

УДК 534.3+611.539

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛЯ ТЕЧІЇ І АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ У ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ЛОКАЛЬНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ЗВУЖЕННЯМ. ЧАСТИНА 1. ТЕОРІЯ

А. О. БОРИСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 21.04.2004

Розроблено аналітично-чисельний метод розв'язування задач генерації звуку течіями в каналах з локальними геометричними неоднорідностями. У рамках запропонованого підходу знайдені поля гідродинамічних параметрів використовуються для опису джерел звуку, а для визначення поля течії й акустичного поля застосовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а також кореляційно-спектральний аналіз. Розв'язано задачу генерації звуку стаціонарною течією в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням. Отримано аналітичні вирази для розрахунку гідродинамічних і акустичних характеристик течії.

Разработан аналитически-численный метод решения задач генерации звука течениями в каналах с локальными геометрическими неоднородностями. В рамках предложенного подхода найденные поля гидродинамических параметров используются для описания источников звука, а для определения поля течения и акустического поля применяются методы функций Грина и собственных функций, а также корреляционно-спектральный анализ. Решена задача генерации звука стационарным течением в бесконечном прямом жесткостенном канале кругового поперечного сечения с локальным осесимметричным сужением. Получены аналитические выражения для расчета гидродинамических и акустических характеристик течения.

The analytical and numerical method is developed for solving the problems of noise generation by flows in channels with local geometrical inhomogeneities. Within the limits of proposed approach the obtained fields of hydrodynamic parameters are used to describe the noise sources, and the Green's function technique and the eigen-function method, as well as the correlation and spectral analysis are used to determine the the flow and acoustic fields. The problem of noise generation by steady flow in an infinite straight rigid channel with circular cross-section and local axisymmetric narrowing is solved. The analytical expressions for hydrodynamic and acoustic characteristics of the flow are obtained.

ВСТУП

Дослідження течій в каналах різних геометрій є актуальною задачею в автомобіле- та літакобудуванні, нафтогазовій промисловості, архітектурі, медицині, тощо. Значний інтерес тут становлять збурення течій і поява акустичних ефектів у місцях локальних неоднорідностей каналів, таких як налипання на стінках, зварювальні шви, стенози. Пояснюється він тим, що генероване вторинне акустичне поле містить дані про параметри каналу й середовища у зоні виникнення шумів, а отже існує можливість створення неінвазивних методів знаходження неоднорідностей на основі аналізу звукового поля [1–4].

Розробка згаданих методів може проводитись за наявності теорій, які, адекватно описуючи механізми генерації та проходження звуку від джерела до приймача, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками акустичного поля й параметрами каналу і течії в ньому. В свою чергу, створення таких теорій передбачає існування достовір-

ної інформації про структуру і властивості гідродинамічних і акустичних полів у каналах з локальними неоднорідностями, а також про фактори, що їх визначають [2, 3, 5–8].

Як показує аналіз наукової літератури, вивченню гідродинамічних полів за неоднорідностями у вигляді звужень різних форм, а також згенерованих збуреною течією акустичних полів у каналах приділялася значна увага. Зокрема, дослідження гідродинамічних полів виявили існування областей збуреної за звуженням течії та її стабілізації і переходу до стану, який існував перед звуженням [2–8]. На початку ж регіону збурення, як правило, спостерігається відрив потоку у вигляді струменя і зворотний рух (між струменем і стінкою каналу). Швидкість течії на осі каналу в зоні збурення залишається практично такою, як і у звуженні [2, 3, 6, 9, 10]. Поле ж пульсацій тиску в цій зоні характеризується різким зростанням амплітуд. При цьому максимального значення пульсації тиску досягають перед точкою приєднання струменя [2–6, 9–11]. Існують також наближені

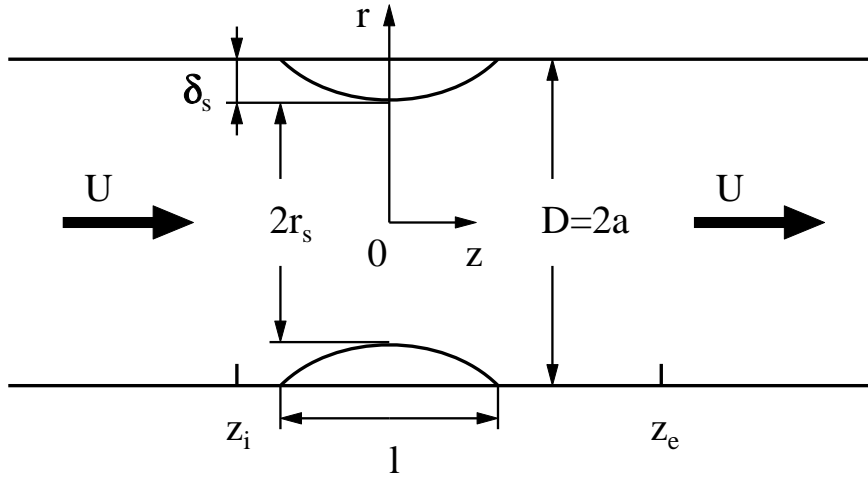


Рис. 1. Геометрія задачі

оцінки для розмірів областей відривної та збуреної течій, відстані від локального звуження каналу до точки максимуму пульсацій пристінного тиску і значення тиску в цій точці [6, 9–11].

Вивчення спектральних характеристик полів пульсацій швидкості й тиску [2, 3, 6, 9–13] дозволило отримати загальний вигляд цих характеристик і з'ясувати якісну залежність їхніх рівнів від числа Рейнольдса течії, ступеня і довжини геометричної неоднорідності каналу. Крім цього, у частотних спектрах було виявлено локальні максимуми і встановлено їхній зв'язок із вихоровими утвореннями у збуреній за неоднорідністю течії.

Дослідження акустичних полів, створених течіями у каналах з локальними змінами геометрії [2, 3, 7, 8, 14–18], дали можливість встановити залежність рівнів акустичного поля від параметрів течії, каналу і звуження, а також пов'язати локальні особливості спектральних кривих (нахил і максимуми) з вихоровими структурами у збуреній течії. Важливим досягненням стало виявлення характерних акустичних ознак наявності локального звуження у каналі [7, 8].

Було також розроблено теорію генерації звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі [19–21], яка встановлює кількісний зв'язок між характеристиками акустичного поля та параметрами каналу й потоку. В цій теорії збурена течія моделюється розподіленими у зайнятій нею області об'ємними квадрупольями. Також враховується вплив стінки каналу, яка спричиняє появу поверхневих диполів. При цьому розглядаються випадки рівномірного й нерівномірного розподілу джерел, а їхні характе-

ристики вважаються відомими.

Проведений огляд наукової літератури засвідчує, що, будучи взаємозв'язаними, гідродинамічні й акустичні поля у каналах з локальними змінами геометрії вивчалися практично незалежно одне від одного. Робіт, в яких ці поля досліджуються разом, дуже мало (див., наприклад, [22]), а отримані у них дані малоінформативні. З огляду на це, виникає потреба розроблення підходів до спільного вивчення вказаних полів з метою отримання повнішої і достовірнішої інформації про їхню структуру і властивості.

Один з можливих підходів розробляється в цьому дослідженні на прикладі зв'язаної задачі генерації звуку течією у нескінченному прямому жорсткостінному каналі з локальним осесиметричним звуженням. Тут знайдені поля гідродинамічних параметрів використовуються для опису джерел звуку, а для знаходження поля течії та акустичного поля застосовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а також методи кореляційно-спектрального аналізу. Отримані при цьому результати добре узгоджуються з відомими літературними даними.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіуса a (рис. 1) з локальним осесиметричним звуженням довжини l , яке описується функцією $r_s(z) = a - \delta_s \cos(\pi z/l)$ ($\delta_s < a$, $-l/2 < z < l/2$). У каналі з осередненою осью швидкістю U тече рідина, яка має густину ρ і в'язкість ν . Течія хара-

ктеризується малим числом Маха $M \ll 1$. Звуження збурює течію, і вона створює в каналі акустичне поле. Необхідно дослідити поле збуреної течії й акустичне поле, а також встановити зв'язок між їхніми характеристиками та параметрами звуження, каналу й незбуреного потоку.

Згідно з класичною теорією Лайтхіла [18, 23], можна без втрати загальності вважати, що:

- в'язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області збуреної течії;
- згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі.

За цих умов сформульовану задачу можна розбити на гідродинамічну й акустичну частини, які зв'язані між собою через гідродинамічні джерела звуку [18, 23].

1.1. Гідродинамічна частина задачі

Рух рідини у каналі описується рівняннями нерозривності [24]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial y_i} = 0 \quad (1)$$

і кількості руху:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial y_i}(\rho u_i u_j + p_{ij}) = 0, \quad (2)$$

де $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор швидкості рідини; p_{ij} – тензор напружень, який визначається співвідношеннями

$$p_{ij} = p\delta_{ij} + \tau_{ij} = p\delta_{ij} - \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial y_k} \delta_{ij} \right];$$

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \mu \epsilon_{kk} \delta_{ij} - 2\mu \epsilon_{ij};$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right).$$

Тут τ_{ij} – тензор дотичних напружень; ϵ_{ij} – тензор швидкостей деформації; p – тиск; μ – динамічна в'язкість рідини; δ_{ij} – символ Кронекера. Крім цього, тут і далі передбачається сумування по індексах, що повторюються.

Граничними умовами для системи рівнянь (1), (2) є наявність параболічного профілю швидкості перед і за областю збуреної звуження течії [24–26], а також рівність нулеві швидкості течії \vec{u} на стінці каналу. Початкові ж умови полягають у відсутності руху рідини в момент часу $t = 0$.

1.2. Акустична частина задачі

Акустичне поле в каналі описується рівнянням Лайтхіла [18, 20, 21, 23, 27], у якому права частина містить як об'ємні квадрупольні $(\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j)$, так і зумовлені наявністю стінки поверхневі дипольні $(\partial F_i / \partial y_i)$ гідродинамічні джерела:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}. \quad (3)$$

Граничними умовами є рівність нулеві нормальній компоненті акустичної швидкості $\partial p_a / \partial \vec{n}$ на стінці каналу й умова випромінювання у нескінченність. Початкову умову для рівняння (3) складає відсутність акустичного випромінювання в момент часу $t = 0$.

У рівнянні (3) і умовах для нього ρ_a і p_a – акустичні флуктуації густини й тиску [19–22], які зв'язані співвідношенням

$$p_a = c_0^2 \rho_a. \quad (4)$$

Окрім того, c_0 – швидкість звуку в незбуреному середовищі; $T_{ij} \approx \rho u_i u_j$ і $F_i = n_j (\tau_{ij} + p\delta_{ij})$ – напруження Лайтхіла та i -та компонента прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі (T_{ij} і F_i зникають за межами об'єму збуреної звуження течії та поверхні, яка його обмежує, відповідно); n_j – j -та компонента зовнішньої нормалі \vec{n} до стінки каналу.

2. ПОЛЕ ТЕЧІЇ І АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ

Відповідно до сформульованих у попередньому розділі початково-граничних задач, процес розв'язування розбивається на дві частини. Спочатку визначається поле гідродинамічних параметрів в області збуреної звуження течії. Потім воно використовується для описання гідродинамічних джерел звуку при знаходженні акустичного поля в каналі. Для розв'язування задачі вибирається циліндрична система координат (r, ϕ, z) (див. рис. 1).

2.1. Поле течії в каналі

При знаходженні параметрів течії вважається, що вона осесиметрична:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \quad u_\phi = 0.$$

Зазначене твердження ґрунтується на результатах експериментальних досліджень [2–6, 9], в яких показано, що течію у трубі за осесиметричними звуженнями різних форм можна у першому наближенні вважати осесиметричною. Можлива ж

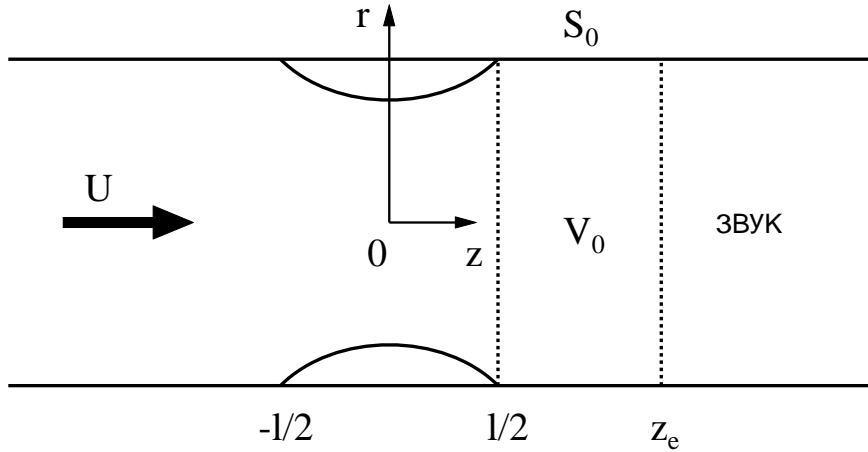


Рис. 2. Деталізація геометрії задачі

асиметрія течії у скінченній області безпосередньо за звуженням несуттєва для трактування результатів даної роботи. Це пояснюється тим, що несесиметричність течії в досліджуваному регіоні формується дрібномасштабними вихоровими структурами, які характеризуються малою енергонасиченістю та високими частотами. Інформація про них відображена у високочастотній області спектрів пульсацій пристінного тиску й акустичної енергії, в якій, зазвичай, домінує навколишній шум [6–8, 17], а отже ніякої корисної інформації про течію (зокрема, про її можливе відхилення від осесиметричності) знайти практично неможливо.

Окрім того, рідина вважається нестисливою: $\rho = \rho_0$ (тут ρ_0 – густина незбуреного середовища). Це припущення зумовлене малим значенням числа Маха.

2.1.1. Поле швидкості

Система рівнянь (1), (2) розв’язується через введення функції течії $\Psi(r, z, t)$:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

і завихореності $\vec{\Omega}(r, z, t) = \text{rot}(\vec{u})$, яка у випадку осесиметричної течії має лише одну компоненту:

$$\vec{\Omega} = \vec{e}_z \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (6)$$

де \vec{e}_z – вектор дотичної до стінки в окружному напрямку. Тоді, з урахуванням формули (5), рівняння нерозривності (1) задовольняється тотожно, а співвідношення (2) і (6) дають систему зв’язаних

диференційних рівнянь відносно функцій $\Psi(r, z, t)$ і $\Omega(r, z, t)$ [22, 28]:

$$\nabla_{(r,z)}^2 \Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \Omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u_r \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \Omega)}{\partial z} = \nu \left(\nabla_{(r,z)}^2 \Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right), \quad (8)$$

де

$$\nabla_{(r,z)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

оператор Лапласа осесиметричної задачі [29], а $\nu = \mu / \rho_0$.

Система рівнянь (7), (8) розв’язується чисельно по часу в контрольному об’ємі V_0 (рис. 2):

$$z_i \leq z \leq z_e, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R(z),$$

$$R(z) = \begin{cases} r_s(z), & |z| < l/2, \\ a, & |z| \geq l/2, \end{cases}$$

який співпадає з областю збуреної звуженням течії. Його вхідний переріз $z = z_i$ вибирається перед звуженням, де течія ще не збурена, а вихідний $z = z_e$ – за звуженням, де течія вже не збурена (тобто там, де збурення практично зникає, і течія стає такою, якою була перед входом у контрольний об’єм).

Початковими умовами для системи рівнянь (7), (8) є відсутність течії і завихореності в момент часу $t = 0$:

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad \Omega|_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Наявність параболічного профілю швидкості на вході $z = z_i$ і виході $z = z_e$ контрольного об'єму [24–26],

$$\begin{aligned} u_r|_{z=z_i, z_e} &= 0, \\ u_z|_{z=z_i, z_e} &= 2U \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

дає такі граничні умови для функцій Ψ і Ω :

$$\begin{aligned} \Psi|_{z=z_i, z_e} &= Ur^2 \left(\frac{r^2}{2a^2} - 1 \right), \\ \Omega|_{z=z_i, z_e} &= \frac{4Ur}{a^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Відсутність швидкості течії на стінці каналу

$$u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z = u_n \vec{n} + u_\tau \vec{\tau} = \vec{u}|_{r=R(z)} = 0 \quad (12)$$

накладає інші граничні умови на Ψ та Ω . Так, з рівності нулевій нормальної компоненти швидкості u_n на основі першого співвідношення у формулах (5) впливає постійність функції $\Psi(r, z, t)$ уздовж стінки каналу:

$$\Psi|_{r=R(z)} = \text{const.}$$

Звідси, з урахуванням виразів (11), отримуємо:

$$\Psi|_{r=R(z)} = \Psi|_{r=a} = -\frac{Ua^2}{2}. \quad (13)$$

Відсутність тангенційної компоненти швидкості рідини u_τ спричиняє рівність нулевій нормальної похідної першого порядку та змішаної похідної другого порядку від функції $\Psi(r, z, t)$ при $r = R(z)$ [28]:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=R(z)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \right|_{r=R(z)} = 0.$$

Ці умови разом з рівнянням (7) дають значення завихореності на стінці каналу:

$$\Omega|_{r=R(z)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}. \quad (14)$$

На осі ж каналу з умови симетрії отримуємо

$$\Psi|_{r=0} = \text{const}, \quad \Omega|_{r=0} = \text{const},$$

звідки, з урахуванням співвідношень (11), впливає

$$\Psi|_{r=0} = 0, \quad \Omega|_{r=0} = 0. \quad (15)$$

2.1.2. Гідродинамічний тиск p

Знайдене у підрозділі 2.1.1 поле швидкостей u_r і u_z (воно визначається зі співвідношень (5) після розв'язання системи (7), (8)) дозволяє знайти поле гідродинамічного тиску $p(r, z, t)$ у збуреній за звуженням течії:

$$l/2 \leq z \leq z_e, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a$$

(див. рис. 2; вибір області $l/2 \leq z \leq z_e$ замість контрольного об'єму $z_i \leq z \leq z_e$ буде обгрунтовано у розділі 2.2 при знаходженні акустичного поля у каналі). Для цього рівняння кількості руху (2) перепишемо у вигляді рівняння Пуассона:

$$\nabla_{(r,z)}^2 p(r, z, t) = -s(r, z, t), \quad (16)$$

в якому права частина має вигляд

$$s(r, z, t) = \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{\partial^2 (ru_r^2)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 (ru_r u_z)}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 (ru_z^2)}{\partial z^2} \right].$$

Інші маніпуляції зі співвідношенням (2) дають граничну умову для рівняння (16):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a} &= \rho_0 \left[\nu \nabla_{(r,z)}^2 u_r - \frac{\partial u_r}{\partial t} \right], \\ r &= a, \quad l/2 \leq z \leq z_e. \end{aligned} \quad (17)$$

Далі задача (16), (17) розв'язується методом функцій Гріна [13, 22, 27, 29], згідно з яким тиск $p(r, z, t)$ записується у вигляді суми об'ємного і поверхневого інтегралів:

$$\begin{aligned} p(r, z, t) &= \\ &= \iiint_{V_0} G_p(r, \phi, z; r_0, \phi_0, z_0) s(r_0, z_0, t) dV_0 + \\ &+ \iint_{S_0} G_p(r, \phi, z; a, \phi_0, z_0) \frac{\partial p(a, z_0, t)}{\partial r_0} dS_0, \\ dV_0 &= r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0, \quad dS_0 = a d\phi_0 dz_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут V_0 – область збуреної за звуженням течії ($0 \leq r_0 \leq a$, $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$, $l/2 \leq z_0 \leq z_e$); S_0 – поверхня, що її оточує (див. рис. 2); $G_p(r, \phi, z; r_0, \phi_0, z_0)$ – функція Гріна, яка задовольняє рівняння

$$\nabla^2 G_p = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \quad (19)$$

і умову

$$\left. \frac{\partial G_p}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (20)$$

на поверхні каналу. Окрім цього, у формулах (18), (19): $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака;

$(r_0, \phi_0, z_0) \in V_0$ – точка, в якій знаходиться одиначне джерело; ∇^2 – оператор Лапласа в циліндричній системі координат [29]:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Співвідношення (18) встановлює кількісний зв'язок між кінематичними (компоненти швидкості u_r і u_z) та динамічними (тиск p) параметрами потоку в області збуреної за звуженням течії. Єдиним невідомим тут поки залишається функція Гріна G_p . Вона буде побудована у наступному підрозділі.

2.1.3. Функція Гріна G_p

Шукана функція Гріна G_p будується шляхом розкладу її в ряд по власних функціях каналу $\Phi_{nm}(r, \phi) = J_n(\beta_{nm}r) \cos(n\phi)$:

$$\begin{aligned} G_p &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \Phi_{nm}(r, \phi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} J_n(\beta_{nm}r) \cos(n\phi), \end{aligned} \tag{21}$$

де J_n – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n ; $\beta_{nm} = \zeta_{nm}/a$ – радіальні хвильові числа; ζ_{nm} – корені рівняння $J'_n(\zeta_{nm}) = 0, m = 1, 2, \dots$

Підстановка ряду (21) у рівняння (19) і граничну умову (20), а також урахування ортогональності власних функцій $\Phi_{nm}(r, \phi)$,

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \Phi_{nm}(r, \phi) \Phi_{sq}(r, \phi) r dr d\phi = \\ = \begin{cases} \|\Phi_{nm}\|^2, & (n, m) = (s, q), \\ 0, & (n, m) \neq (s, q), \end{cases} \end{aligned}$$

дозволяє знайти невідомі коефіцієнти G_{nm} у співвідношенні (21). Після цього функція Гріна G_p рівняння Пуассона для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу набуває вигляду

$$\begin{aligned} G_p(r, \phi, z; r_0, \phi_0, z_0) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_{nm}(r_0, \phi_0)}{\|\Phi_{nm}\|^2} \Phi_{nm}(r, \phi) \times \\ \times \frac{e^{-\beta_{nm}|z-z_0|}}{\beta_{nm}}, \end{aligned} \tag{22}$$

де квадрат норми власної функції каналу $\|\Phi_{nm}\|^2$

дається виразом

$$\begin{aligned} \|\Phi_{nm}\|^2 &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \Phi_{nm}^2(r, \phi) r dr d\phi = \\ &= \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\beta_{0m}a), & n = 0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(\beta_{nm}a) [1 - (n^2/(\beta_{nm}^2 a^2))], & n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Коментуючи вираз (22), відзначимо, що отримана функція Гріна G_p є симетричною відносно площини розташування джерела $z = z_0$. Така симетрія є наслідком спрощення геометрії області, в якій шукається розв'язок граничної задачі (16), (17). Доречно нагадати, що у підрозділі 2.1.2 контрольний об'єм досить складної геометрії

$$0 \leq r \leq R(z), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad z_i \leq z \leq z_e$$

було замінено циліндром

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad l/2 \leq z \leq z_e,$$

поздовжній розмір і об'єм якого трохи менші за відповідні характеристики контрольного об'єму.

Зрозуміло, що знаходження розв'язку задачі (16), (17) у складнішому за геометрією контрольному об'ємі привело б до ускладнення виразу для функції G_p (зокрема, до втрати симетрії). Проте, побудова функції Гріна $G_p^{(1)}$ для такої геометрії є досить складною проблемою. Окрім того, отриманий для функції $G_p^{(1)}$ гідродинамічний тиск $p^{(1)}(r, z, t)$ мало відрізнятиметься в регіоні

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad l/2 \leq z \leq z_e$$

від тиску $p(r, z, t)$, який буде отримано на основі виразу (22). Те ж саме стосується відповідних оцінок акустичних полів $p_a^{(1)}$ і p_a . Тому логічнішим і реалістичнішим виглядає шлях прийняття фізично допустимих спрощувальних припущень (див. початок підрозділів 2.1.2 та 2.2) і подальше застосування виразу (22) для знаходження поля гідродинамічного тиску $p(r, z, t)$ в окремих областях каналу (таких, як регіон збуреної за звуженням течії V_0).

2.1.4. Вираз для гідродинамічного тиску p

Підстановка співвідношення (22) у формулу (18) з урахуванням того, що інтеграл від азимутальної частини функції G_p відмінний від нуля лише у випадку $n = 0$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\phi_0) d\phi_0 = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1, \end{cases}$$

дає остаточний вираз для тиску $p(r, z, t)$ в об'ємі V_0 збуреної за звуженням течії:

$$p(r, z, t) = \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_{0m} r)}{J_0^2(\beta_{0m} a)} \frac{1}{\beta_{0m}} \times \\ \times \left[\int_{l/2}^{z_e} e^{-\beta_{0m}|z-z_0|} dz_0 \int_0^a J_0(\beta_{0m} r_0) \times \right. \\ \times s(r_0, z_0, t) r_0 dr_0 + a J_0(\beta_{0m} a) \times \\ \left. \times \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial p(r_0, z_0, t)}{\partial r_0} \Big|_{r_0=a} e^{-\beta_{0m}|z-z_0|} dz_0 \right]. \quad (23)$$

Тут величини s і $\partial p/\partial r_0$ даються формулами (16) і (17) відповідно.

Співвідношення (23) надалі використовуватимемо при проведенні відповідних розрахунків як базове. Воно виражає гідродинамічний тиск $p(r, z, t)$ через компоненти швидкості потоку u_r і u_z , а також відображає інформацію про геометрію каналу, локального звуження, області збуреної за звуженням течії і структуру течії в цьому регіоні.

2.2. Акустичне поле в каналі

При знаходженні акустичного поля в каналі приймається кілька спрощувальних припущень.

1. Поле вважається осесиметричним. Це зумовлено осесиметричністю поля гідродинамічних джерел звуку (див. розділ 2.1) і результатами експериментальних досліджень [7, 8], в яких показано, що акустичне поле, створене течією в трубі за осесиметричним звуженням, можна у першому наближенні вважати осесиметричним (останнє твердження справедливе, принаймні, для чисел Рейнольдса течії, які не перевищують значення 8000).
2. Вплив звуження на звукове поле частково нехтується. До уваги беруться лише найінтенсивніші гідродинамічні джерела звуку, які розташовані за звуженням ($l/2 \leq z \leq z_e$), і займають значно більший/більшу об'єм/площу у порівнянні зі значно слабшими джерелами, розташованими перед звуженням ($z_i \leq z \leq -l/2$) і в ньому ($-l/2 < z < l/2$) [14, 15, 22]. При цьому не розглядається відбиття звуку від звуження і проходження звуку крізь нього вгору за течією. Іншими словами, звуження замінюється розподіленими в скінченному об'ємі

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad l/2 \leq z \leq z_e$$

гідродинамічними джерелами, а розв'язок акустичної частини задачі зводиться до визначення згенерованого ними звукового поля в області $z > z_e$ (див. рис. 2).

3. Для розглянутого тут випадку малих чисел Маха, гідродинамічні джерела звуку апроксимуються параметрами нестисливої рідини [18, 23]:

$$T_{ij} \approx \rho_0 U_i U_j, \\ F_i \approx n_j \left(P \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial y_j} + \frac{\partial U_j}{\partial y_i} \right) \right), \quad (24)$$

де $(U_1, U_2, U_3) = (u_r, u_\phi, u_z)$ і $P = p(r, z, t)$ – знайдені в розділі 2.1 компоненти швидкості і тиск ($U_2 = u_\phi = 0$).

Загальний розв'язок задачі про генерацію звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу було отримано в роботах [20, 21]. Застосуємо його до нашого випадку.

2.2.1. Акустичні густина і тиск

Сформульована у розділі 1.2 акустична частина задачі розв'язується методом функцій Гріна [20, 21, 27, 29]. Для цього права частина рівняння (3) формально переписується у вигляді суми об'ємних джерел:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(a, z_0, t_0)}{\partial y_i} = \\ = \frac{\partial^2 T_{ij}(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i} \times \\ \times \delta(r_0 - a), \quad (25)$$

які в циліндричній системі координат мають такий вигляд [21, 30]:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_r^2}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 u_z^2}{\partial z_0^2} + 2 \frac{\partial^2 (u_r u_z)}{\partial r_0 \partial z_0} \right), \\ \frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial (r_0 F_r)}{\partial r_0} + \frac{\partial F_z}{\partial z_0}.$$

Тоді акустичні флуктуації густини ρ_a в області $z > z_e$ визначаються сумою внесків джерел (25) в об'ємі V_0 збуреної за звуженням течії і флуктуацій густини ρ_a на поверхні S_0 , яка цей об'єм ото-

чує [21, 27, 29]:

$$\begin{aligned} \rho_a(r, z, t) = & \int_0^\infty dt_0 \iiint_{V_0} \left(\frac{\partial^2 T_{ij}(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_i(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a) \right) \times \\ & \times G(r, \phi, z, t; r_0, \phi_0, z_0, t_0) dV_0 + \\ & + c_0^2 \int_0^\infty dt_0 \iint_{S_0} \left(G(r, \phi, z, t; a, \phi_0, z_0, t_0) \times \right. \\ & \times \frac{\partial \rho_a(a, z_0, t_0)}{\partial r_0} - \rho_a(a, z_0, t_0) \times \\ & \times \left. \frac{\partial G(r, \phi, z, t; a, \phi_0, z_0, t_0)}{\partial r_0} \right) dS_0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$dV_0 = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0, \quad dS_0 = a d\phi_0 dz_0.$$

У формулі (26) $G(r, \phi, z, t; r_0, \phi_0, z_0, t_0)$ – функція Гріна, яка задовольняє неоднорідне хвильове рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 G = \\ = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \end{aligned}$$

граничну умову на стінці каналу

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

та умову випромінювання в нескінченність. Вона має вигляд [20, 21]

$$\begin{aligned} G(r, \phi, z, t; r_0, \phi_0, z_0, t_0) = & -\frac{i}{4\pi c_0^2} \times \\ & \times \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{\Psi_{nm}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(r, \phi) \times \\ & \times \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ik_{nm}(z-z_0)}}{k_{nm}} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega, \end{aligned} \quad (27)$$

де $\Psi_{nm}(r, \phi) = J_n(\alpha_{nm}r) \cos(n\phi)$ – акустичні моди каналу; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ – радіальні хвильові числа; ζ_{nm} – таблицні корені рівняння $J'_n(\zeta_{nm}) = 0$ ($m=1, 2, \dots$); $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$ – осьові хвильові числа; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; ω – кругова частота; $k_0 = \omega/c_0$ – акустичне хвильове число. Квадрат

норми моди $\|\Psi_{nm}\|^2$ задається виразом

$$\begin{aligned} \|\Psi_{nm}\|^2 = & \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^2(r, \phi) r dr d\phi = \\ = & \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a), & n = 0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm}a) [1 - (n^2/(\alpha_{nm}^2 a^2))], & n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Внаслідок рівності нулеві нормальних похідних густини ρ_a (див. розділ 1.2) і функції Гріна G на стінці каналу, поверхневий інтеграл у співвідношенні (26) зникає, і воно набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho_a(r, z, t) = & \int_0^\infty dt_0 \iiint_{V_0} \left(\frac{\partial^2 T_{ij}(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F_i(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a) \right) \times \\ & \times G(r, \phi, z, t; r_0, \phi_0, z_0, t_0) dV_0. \end{aligned}$$

Переходячи у другому доданку, який визначає внесок поверхневих диполів, від об'ємного інтегралу до поверхневого, отримуємо загальний вираз для акустичних флуктуацій густини в каналі:

$$\begin{aligned} \rho_a(r, z, t) = & \int_0^\infty dt_0 \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 T_{ij}(r_0, z_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} \times \\ & \times G(r, \phi, z, t; r_0, \phi_0, z_0, t_0) dV_0 + \\ & + \int_0^\infty dt_0 \iint_{S_0} \frac{\partial F_i(a, z_0, t_0)}{\partial y_i} \times \\ & \times G(r, \phi, z, t; a, \phi_0, z_0, t_0) dS_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Тоді підстановка функції Гріна (27) у формулу (28), а формули (28) – у співвідношення (4) дає вираз для акустичного тиску в каналі p_a :

$$\begin{aligned} p_a(r, z, t) = & \int_{-\infty}^\infty \tilde{p}_a(r, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ = & -\frac{i}{a^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{J_0(\alpha_{0m}r)}{J_0^2(\alpha_{0m}a)} \int_{-\infty}^\infty d\omega \left[e^{-i\omega t} \frac{1}{k_{0m}} \times \right. \\ & \times \left[\int_{l/2}^{z_e} e^{ik_{0m}(z-z_0)} dz_0 \int_0^a \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(r_0, z_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \times \right. \\ & \times J_0(\alpha_{0m}r_0) r_0 dr_0 + a J_0(\alpha_{0m}a) \times \\ & \times \left. \left. \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial \tilde{F}_i(a, z_0, \omega)}{\partial y_i} e^{ik_{0m}(z-z_0)} dz_0 \right] \right], \end{aligned} \quad (29)$$

де $\partial^2 \tilde{T}_{ij} / \partial y_i \partial y_j$ і $\partial \tilde{F}_i / \partial y_i$ – образи Фур'є квадрупольних і дипольних джерел звуку (як і у підрозділі 2.1.3, було враховано, що інтеграл від азимутальної частини функції Гріна G буде відмінним від нуля лише у випадку першої кутової моди $n=0$).

Формули (28), (29) разом зі співвідношенням (27) встановлюють кількісний зв'язок між характеристиками акустичного поля в каналі (густиною ρ_a і тиском p_a) та параметрами течії, каналу і локального звуження. У них також відображено (в неявному вигляді) інформацію про структуру збуреної звуженням течії, що дає можливість пов'язувати просторово-часову і/або кореляційно-спектральну структуру акустичного поля з відповідними вихоровими утвореннями в області збурення.

2.2.2. Акустична енергія

Акустична енергія $\Pi(\omega)$, яка проходить крізь поперечний переріз каналу $z = \text{const}$ на частоті ω , визначається зі співвідношення [18, 21, 31]:

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) \delta(\omega - \omega') &= \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \langle \tilde{p}_a^*(r, z, \omega) \tilde{v}_{az}(r, z, \omega') \rangle r dr d\phi. \end{aligned} \quad (30)$$

Тут дужки $\langle \cdot \rangle$ означають операцію осереднення за часом, зірочка вказує на комплексне спряження, а через \tilde{p}_a і \tilde{v}_{az} позначено образи Фур'є тиску (29) та осової компоненти акустичної швидкості відповідно:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_a(r, z, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_a(r, z, t) e^{i\omega t} dt = \\ &= -\frac{i}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_{0m} r)}{J_0^2(\alpha_{0m} a)} \frac{1}{k_{0m}} \left[\int_{l/2}^{z_e} e^{ik_{0m}(z-z_0)} dz_0 \times \right. \\ &\quad \times \int_0^a \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}(r_0, z_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} J_0(\alpha_{0m} r_0) r_0 dr_0 + \\ &\quad \left. + a J_0(\alpha_{0m} a) \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial \tilde{F}_i(a, z_0, \omega)}{\partial y_i} e^{ik_{0m}(z-z_0)} dz_0 \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\tilde{v}_{az} = \frac{1}{i\rho_0 \omega} \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial z}.$$

Підстановка співвідношень (31) у формулу (30) дає вираз для акустичної енергії $\Pi(\omega)$, згенерованої збуреною за звуженням течією:

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Pi_m(\omega) = \frac{\pi}{a^2 \rho_0 \omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\alpha_{0m} a)} \times \\ &\quad \times \frac{1}{k_{0m}} \left[\int_0^a \int_{l/2}^{z_e} J_0(\alpha_{0m} r_0) r_0 dr_0 dz_0 \times \right. \\ &\quad \times \int_0^a \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(r_0, z_0, r'_0, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times \\ &\quad \times J_0(\alpha_{0m} r'_0) e^{-ik_{0m}(z'_0 - z_0)} r'_0 dr'_0 dz'_0 + \\ &\quad + a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a) \int_{l/2}^{z_e} dz_0 \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(a, z_0, a, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times \\ &\quad \times e^{-ik_{0m}(z'_0 - z_0)} dz'_0 + 2a J_0(\alpha_{0m} a) \times \\ &\quad \times \text{Re} \left(\int_0^a \int_{l/2}^{z_e} J_0(\alpha_{0m} r_0) r_0 dr_0 dz_0 \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{l/2}^{z_e} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(r_0, z_0, a, z'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} e^{-ik_{0m}(z'_0 - z_0)} dz'_0 \right) \Big], \end{aligned} \quad (32)$$

в якому S_{ijkl}^T та S_{ik}^F – відповідно взаємні спектри образів Фур'є напружень Лайтхіла T_{ij} ,

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^T(r_0, z_0, r'_0, z'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') &= \\ &= \langle \tilde{T}_{ij}^*(r_0, z_0, \omega) \tilde{T}_{kl}(r'_0, z'_0, \omega') \rangle, \end{aligned}$$

та компонент прикладених до стінки каналу сил на одиницю площі F_k ,

$$\begin{aligned} S_{ik}^F(a, z_0, a, z'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') &= \\ &= \langle \tilde{F}_i^*(a, z_0, \omega) \tilde{F}_k(a, z'_0, \omega') \rangle; \end{aligned}$$

а S_{ijk}^{TF} – взаємний спектр образів Фур'є напружень Лайтхіла T_{ij} і сил F_k ,

$$\begin{aligned} S_{ijk}^{TF}(r_0, z_0, a, z'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') &= \\ &= \langle \tilde{T}_{ij}^*(r_0, z_0, \omega) \tilde{F}_k(a, z'_0, \omega') \rangle; \end{aligned}$$

$\text{Re}(\cdot)$ означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини.

Аналіз співвідношення (32) показує, що акустична енергія Π не залежить від осової координати z , а отже Π не спадає зі збільшенням відстані від джерел (що і має відбуватись у жорсткостінному каналі, де немає втрат енергії). Окрім того, Π дорівнює сумі енергій Π_m акустичних мод каналу Ψ_{0m} . При цьому енергія окремої моди Π_m

складається з трьох доданків. Перший з них являє собою акустичну енергію, згенеровану об'ємними квадрупольми $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, другий – енергію, випромінену поверхневими дипольми $\partial F_i / \partial y_i$, а третій зумовлений взаємним внеском в акустичне поле квадруполів і диполів (їхньою взаємодією).

2.3. Загальні зауваження

Сукупність наведених у підрозділах 2.1 і 2.2 операцій являє собою аналітично-чисельний метод розв'язування задач генерації звуку течіями в каналах з локальними геометричними неоднорідностями. Згідно з ним знайдені поля гідродинамічних параметрів використовуються для опису джерел звуку, а для знаходження поля течії та акустичного поля застосовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а також методи кореляційно-спектрального аналізу. Тестування розробленого методу для типових значень параметрів течії, каналу і локального звуження буде проведено у наступній частині дослідження. Там же й буде зроблено висновок про можливість застосування запропонованого методу для розв'язування відповідних задач механіки та акустики.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено аналітично-чисельний метод розв'язування задач генерації звуку течіями в каналах з локальними геометричними неоднорідностями. В ньому знайдені поля гідродинамічних параметрів використовуються для опису джерел звуку, а для знаходження поля течії та акустичного поля застосовуються методи функцій Гріна і власних функцій, а також методи кореляційно-спектрального аналізу.
2. На основі розробленого методу розв'язано задачу генерації звуку стаціонарною течією у нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу з локальним осесиметричним звуженням і отримано аналітичні вирази для розрахунку гідродинамічних та акустичних характеристик течії.
3. Попередні результати обрахунку згаданих характеристик добре узгоджуються з відповідними літературними даними. Це дає підстави говорити про успішну апробацію розробленого методу і можливість його подальшого застосування для розв'язування відповідних задач механіки та акустики.

1. Lees R. S., Dewey C. F., Jr. Phonoangiography: A new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease // Proc. Nat. Acad. Sci.– 1970.– **67**.– P. 935–942.
2. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis // J. Biomech. Engng.– 1979.– **101**.– P. 157–175.
3. Миролюбов С. Г. Гидродинамика стеноза // Современ. пробл. биомех.– 1983.– **1**.– С. 73–136.
4. Berger S. A., Jou L.-D. Flows in stenotic vessels // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2000.– **32**.– P. 347–382.
5. Clark C. The fluid mechanics of aortic stenosis. 1. Theory and steady flow experiments // J. Biomech.– 1976.– **9**.– P. 521–528.
6. Борисюк А. О. Експериментальне дослідження пристінного тиску в трубі за стенозом // Акуст. вісн.– 2002.– **5**, N 1.– С. 13–21.
7. Борисюк А. А. Моделирование генерации шума стенозом в сосуде // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 2.– С. 3–18.
8. Borisyuk A. O. Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis // J. Sound Vib.– 2002.– **256**.– P. 475–498.
9. Clark C. Turbulent wall pressure measurements in a model of aortic stenosis // J. Biomech.– 1977.– **10**.– P. 461–472.
10. Tobin R. J., Chang I. D. Wall pressure spectra scaling downstream of stenoses in steady tube flow // J. Biomech.– 1976.– **9**.– P. 633–640.
11. Fredberg J. J. Origin and character of vascular murmurs: Model studies // J. Acoust. Soc. Amer.– 1977.– **61**.– P. 1077–1085.
12. Kim B., Corcoran W. K. Experimental measurement of turbulence spectra distal to stenosis // J. Biomech.– 1974.– **7**.– P. 335–342.
13. Abdallah S. A., Hwang N. H. C. Arterial stenosis murmurs: An analysis of flow and pressure fields // J. Acoust. Soc. Amer.– 1988.– **83**, N 1.– P. 318–334.
14. Agarwal N. K., Generation and propagation of sound waves in disturbed pipe flow // AIAA Pap. N 90-0286.– 1990.
15. Agarwal N. K. The sound field in fully developed turbulent pipe flow due to internal flow separation. Part 1: Wall-pressure fluctuations // J. Sound Vib.– 1994.– **169**.– P. 89–109.
16. Borisyuk A. O. Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel // Flow, Turbulence and Combustion.– 1999.– **61**.– P. 269–284.
17. Borisyuk A. O. Modelling of the acoustic properties of a larger human blood vessel // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 3.– С. 3–13.
18. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols.– New York: Academic Press, 1986.– 974 p.
19. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech.– 1968.– **32**.– P. 765–778.
20. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в нескінченній прямій жорсткостінній трубі кругового поперечного перерізу // Доповіді НАН України.– 2004.– N 5.– С. 34–40.
21. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Частина 1. Загальна теорія // Акуст. вісн.– 2003.– **6**, N 3.– С. 3–9.

22. *Hardin J. C., Pope D. S.* Sound generation by a stenosis in a pipe // *AIAA J.*– 1992.– **30**.– P. 312–317.
23. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory // *Proc. Roy. Soc. London.*– 1952.– **A211**.– P. 564–587.
24. *Batchelor G. K.* An introduction to fluid dynamics.– Cambridge, England, UK: Cambridge Univ. Press, 1967.– 615 p.
25. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
26. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика.– М.: Физматгиз, 1963.– 1548 с.
27. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика.– М.: Машиностроение, 1981.– 294 с.
28. *Pedrizetti G.* Unsteady tube flow over an expansion // *J. Fluid Mech.*– 1996.– **310**.– P. 89–111.
29. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics: vol. 1.– New York: McGraw-Hill, 1953.– 997 p.
30. *Ffowcs Williams J. E., Hall L. H.* Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // *J. Fluid Mech.*– 1970.– **40**.– P. 657–670.
31. *Borisjuk A. O., Grinchenko V. T.* Vibration and noise generation by elastic elements excited by a turbulent flow // *J. Sound Vib.*– 1997.– **204**.– P. 213–237.

- δ_s – параметр форми локального звуження каналу;
- ρ – густина рідини;
- ρ_0 – густина незбуреної рідини;
- ρ_a – акустичні флуктуації густини;
- μ – динамічна в'язкість рідини;
- ν – кінематична в'язкість рідини;
- U – осереднена осьова швидкість течії;
- u_i, u_r, u_z – компоненти швидкості течії;
- U_i – компоненти швидкості нестисливої рідини;
- p_{ij} – тензор напружень;
- τ_{ij} – тензор дотичних напружень;
- T_{ij} – напруження Лайтхіла;
- p – гідродинамічний тиск;
- p_0 – тиск у незбуреному середовищі;
- p_a – акустичні флуктуації тиску;
- P – тиск у нестисливій рідині;
- Ω – завихореність;
- Ψ – функція течії;
- z_i, z_0 – вхідний та вихідний перерізи контрольного об'єму;
- G_p, G – функції Гріна;
- $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака;
- δ_{ij} – символ Кронекера;
- c_0 – швидкість звуку в незбуреному середовищі;
- k_0 – акустичне хвильове число;
- α_{nm}, β_{nm} – радіальні хвильові числа;
- k_{nm} – осьові хвильові числа;
- Φ_{nm} – власні функції каналу;
- Ψ_{nm} – акустичні моди каналу.

ДОДАТОК. УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- (r, ϕ, z) – циліндричні координати;
- a – радіус поперечного перерізу каналу;
- l – довжина локального звуження каналу;
- r_s – функція, яка описує геометрію локального звуження каналу;