.– С. 134–139.
10. Бойчук И. П., Кизилова Н. Н. Отражение волн и анализ пульса лучевой артерии // *Тез. докл. V Всерос. конф. по биомеханике.*– Нижний Новгород, 2000.– С. 10.
11. Bondarenko M. Ye., Kizilova N. N. Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks // *Russian J. Biomech.*– 2002.– **6**, N 4.– P. 52–62.
12. Dawson Ch. A., Krenz G. S., Karau K. L. et al Structure-function relationships in the pulmonary arterial tree // *J. Appl. Physiol.*– 1999.– **86**, N 2.– P. 569–583.
13. Wang Y. Y., Chang S. L., Wu Y. E. et al Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics // *Circ. Resch.*– 1991.– **69**, N 1.– P. 246–249.
14. Yu G. L., Wang Y. L., Wang W. K. Resonance in the kidney system of rats // *Amer. J. Physiol.*– 1994.– **267**, N 4 Pt 2.– P. H1544–H1548.
15. Wang Y. Y., Lia W. C., Hsiu H., Jan M. Y., Wang W. K. Effect of length on the fundamental resonance frequency of arterial models having radial dilatation // *IEEE Trans. Biomed. Engng.*– 2000.– **47**, N 3.– P. 313–318.
16. Кизилова Н. Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных систем // *Тез. докл. IV междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях.*– Санкт-Петербург, 2002.– С. 257–259.