Сафонова Н. В.

ЧТО ИЗУЧАЕТ МАТЕМАТИКА?

“Выяснение природы математики относится не к математике, а к философии, и возможно только в рамках широких философских воззрений, понимающих математику не в отрыве от остальной науки, а учитывающих ее происхождение из естествознания, применение в связи с другими науками и, наконец, ее историю” (Мостовский)[i].

При исследовании любой науки, как-то: физики, биологии, филологии, истории и т. д., нам не составит труда ответить на вопрос, каков предмет этих дисциплин. Но в математике мы неожиданно сталкиваемся с трудностью, которая возрастает тем более, чем больше усилий мы прилагаем для решения этого вопроса. Происходит это вследствие специфики рода занятий математики. Математика уже давно не черпает свои идеи из человеческого опыта. Причем отрыв от эмпирической базы настолько силен, что вопрос о предмете математики вырастает в сложную проблему.

На первый взгляд, все очень просто. В математической энциклопедии мы можем прочитать: “Математика - наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира”[ii]. Но ни один математик не согласится с таким узким (с точки зрения логики, определение слишком узкое, так как не охватывает всего предмета занятий математики) определением математики. Уже с середины XIX века математики замечают, что эта наука изучает не только количественные отношения и пространственные формы.

“Сущность математики, - говорил Буль в 1854 году, - не состоит в том, чтобы заниматься идеями числа и величины”[iii]. Г. Грассман, подобно Булю, настаивает на том, что “название науки о величинах не подходит к совокупности математических дисциплин”[iv]. Г. Ганкель в 1867 году утверждал, что математика “имеет своим предметом не совокупность величин или их образов- чисел, но мысленных вещей (“Gedankending”), которым могут соответствовать действительные объекты или отношения, хотя такое соответствие необязательно”[v].

К началу XX века наметилась тенденция создания единой математики, в основание которой была положена теория действительных чисел. Основой для этого послужил постулат Георга Кантора о существовании бесконечного множества на отрезке. Казалось бы, после того, как математика обрела логическую завершенность, вопрос о предмете математики должен был проясниться, однако этого не случилось.

Я бы даже сказала, что нет другой такой темы, в которой математики до сих пор не только не пришли к единому мнению, но даже противоречат сами себе.

Первое противоречие. Отрыв от эмпирической базы настолько силен, что математики (эти любители строгости и ясности) не хотят связывать взгляды на природу математики с областью своих занятий. “Никакой руководитель исследовательских работ какой-либо промышленной компании не станет интересоваться метафизическими воззрениями поступающего к нему на работу математика. Между такого рода воззрениями и действиями, в которых заинтересован руководитель, не усматривается никакой связи. В поисках решения какой-либо конкретной системы дифференциальных уравнений все математики мирно объединяются, что не мешает им яростно спорить за чашкой чаю о “природе математики””[vi].

Вот ярчайший тому пример. Остается только удивляться, как члены группы Бурбаки, немало способствовавшие формализму математики, могли всерьез полагать, что “каковы бы ни были философские оттенки, в которые понятие математических объектов окрашивалось у того или иного математика или философа, имеется по крайней мере один пункт, в котором они единодушны: это то, что эти объекты нам даны и не в нашей власти приписывать им произвольные свойства так же, как физик не может изменить какое-либо природное явление. Правду сказать, составной частью этих воззрений, несомненно, являются реакции психологического порядка, в которые нам не следует углубляться, но которые хорошо знакомы каждому математику, когда он впустую тратит силы, стараясь поймать доказательство, беспрестанно, как ему кажется, ускользающее”[vii].

Второе противоречие. Занимаясь одной и той же математикой, сами математики видят в ней различный предмет. Судите сами.

Возьмем, например, следующее признание Эрмита: “Я полагаю, что числа и функции Анализа не являются произвольным сознанием нашего ума; я думаю, что они существуют вне нас с такой же необходимостью, как и предметы объективной реальности, и мы их встречаем или открываем и изучаем их так же, как физики, химики, зоологи”[viii].

А вот другое мнение: "Современная математика изучает конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики"[ix].

Джеймс Джинс в своей книге “Загадочная Вселенная” выражает другую точку зрения: “Самый важный факт состоит в том, что все рисуемые наукой картины природы, которые только могут находиться в согласии с данными наблюдений, - картины математические… Природа, по-видимому, очень “хорошо осведомлена” о правилах чистой математики”[x]. М. Клайн в конце XX века всерьез утверждает: "Математика и физическая реальность неразделимы"[xi].

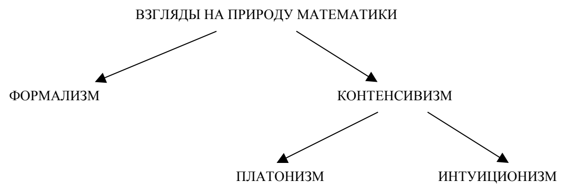
Как разобраться в таком количестве мнений о предмете математики и какое из них ближе к истине? Чтобы выпутаться из всех этих несуразностей, предложим классифицировать мнения и ввести новую терминологию.

Прекрасно эту работу выполнил известный логик Хаскелл Б. Карри в статье “Природа математики”: “Различные точки зрения на природу математики делятся на две основные группы. Мы будем называть их контенсивизмом и формализмом. Согласно контенсивизму, математика имеет определенный предмет, определенное содержание; объекты, фигурирующие в математических утверждениях, считающихся в математическом обиходе понятными, -

числа, множества, отношения, функции и т. д., - в каком-то смысле существуют, и математические утверждения истинны как раз в той степени, в какой они согласуются с фактами. С точки же зрения формализма, математика характеризуется скорее своим методом изучения; ее объекты или не определяются, или если и определяются, то таковы, что подлинная их природа несущественна, так что замена одних категорий объектов на другие может и не повлиять на истинность теории. Мы должны, например, отнести к формализму любую точку зрения, согласно которой математика имеет дело с символами, ибо, хотя символику можно и фиксировать, никто не станет утверждать, что существенным является выбор конкретной символики. В противоположность этому для контенсивизма характерно признание определенности математических объектов.

Контенсивизм можно далее разделить на две основные линии. Представители одной из них, известной под именем платонизма (Платон в диалоге “Менон” утверждал, что математические конструкции не зависят от опыта и даже предшествуют ему; Карри, в свою очередь замечает, что этот термин впервые применил Бернайс[xii]; к тому же в философии и в философии математики этот термин имеет различные значения – Н. С.), утверждают, по сути дела, что понятия числа и множества существуют в действительности (независимо от нашего знания о них) и что классическая математика, хотя и нуждается в более серьезном обосновании, на самом деле не является ненадежной, получила название “платонизма”. Другие контенсивисты, напротив, считают, что в математике есть нечто гнилое и что значительную часть классического анализа нужно отбросить. Эту разновидность уместно назвать критическим контенсивизмом. Главенствующая в настоящее время разновидность критического контенсивизма называется интуиционизмом"[xiii].

Наглядной иллюстрацией к данной классификации послужит таблица:



Теперь остается рассмотреть все “за и против” каждого направления.

В отношении платонизма картина достаточно ясна. К концу Х1Х века этого взгляда придерживались практически все математики. Как иронично замечает Карри, “вероятно, платонизм - это тот взгляд, которого более или менее подсознательно придерживаются большинство математиков, не занимающихся специально вопросами обоснования. Это также позиция пионеров математической логики Фреге и Рассела; ее и сегодня защищают некоторые выдающиеся логики”[xiv].

Дело в том, что развитие математики в тот момент было таково, что родиться другому мнению время еще не пришло. Отсюда и возникла путаница, о которой говорилось ранее - по существу математики уже занимались развитием формализованных теорий, но, чтобы сформировать представление о том, что изучает математика, необходимо было обозреть всю математику в целом (а она только создавалась).

Время суеверий закончилось и для математиков. На сегодняшний день “по общему мнению, единственным убежденным платоником среди современных философов математики является Пенелопа Мэдди”. (Рецензия С. Строголова в реферативном журнале 13. Математика. Выпуск свободного тома. №3 М., 1993 г. (3А1К.)). В своей работе [xv] “Автор ставит своей целью показать, что натурализм как философское течение имеет право на существование в философии математики”.

Думаю, что, несмотря на столь героические попытки Пенелопы Мэдди, платонизм себя изжил и существовать в философии математики может лишь в качестве исторического факта.

Решая вопрос о правоте формальной или интуиционистской точек зрения на предмет математики, мы неизбежно приходим к старой распре двух течений, возникших в начале XX века и возглавляемых Давидом Гильбертом и Лейтзеном Эгбертом Яном Брауэром. Речь идет о формальной и интуиционистской математике.

К середине XX века позиции формальной математики значительно укрепились вследствие огромных успехов в математике. Позиции же интуиционистской математики значительно ослабли.

Коротко определим сущность той и другой математик.

Формальная математика характеризуется следующим. В ее основу положен аксиоматический метод, известный нам еще со времен Евклида. Суть аксиоматического метода состоит в том, что, первое, мы должны зафиксировать несколько недоказуемых утверждений (особенностью этих утверждений является то, что им вовсе не обязательно иметь какую-то связь с реальным миром. Отсюда и второе название аксиоматического метода – формальный), а также должны оговорить правила логического вывода, которыми мы будем пользоваться при построении своей модели. Далее, с помощью этих утверждений (аксиом) и правил логического вывода уже будем строить необходимую математическую теорию. Аксиоматический метод в математике оказался весьма эффективным. Благодаря внедрению аксиоматического метода математические структуры значительно разрослись, многие из них оказались полезными.

С оппозицией к обеспредмечиванию математики (а формальную математику можно рассматривать именно так, и мы покажем это ниже) выступили интуиционисты (главой которых, как уже говорилось, стал Л. Я. Брауэр). Представим коротко основные положения, характеризующие интуиционизм:

1. Первоисточником и началом математической мысли является интуиция времени. Эта интуиция порождает способность различать два момента; процесс же последовательного различения отдельных моментов приводит к представлению о натуральном ряде. Идея Канта об априорном характере понятия времени, почерпнутом

человеком из самого себя, является правильной.

2. “Существующими” можно считать только те объекты, которые конструируются человеческим разумом[xvi].

Несмотря на то, что математике была возвращена эмпирическая база, концепция, выдвинутая Брауэром, не получила должного развития, так как технически была очень слаба и невразумительно прописана (о недостатках доктрины Брауэра см. у Френкеля и Бар-Хиллел[xvii]).

Однако идеи, отстаиваемые Брауэром, сыграли свою более чем положительную роль. На основе принципа конструктивности Брауэра (у нас см. положение 2) была построена новая математика, которая получила название конструктивной. (“Постулат конструктивности – допускается только существование предметов, могущих быть определенным способом построенными”[xviii]).

Конструктивная математика получила свое развитие благодаря развитию двух школ – Сколема, с его понятием рекурсивных функций, особенно после того, как Гудстейну[xix] удалось на основе его идей построить математический анализ, и Маркова (в его теории вместо рекурсивных функций употребляются алгорифмы). Отметим, что и в том, и в другом случае используется идея пошагового конечного построения.

Итак, к концу XX века мы имеем две конкурирующие между собой математики. Первая из них – формальная, ее еще называют классической, так как она общеизвестна и общепринята; вторая – конструктивная, ее достижения получили широкое развитие в компьютерной технике.

Каков же предмет этих двух математик?

Что изучает формальная математика? Она изучает символы. На эту идею меня натолкнула статья Г. Вейля “О символизме математики” [xx] . "Для Брауэра символы, принадлежа, подобно словам, языку, являются лишь вспомогательными средствами для представления и передачи математических положений и мыслей. Для Гильберта символы (согласно удачному высказыванию Гильберта, впоследствии превратившемуся в анекдот о формальной математике, Гильберт, требуя полной абстрактности математики, говорил, что, нужно сделать так, чтобы “при замене слов “точка”, “прямая” и “плоскость” словами “стол”, “стул” и “пивная кружка”, в геометрии не могло ничего измениться"[xxi] – Н. С.), хотя они и ничего не значат - или даже именно поэтому, являются субстанцией математики"[xxii]. Согласившись, что математика изучает символы, (а это довольно-таки прозрачно), мы получаем новую проблему: что означают математические символы? "Всегда остается проблема толкования" [xxiii]. Но в настоящее время мы имеем дело с аксиоматизированной математикой, и, следовательно, вслед за Гильбертом будем утверждать, что символы ничего не значат, так как любому символу мы свободны приписывать какое угодно значение или не наделять его значением вовсе. Это первая половина правды.

Вторую идею находим у А. Пуанкаре. “Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения”[xxiv]. На основе этих двух идей делаем вывод: математика изучает не просто символы, а отношения между ними, причем минимальную их часть она закрепляет аксиоматически, (например, a+b=b+a – закон коммутативности), а остальные получает с помощью логического вывода. Я не одинока в своем мнении: “Математика – эта наука о специальных логических структурах, называемых математическими структурами, у которых описаны определенные *отношения между элементами*”[xxv]. (В своей работе автор справедливо отмечет, что для полной строгости определения он должен раскрыть понятия логической структуры и элементов, но не делает этого, по причине того, что это чрезмерно усложнит его книгу, написанную в научно-популярном жанре).

Теперь можно сформулировать вполне обоснованный вывод.

Так как формальная математика изучает *отношения*, (минимальная часть которых закреплена аксиомами, а остальные мы получаем с помощью логического вывода), между ничего не значащими (“пустыми”) символами, следовательно, в современной классической математике *нет эмпирической базы.*

Можно возразить, что эмпиричны законы счета сами по себе (это действительно так). Следовательно, можно сделать поспешный вывод, что эмпирична арифметика, лежащая в качестве фундамента для всей формальной математики, а значит, мы имеем налицо эмпирическую базу в нашей математике. Но было уже сказано, что аксиомы в классической математике задаются без всякой ссылки на опыт. Частным случаем этих аксиом будут правила счета с натуральными числами, и тогда арифметика ничего общего с эмпирической базой не имеет.

Итак, в основах классической математики нет эмпирической базы – и это уже дает нам повод говорить о кризисе в математике.

Отсутствие эмпирической базы для любой науки грозит катастрофой. Это не замедлило сказаться и на математике. Во-первых, автоматически поднимается вопрос о ее полезности. В последнее время большинство математиков высказывают мнение о бесполезности математики. Вследствие значительного разрастания математических структур и невозможности применения их в реальной жизни математику стали отождествлять с игрой по некоторым правилам. Во-вторых, оказалось, что некоторые проблемы в математике принципиально неразрешимы (например, гипотеза континуума).

Наша позиция заключается в следующем. В настоящее время классическая математика находится в двусмысленном положении. С одной стороны, раздаются утверждения самих математиков о бесполезности нашей науки, оторванности ее от реальной жизни. С другой стороны, эта математика “работает”. Например, такая “умозрительная” область математики как “основания математики”, оказалась применима к другим наукам. "Вряд ли кто мог предположить в начале нашего века, когда зарождалась математическая логика, и даже в 30-40-е годы, в пору ее расцвета, что эта чисто теоретическая дисциплина, относящаяся скорее к области “философии математики”, найдет практическое применение. И тем не менее это произошло уже в 50-е годы… а в 70-е годы появился даже термин “вычислительная логика”[xxvi]. Классическая математика является общепризнанной, полезной, к тому же это ее преподают в школе, в вузах.

Обратим внимание: в то время, когда точка зрения о бесполезности классической математики становится преобладающей, все больше проявляется примечательная тенденция: во многих высших учебных заведениях абитуриенты сдают вступительный экзамен по математике на факультеты, где этот предмет вовсе не является профилирующим. (Так, "в Канаде на будущее давались такие рекомендации: "На разных ступенях нашего общества, в том числе в университетах, в сфере бизнеса, в промышленности, в соответствующих департаментах федерального правительства и местных органах власти, необходимо приложить определенные усилия, направленные на более эффективное развитие математики и подготовку специалистов, владеющих математикой"" [xxvii]). Почему? - Да потому, что затребованы молодые люди, лучше других умеющие оперировать с символами, а этим как раз характеризуются "математические способности".

Роль символического мышления для человечества еще до конца не определена. Мы полностью согласны с Г. Ноаком: "Способность к пониманию символов, возникающую вместе с формированием языка, можно считать решающим шагом, который вывел человека из животной жизни"[xxviii].

Математика дала нам богатейший аппарат - методы работы с символами. Мы можем закодировать любой объект с помощью символа. А в символической форме нам гораздо проще решать любую задачу практического характера. Именно по этой причине классическая математика применима во всех науках, (конечно, в большей или меньшей степени). И это уже неоспоримый довод в ее пользу.

Однако многие математики не были удовлетворены таким двойственным положением науки и предприняли попытку вернуть математике эмпирическую базу. Эта попытка удалась. В настоящее время мы обладаем конструктивной математикой, которая, несомненно, эмпирическую базу имеет.

Это отчетливо видно из определения натурального числа, которое дает А. А. Марков, который, как уже было сказано на страницах нашей работы, возглавил конструктивное направление в отечественной математике: "Простым примером конструктивного процесса является построение ряда вертикальных черточек (||||||) путем писания одной такой черточки, приписывания к ней справа и слева ее копии – другой черточки, приписывания к полученным черточкам еще одной черточки, затем еще одной черточки, затем еще одной и еще одной. Результатом этого конструктивного процесса является конструктивный объект, изображенный шестью строками выше. Сам этот конструктивный объект представляет собой материальное тело, состоящее из бумаги и засохших чернил, а приведенный выше рисунок есть состоящая из бумаги и засохшей типографской краски копия этого конструктивного объекта. Она тоже есть конструктивный объект, поскольку изготовление копии можно считать конструктивным актом.

Ряды вертикальных черточек вроде нашего рисунка, включая и "пустой" ряд, в состав которого не входит ни одна черточка (его можно представить в виде чистого листа бумаги), мы будем называть натуральными числами. Веденные таким образом натуральные числа суть конструктивные объекты"[xxix].

Было бы логически верным объявить конструктивную математику единственно правильным путем выхода математической науки из кризиса. Однако мы категорически возражаем против таких настроений, и вот почему.

Классическая математика сама себе "вырыла яму", преследуя цель быть единственной абсолютно надежной математикой. В погоне за созданием единой науки с общим фундаментом (таким фундаментом в классической математике является теория множеств) формальная математика растеряла всю свою эмпирическую базу. Если в конструктивной математике, так же как и в классической, мы будем видеть единственно верную науку, то не исключено, что мы снова зайдем в тупик, но с другими трудностями.

Осознание того факта, что существует несколько математик, неожиданно для нашего мировоззрения. Впервые убеждение в невозможности создания единственной математики высказал Освальд Шпенглер (1880 – 1936). В своем главном сочинении "Закат Европы" (1918 – 1922) он пишет: "… существует несколько математик. Несомненно, архитектоническая система Евклидовой геометрии совершенно отличается от картезианской, анализ Архимеда нечто совершенно иное, чем анализ Гаусса, не только по языку форм, целям и приемам, но по своей сути, по первоначальному феномену числа, научное развитие которого они представляют"[xxx].

Вывод о существовании "многих математик" Шпенглер делает на основании того, что "стиль каждой возникающей математики зависит… от того, в какой культуре она коренится и какие люди о ней размышляют"[xxxi].

Отрицая существование единственной всеобщей математики, Шпенглер так определяет место современной математики: "Наша математика, которую мы в странном ослеплении считаем математикой вообще, вершиной и целью двухтысячелетнего развития, но жизнь которой строго ограничена назначенными ей столетиями, также близится к своему окончанию"[xxxii].

Один из самых оригинальных мыслителей нашего века Людвиг Витгенштейн (1889 – 1951) также не раз высказывал мысль, что "математика – не просто создание человеческого разума, она испытывает на себе сильное влияние тех культур, в рамках которых развивается. Математические "истины" зависят от людей ничуть не меньше, чем восприятие цвета или английский язык"[xxxiii].

Витгенштейн приходит к этому выводу с другой стороны. Великолепный математик, занимаясь проблемами основания математики, он приходит к мысли, что затея найти надежное основание математики нереальна. "Математические проблемы того, что называют основаниями математики, составляют ее основание не в большей мере, чем нарисованная скала – основание нарисованной башни"[xxxiv]. (Время написания примерно с 1941 по 1944 гг.).

Итак, оба философа делают один и тот же вывод о существовании "многих математик". Один как знаток истории и культуры, другой - как прекрасный математик и логик.

Таким образом, восприняв факт множественности математик, мы должны рассматривать две математики (конструктивную и классическую) как союзников, а не конкурентов. Задачи, которые мы ставим перед обеими математиками – служение благу человека. Не нужно решать, какая из математик более "правильная" или полезная. Решение проблем такого рода бессмысленно и бесполезно. Да и почему вообще мы вообразили, что математика должна быть единственной? - Потому, что единственна логика нашего мышления, возразят мне читатели. Но и это убеждение оказалось мифом. Гениальный отечественный математик Андрей Андреевич Марков писал: "В самой идее не единственности логики, разумеется, нет ничего удивительного. В самом деле, с какой стати все наши рассуждения, о чем бы мы ни рассуждали, должны управляться одними и теми же законами? Для этого нет никаких оснований. Удивительно было бы, наоборот, если бы логика была единственна"[xxxv].

Итак, выяснив предмет обеих математик, свою философскую задачу мы видим в том, чтобы уберечь математиков от бесплодных попыток поиска единственной и правильной математики. Осознание этого факта направит ученых в нужное русло решения проблем, необходимых человеку.

---

[i] Мостовский А. Современное состояние исследований по основаниям математики. // Успехи математических наук. – М., 1954. - Т. IX, - Вып. 3 (61). - С. 36.

[ii] Математическая энциклопедия. / Под ред. Виноградова И. М. - М., 1982. - Т. 3. - С. 560.

[iii] Бурбаки Н. Теория множеств. - М., 1965. - С. 319.

[iv] Там же. - С. 320.

[v] Там же. - С. 321.

[vi] Френкель А.А. Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. - М., 1966. - С. 197 – 198.

[vii] Бурбаки Н. Теория множеств. - М., 1965. - С. 317.

[viii] Там же. - С. 317.

[ix] Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. – М., 1983. - С. 14.

[x] Клайн М. Математика. Поиск истины. - М., 1988. - С. 231.

[xi] Там же. - С. 254.

[xii] Bernays P. Sur le platonisme dans les mathematiques, Enseignement Mat., 34 (1935-1936). - 52-69.

[xiii] Карри Х. Основания математической логики. - М., 1989. - С. 27 – 29.

[xiv] Там же. - С. 28.

[xv] Maddy P. // Abstr. 9th Int. Congr. Log., Methodol. and Phil. Sci., Uppsala, Aug/ 7-14, 1991. Vol. 2. Sec 6-9 - [Uppsala], [1991]. - C. 2.

[xvi] Мадер В. В. Введение в методологию математики: (Гносеологический, методологический и мировоззренческий аспекты математики. Математика и теория познания). - М., 1994. - С. 327 – 328.

[xvii] Френкель А.А. Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. - М., 1966. - С. 247 – 259.

[xviii] Мостовский А. Современное состояние исследований по основаниям математики. // Успехи математических наук. – М., 1954. - Т. IX, - Вып. 3 (61). - С. 21.

[xix] Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. - М., 1970.

[xx] Вейль Г. Математическое мышление. - М., 1989.

[xxi] Бурбаки Н. Теория множеств. - М.,1965. - С. 32.

[xxii] Вейль Г. Математическое мышление. - М., 1989. - С. 64.

[xxiii] Там же. - С. 57.

[xxiv] Пуанкаре А. О науке. - М., 1990. - С. 26.

[xxv] Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание. - М., 1980. - С. 51.

[xxvi] Математическая логика в программировании. Сб. статей. - М., 1991. - С. 331 – 332.

[xxvii] Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание. - М., 1980. - С. 50.

[xxviii] Noac H. Symbol und Existenz der Wissenschaft. - Halle: Saale, 1936. - P. 97.

[xxix] Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. - М., 1984. - С. 23.

[xxx] Шпенглер О. Закат Европы. Очерки морфологии мировой истории. Образ и действительность. – Минск, 1998. - Т. 1. - С. 96.

[xxxi] Там же. - С. 97.

[xxxii] Там же. - С. 104.

[xxxiii] Клайн М. Математика. Поиск истины. - М., 1988. - С. 250.

[xxxiv] Витгенштейн Л. Философские работы. - М., 1994. - Часть II. - С. 180.

[xxxv] Марков. А. А. Элементы математической логики. - М., 1984. - С. 14.