

УДК 534.64.222:616.24-073

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ХРЯЩЕЙ ТРАХЕИ И БРОНХОВ ЧЕЛОВЕКА

В. Г. БАСОВСКИЙ, И. В. ВОВК,

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 11.08.2002*

Проведен анализ геометрических и физических характеристик хрящей трахеи и главных бронхов человека, сформулированы их механические модели, представляющие хрящи в виде круговых стержней постоянного поперечного сечения со свободными концами. На основе теории изгибных колебаний круговых стержней разработана расчетная схема для оценки собственных частот и форм колебаний хрящей. Оценены несколько первых собственных частот и форм колебаний хрящей. В частности, установлено, что значения первых собственных частот трахеальных и бронхиальных хрящей составляют 60.7 и 168.7 Гц соответственно, а их первые собственные формы колебаний имеют по три противофазных участка и по две узловые точки.

Проаналізовано геометричні та фізичні характеристики хрящів трахеї та головних бронхів людини, сформульовано їхні механічні моделі у вигляді кругових стержнів постійного поперечного перерізу з вільними кінцями. На основі теорії згинальних коливань кругових стержнів розроблено розрахункову схему для оцінок власних частот та форм коливань хрящів. Оцінені кілька перших власних частот та форм коливань хрящів. Зокрема, встановлено, що значення перших власних частот хрящів трахеї та бронхів становлять 60.7 і 168.7 Гц відповідно, а їхні перші власні форми коливань мають по три противофазні ділянки і по дві вузлові точки.

The analysis of geometrical and physical characteristics of cartilages of human trachea and main bronchuses is conducted. Mechanical models, that represent the cartilages as the circle rods of constant cross-section with free ends, are developed. An algorithm for estimation of eigen frequencies and forms of cartilages' vibration on the basis of the theory of bending oscillations of the circle rods is developed. Several lowest eigen frequencies and forms of cartilages' vibrations are estimated. Specifically, it is found that two lowest eigen frequencies of tracheal and bronchial cartilages are 60.7 and 168.7 Hz, respectively, and their first vibrational forms have three anti-phase segments and two nodes.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов распространения звука в бронхиальном дереве человека и проникновения его через стенки воздухоносных путей в окружающие ткани является важной современной проблемой акустики респираторного тракта человека [1, 2]. При этом, в силу хорошо известных причин, одним из эффективных и сравнительно широко используемых методов изучения этих процессов продолжает оставаться акустическое и математическое моделирование [3–7].

Следует сказать, что при формировании акустических и математических моделей бронхиального дерева значительную сложность представляет оценка физических свойств стенок воздухоносных путей, поскольку экспериментальные данные о таких свойствах весьма скудны и во многом противоречивы. Поэтому авторы упомянутых работ, как правило, ограничивались простейшими гипотезами о физических свойствах стенок воздухоносных путей. Например, предполагалось, что все стенки бронхиального дерева являются локально реагирующими и идентичными в пределах одного поколения воздухоносных путей. Кроме того, считается, что физические свойства стенок воздухоносных путей данного поколения не изменя-

ются ни вдоль образующих, ни вдоль окружностей воздухоносных путей (здесь необходимо отметить, что в работе [5] была предпринята достаточно успешная попытка учесть неоднородность физических свойств стенки трахеи вдоль ее образующей). Вместе с тем, хорошо известно, что физические свойства стенок воздухоносных путей транзитной зоны изменяются от точки к точке не только вдоль образующих, но и вдоль окружностей. Это обусловлено, в первую очередь, тем обстоятельством, что так называемые “кольцевые” хрящи, расположенные в тканях стенок воздухоносных путей и призванные обеспечивать их поперечную жесткость, вовсе не имеют форму замкнутых колец. В частности, для главных бронхов каждый из этих хрящей, фактически, имеет форму полукольца, а для трахеи – двух третей кольца [8–11].

В силу указанных особенностей строения стенок воздухоносных путей становится очевидным, что их колебания (под воздействием звука голоса или шумов потока воздуха при акте дыхания) не могут быть осесимметричными в плоскости поперечного сечения воздухоносных путей, даже если предположить, что воздействие звука на стенки будет обладать осевой симметрией. Как следствие, звуковая энергия, переизлучаемая стенками воздухо-

носных путей в окружающие ткани, также не может быть распределена симметрично относительно их продольных осей.

Учитывая изложенное, целью настоящей работы является разработка акустической и математической моделей “кольцевых” хрящей воздухоносных путей бронхиального дерева человека и получение на этой основе количественных данных о собственных частотах и собственных формах их упругих колебаний.

1. ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ “КОЛЬЦЕВЫХ” ХРЯЩЕЙ ТРАХЕИ И БРОНХОВ И ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Остановимся прежде всего на геометрических параметрах хрящей. Как уже указывалось выше, “кольцевые” хрящи воздухоносных путей транзиторной зоны бронхиального дерева человека представляют собой незамкнутое кольцо (дугу окружности). При этом хрящи трахеи охватывают приблизительно две трети ее окружности, а хрящи главных бронхов – около половины [10, 11]. Каждый трахеальный хрящ имеет высоту около 2÷4 мм и толщину около 1 мм [11]. Что касается данных о высоте и толщине бронхиальных хрящей, то в доступной нам литературе их обнаружить не удалось. Можно предположить, что размеры бронхиальных хрящей меньше соответствующих размеров трахеальных хрящей во столько же раз, во сколько диаметр трахеи больше диаметра главных бронхов (т.е. примерно в 1.5 раза [3]). Какие геометрические параметры имеют хрящи последующих поколений воздухоносных путей, нам установить не удалось. Однако в [10, стр. 242] указано, что “по мере уменьшения калибра хрящи бронхов постепенно меняют форму, сохраняя в начале вид полуколец, затем появляются хрящевые пластинки неодинаковой величины, и совершенно исчезают в бронхиолах диаметром около 1 мм”. Как видно, это указание носит чисто качественный характер. Поэтому ниже мы ограничимся изучением колебаний только бронхиальных и трахеальных хрящей. Однако при наличии более полных сведений о геометрических параметрах хрящей последующих поколений развиваемая нами теория может быть распространена и на них.

Следует отметить, что указанные в [11] значения высоты и толщины трахеальных хрящей весьма приблизительны, поскольку разбросы этих параметров достаточно велики и во многом зависят от возраста, пола и ряда некоторых антропологических характеристик. Более детальное изучение

геометрических параметров хрящей трахеи, проведенное в [8], показывает, что сечение хряща скорее напоминает неправильный овал, главные оси которого имеют размеры около 3.6 и 1.8 мм. Что касается формы хрящей трахеи в плане, то здесь также наблюдаются заметные отклонения от классической дуги окружности и сравнительно большой разброс ее длины. Так, в работе [9] показано, что значение длины дуги хряща трахеи¹ лежит в диапазоне от 216 до 286°. Аналогичных данных для хрящей бронхов найти не удалось, однако надо полагать, что относительный разброс длин их дуг составляет не меньшую величину.

Перейдем к обсуждению физических характеристик биоткани хрящей. Наиболее устойчивыми из них (с точки зрения разбросов) являются плотность и коэффициент Пуассона. Основываясь на анализе данных, приведенных в [7, 9, 11], заключаем, что плотность биоткани хрящей лежит в довольно узком диапазоне значений $(1.06 \div 1.14) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, а коэффициент Пуассона весьма близок к 0.3. К сожалению, о модуле Юнга этого сказать нельзя. Судя по разным оценкам, он может колебаться в очень широких пределах – 0.5÷18 МПа [7–9, 12]. Можно предположить, что такой большой разброс обусловлен двумя причинами. Первая причина этого – существенная зависимость модуля Юнга биоткани хрящей от возраста, пола и, возможно, от образа жизни (климатических условий, питания и т.д.). Вторая причина – несовершенство методики экспериментальной оценки величины модуля Юнга биоткани хрящей. Действительно, небольшие размеры и причудливая конфигурация хрящей существенно усложняют оценивание модуля Юнга. Тем не менее, в работе [9], за счет применения оригинальной методики, удалось повысить точность измерений и получить достаточно реалистичный результат $4.4_{-1.8}^{+3.3}$ МПа.

Обобщение приведенных выше данных о геометрических и физических характеристиках трахеальных и бронхиальных хрящей позволило выработать ряд гипотез и на этой основе сформулировать их механические модели, пригодные для дальнейшего анализа. В частности, были приняты следующие гипотезы.

1. В плане хрящи представляют собой незамкнутое круговое кольцо.
2. Поперечное сечение трахеального хряща имеет форму прямоугольника и постоянно по всему кольцу.

¹Оценка проводилась на четырех выделенных из организма экземплярах хрящей.

3. Средний радиус хряща равен среднему радиусу воздухоносного пути, которому он принадлежит.
4. Поперечное сечение хряща главного бронха подобно поперечному сечению хряща трахеи, но его линейные размеры меньше во столько раз, во сколько диаметр трахеи больше диаметра главного бронха.
5. Длина дуги окружности рассматриваемых хрящей намного больше размеров их поперечного сечения (высоты и толщины).

На рис. 1 представлено схематическое изображение принятой механической модели хряща в плане и указаны координатные оси связанной с ней цилиндрической системы координат. Такая механическая модель позволяет сделать следующий шаг – перейти к математическому моделированию хрящей за счет использования известной теории изгибных колебаний кругового стержня со свободными концами [13]. Следует отметить, что геометрический объект, которым мы заменяем реальные хрящи, в литературе по геометрии принято называть незамкнутым круговым кольцом. В отличие от этого, в физико-математической литературе чаще используется термин круговой стержень, т. е. стержень, который в недеформируемом состоянии является частью дуги окружности. В настоящей статье мы будем использовать оба термина.

2. ТЕОРИЯ

Рассмотрим свободные изгибные колебания кругового стержня постоянного поперечного сечения. Продольная ось такого стержня в недеформированном состоянии очерчена по дуге окружности радиуса R_0 и углового размера θ_0 (см. рис. 1). При этом крутильными и продольными деформациями пренебрегаем, считая, что применима гипотеза плоской нормали и поперечные сечения не деформируются. Условия равновесия элемента ds стержня (см. рис. 1, в) при свободных изгибных колебаниях имеют вид [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \theta} - Q &= mR_0^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} + N &= mR_0^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} - R_0^* Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

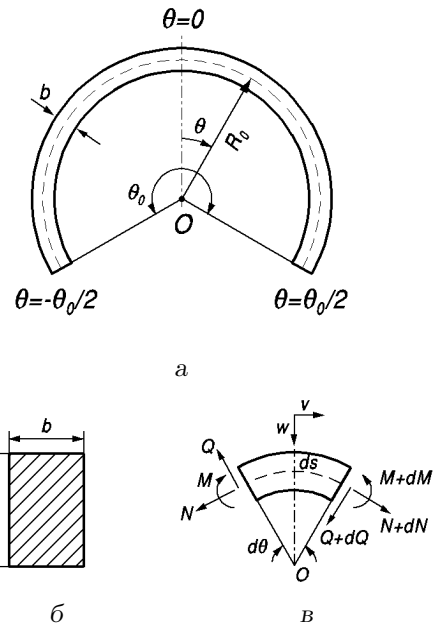


Рис. 1. Механическая модель хряща:
 а – незамкнутое круговое кольцо (круговой стержень),
 б – поперечное сечение кольца,
 в – элемент кольца и действующие на него силы и моменты

где N , Q , M – нормальная и перерезывающая силы и изгибающий момент в текущем сечении стержня в его плоскости; v , w – смещения сечений стержня в тангенциальном и радиальном направлениях; m – погонная масса стержня; R_0^* – радиус кривизны оси элемента в деформированном состоянии при колебаниях.

В результате преобразования уравнений равновесия, совместно с известными зависимостями для всех величин в соотношениях (1) от w [13], получим дифференциальное уравнение свободных изгибных колебаний кругового стержня относительно его радиальных смещений. Собственные формы свободных изгибных колебаний можно получить, полагая $w = W \exp(-j\omega t)$, где W – функция угла θ ; ω – круговая частота свободных колебаний. Функция W будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^6 W}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 W}{d\theta^4} + (1 - \Omega^2) \frac{d^2 W}{d\theta^2} + \Omega^2 W = 0, \quad (2)$$

где Ω – безразмерная круговая частота:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_*}, \quad \omega_* = \frac{1}{R_0^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (3)$$

В формуле (3) введены следующие обозначения: E – модуль Юнга; $I = b^3 h / 12$ – момент инерции по-

перечного сечения стержня (см. рис. 1, б) относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Общий интеграл уравнения (2) может быть представлен в форме

$$W = \sum_{n=1}^3 (A_n \operatorname{ch} \lambda_n \theta + B_n \operatorname{sh} \lambda_n \theta), \quad (4)$$

где A_n, B_n – постоянные интегрирования; λ_n^2 – разные корни кубического дисперсионного уравнения относительно λ^2

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + (1 - \Omega^2)\lambda^2 + \Omega^2 = 0. \quad (5)$$

Согласно [14], уравнение (5) имеет действительные кратные корни при значениях $\Omega = 0, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$, где $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ – положительные корни уравнения

$$4\Omega^4 - 71\Omega^2 + 8 = 0. \quad (6)$$

Если корни различны, то возможны три случая:

- 1) при $0 < \Omega < \Omega^{(1)}$ все корни действительны (и все $\lambda_n^2 < 0$);
- 2) при $\Omega^{(1)} < \Omega < \Omega^{(2)}$ корень λ_1^2 действительный и меньше нуля, а корни λ_2^2 и λ_3^2 комплексно-сопряженные;
- 3) при $\Omega > \Omega^{(2)}$ все корни действительны, причем $\lambda_1^2 < 0$ и $\lambda_2^2 > 0$, а $\lambda_3^2 > 0$.

Постоянные интегрирования A_n и B_n в (4) следует определить из краевых условий на концах кругового стержня. В нашем случае стержень имеет свободные концы, поэтому краевые условия примут вид

$$M = Q = N = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \frac{\theta_0}{2},$$

которые для амплитудных значений относительно W можно записать в следующем виде [15]:

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{R_0^2} \left(\frac{d^2 W}{d\theta^2} + W \right) \Big|_{\theta=\pm\theta_0/2} &= 0, \\ -\frac{EI}{R_0^2} \left(\frac{d^3 W}{d\theta^3} + \frac{dW}{d\theta} \right) \Big|_{\theta=\pm\theta_0/2} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{EI}{R_0^2} \left(\frac{d^4 W}{d\theta^4} + \frac{d^2 W}{d\theta^2} - \Omega^2 W \right) \Big|_{\theta=\pm\theta_0/2} = 0.$$

Совокупность дифференциального уравнения (2), описывающего колебания кругового стержня, и краевых условий на его концах (7), фактически и

составляют математическую модель рассматриваемых хрящей.

Ввиду симметрии кругового стержня задача может быть значительно упрощена, если рассматривать отдельно симметричные и антисимметричные формы колебаний.

При симметричных колебаниях в представлении (4) постоянные интегрирования $B_n = 0$. Теперь удовлетворение краевых условий (7) только на одном из концов стержня (например, $\theta = \theta_0/2$) приводит к системе трех однородных линейных уравнений относительно постоянных интегрирования A_n . Приравнявая к нулю определитель этой системы, получим следующее частотное уравнение для симметричных форм:

$$\begin{aligned} &\lambda_2(1 + \lambda_2^2)((1 + \lambda_1^2)(\lambda_3^4 + \lambda_3^2 - \Omega^2) - \\ &\quad -(1 + \lambda_3^2)(\lambda_1^4 + \lambda_1^2 - \Omega^2)) \times \\ &\quad \times \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sh} \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{ch} \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} + \\ &+ \lambda_3(1 + \lambda_3^2)((1 + \lambda_2^2)(\lambda_1^4 + \lambda_1^2 - \Omega^2) - \\ &\quad -(1 + \lambda_1^2)(\lambda_2^4 + \lambda_2^2 - \Omega^2)) \times \\ &\quad \times \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{ch} \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sh} \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} + \\ &+ \lambda_1(1 + \lambda_1^2)((1 + \lambda_3^2)(\lambda_2^4 + \lambda_2^2 - \Omega^2) - \\ &\quad -(1 + \lambda_2^2)(\lambda_3^4 + \lambda_3^2 - \Omega^2)) \times \\ &\quad \times \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{ch} \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{ch} \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поступая аналогично для антисимметричных форм, можно получить систему однородных линейных уравнений относительно постоянных интегрирования B_n (в этом случае $A_n = 0$) и соответствующее частотное уравнение. Следует отметить, что частотное уравнение для симметричных форм переходит в уравнение для антисимметричных форм при замене в соотношении (8) функций sh на ch и ch на sh .

Совместно решив дисперсионное уравнение (5) и соответствующее частотное уравнение, можно оценить безразмерные круговые частоты собственных изгибных колебаний кругового стержня для симметричных и антисимметричных форм Ω_p ($p = 1, 2, \dots$). При этом размерные значения частот определяются простой формулой

$$f_p = \Omega_p \omega_* / 2\pi. \quad (9)$$

Соответствующие формы собственных колебаний W_p определяются выражением (4).

К перемещениям, обусловленным изгибными колебаниями стержня, нужно формально прибавить его перемещения как абсолютно жесткого тела (поступательное и вращательное движения). Этим движениям соответствует кратная собственная частота $f_0 = 0$.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При проведении конкретных расчетов были использованы следующие геометрические и физические характеристики хрящей:

- для трахеального хряща $2R_0 = 1.75 \cdot 10^{-2}$ м, $\theta_0 = 240^\circ$, $b = 1.64 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 3.2 \cdot 10^{-3}$ м;
- для хряща главных бронхов $2R_0 = 1.18 \cdot 10^{-2}$ м, $\theta_0 = 180^\circ$, $b = 1.1 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 2.18 \cdot 10^{-3}$ м.

Плотность биоткани хрящей принималась равной $1.1 \cdot 10^3$ кг/м³, а модуль Юнга – $4.4 \cdot 10^6$ Па.

Прежде всего, обратимся к рис. 2, на котором изображены зависимости четырех низших безразмерных собственных частот изгибных колебаний кругового стержня от его углового размера θ_0 . Хотя угловые размеры трахеального и бронхиального хрящей, как мы убедились выше, имеют вполне определенные величины, нам представлялось интересным проследить, в какой мере изменяются собственные частоты кругового стержня со свободными концами при изменении его углового размера в широком диапазоне значений θ_0 . Кроме того, наличие таких обобщенных данных дает возможность оценивать собственные частоты хрящей с учетом разброса их геометрических и физических характеристик, непосредственно используя формулы (3) и (9).

Возвращаясь к рис. 2, нетрудно убедиться, что с ростом угла θ_0 собственные частоты очень быстро понижаются, достигая минимального значения при $\theta_0 = 360^\circ$. В этом нет ничего удивительного, поскольку с ростом θ_0 возрастает длина кругового стержня $\theta_0 R_0$ (естественно, здесь θ_0 должно быть выражено в радианах). Для сравнения мы также рассчитали низшую собственную частоту классического прямого стержня со свободными концами, имеющего равные с криволинейным стержнем поперечное сечение и длину $l = \theta_0 R_0$. На рис. 2 штриховой линией обозначена зависимость низшей собственной частоты прямого стержня от величины θ_0 . Как видно, при малых углах θ_0 значения низших собственных частот кругового стержня и равновеликого прямого стержня достаточно близки. Это естественно, поскольку при малых углах круговой стержень фактически вырождается в прямой. С ростом угла θ_0 отличие в значениях низших собственных частот кругового и прямого стержней растет и достигает максимального значения $\sim 35\%$ при $\theta_0 = 360^\circ$. Дополнительные расчеты показывают, что аналогичная картина наблюдается и для более высоких собственных частот.

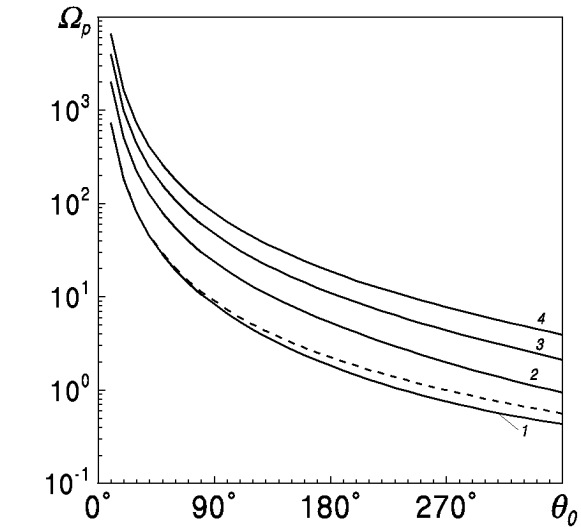


Рис. 2. Зависимости безразмерных собственных частот изгибных колебаний кругового стержня от его углового размера:
штриховая – классический прямой стержень,
1–4 – $p = 1, 2, 3, 4$ соответственно

Теперь обратимся к рис. 3, на котором схематически изображены несколько первых низших собственных форм колебаний круговых стержней, моделирующих трахеальные и бронхиальные хрящи. Здесь штриховыми линиями обозначены положения стержней в недеформируемом состоянии, а сплошными – в крайних деформируемых состояниях. При этом для симметричных форм колебаний показаны оба крайних положения, а для несимметричных – только одно, поскольку второе положение является его зеркальным отражением относительно плоскости, в которой лежит центральное поперечное сечение кругового стержня. Как видно из рисунка, форма колебаний рассматриваемых стержней достаточно сложна. Она имеет противофазные участки колебаний и узловые точки, количество T_p которых для p -ой моды определяется с помощью простого выражения $T_p = p + 1$.

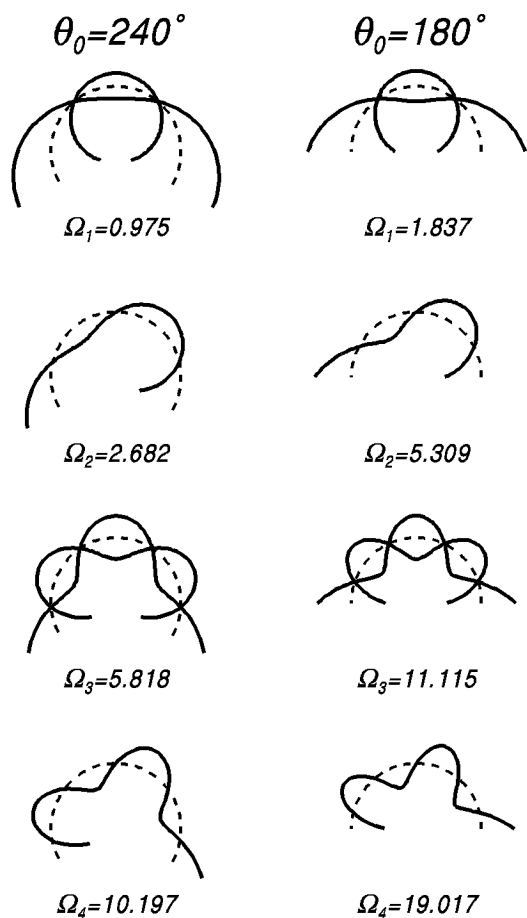


Рис. 3. Собственные формы изгибных колебаний круговых стержней, моделирующих трахеальные и бронхиальные хрящи

Приведенные на рис. 3 данные позволяют убедиться в правильности высказанного во введении предположения о том, что колебания стенок воздухоносных путей транзиторной зоны бронхиального дерева не могут быть симметричными относительно продольных осей этих воздухоносных путей. Главной причиной отсутствия такой симметрии является специфическая геометрия хрящей.

Как нам представляется, проведенный выше анализ особенностей колебаний круговых стержней, моделирующих хрящи воздухоносных путей, оказался бы неполным без конкретных количественных данных, относящихся непосредственно к трахеальным и бронхиальным хрящам. С этой целью были проведены расчеты абсолютных значений первых шести собственных частот этих хрящей, результаты которых сведены в таблицу. Здесь также приведены соответствующие форму-

лы, позволяющие производить расчеты собственных форм колебаний хрящей (с точностью до амплитудной постоянной A). Указанные в таблице значения наименьших собственных частот трахеального и бронхиального хрящей интересно сравнить с оценками резонансных частот стенок трахеи и бронхов, выполненными в [3] на основе использования усредненных значений удельных масс и упругостей стенок, приведенных в [6, 7] (в цитируемых работах стенки предполагались локально реагирующими и совершающими исключительно осесимметричные радиальные колебания). Эти оценки для трахеи и главных бронхов составили 73 и 195 Гц соответственно. Бросается в глаза вполне удовлетворительное совпадение с собственной частотой 60.7 Гц трахеального хряща и собственной частотой 168.7 Гц бронхиального хряща (отличие не более 17%). Тем не менее, следует подчеркнуть, что это совпадение не снимает главного противоречия между свойствами реальных стенок воздухоносных путей, содержащих хрящи в форме упругих незамкнутых колец, и моделью локально реагирующей стенки, принятой в [3, 6, 7].

ВЫВОДЫ

1. Проведен анализ геометрических и физических характеристик хрящей трахеи и главных бронхов, сформулированы их механические модели, представляющие хрящи в виде круговых стержней постоянного поперечного сечения со свободными концами.
 2. На основе использования теории изгибных колебаний круговых стержней разработана расчетная схема для оценки их собственных частот и форм колебаний.
 3. Получены обобщенные зависимости безразмерных собственных частот кругового стержня со свободными концами от его углового размера, представлены собственные формы колебаний круговых стержней, моделирующих трахеальные и бронхиальные хрящи.
 4. Установлено, что низшие значения собственных частот трахеальных и бронхиальных хрящей составляют соответственно 60.7 и 168.7 Гц, а низшие собственные их формы колебаний имеют по три противофазных участка и по две узловые точки.
1. *Вовк И. В., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олійник В. Н.* Возможности и перспективы диагностики легочных патологий с помощью компьютерной регистрации и обработки шумов дыхания // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 2.– С. 21–33.

Табл. 1. Собственные частоты и формы колебаний хрящей

p	Хрящ трахеи		Хрящ бронха	
	f_p , Гц	W_p	f_p , Гц	W_p
1	60.7	$A\{\cos 1.476\theta - 0.409 \operatorname{ch} 0.612\theta \cos 0.535\theta - 0.550 \operatorname{sh} 0.612\theta \sin 0.535\theta\}$	168.7	$A\{\cos 1.764\theta - 0.301 \operatorname{ch} 0.894\theta \cos 0.493\theta - 0.465 \operatorname{sh} 0.894\theta \sin 0.493\theta\}$
2	166.9	$A\{\sin 2.000\theta - 0.248 \operatorname{sh} 1.082\theta \cos 0.413\theta - 0.242 \cdot 10^{-1} \operatorname{ch} 1.082\theta \sin 0.413\theta\}$	487.5	$A\{\sin 2.587\theta - 0.121 \operatorname{sh} 1.866\theta + 0.919 \cdot 10^{-1} \operatorname{sh} 1.1\theta\}$
3	362.1	$A\{\cos 2.685\theta + 0.309 \cdot 10^{-1} \operatorname{ch} 2.012\theta - 0.357 \cdot 10^{-1} \operatorname{ch} 1.076\theta\}$	1020.6	$A\{\cos 3.542\theta + 0.131 \cdot 10^{-1} \operatorname{ch} 3.084\theta - 0.111 \cdot 10^{-1} \operatorname{ch} 1.017\theta\}$
4	634.7	$A\{\sin 3.410\theta + 0.366 \cdot 10^{-2} \operatorname{sh} 2.930\theta - 0.835 \cdot 10^{-2} \operatorname{sh} 1.021\theta\}$	1746.2	$A\{\sin 4.525\theta + 0.219 \cdot 10^{-2} \operatorname{sh} 4.179\theta - 0.372 \cdot 10^{-2} \operatorname{sh} 1.006\theta\}$
5	980.4	$A\{\cos 4.148\theta - 0.593 \cdot 10^{-3} \operatorname{ch} 3.766\theta + 0.309 \cdot 10^{-2} \operatorname{ch} 1.010\theta\}$	2659.1	$A\{\cos 5.517\theta - 0.402 \cdot 10^{-3} \operatorname{ch} 5.237\theta + 0.142 \cdot 10^{-2} \operatorname{ch} 1.002\theta\}$
6	1397.7	$A\{\sin 4.891\theta - 0.106 \cdot 10^{-3} \operatorname{sh} 4.573\theta + 0.151 \cdot 10^{-2} \operatorname{sh} 1.005\theta\}$	3757.5	$A\{\sin 6.512\theta - 0.771 \cdot 10^{-4} \operatorname{sh} 6.277\theta + 0.761 \cdot 10^{-3} \operatorname{sh} 1.001\theta\}$

- Gavriely N. Breath sounds methodology.- London, Tokyo: CRC Press, 1995.- 203 p.
- Вовк И. В., Вовк О. И. Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Часть I. Теория // Акуст. вісн.- 2000.- **3**, N 2.- С. 19-31.
- Басовский В. Г., Вовк И. В., Вовк О. И. Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Часть II. Анализ численных результатов // Акуст. вісн.- 2000.- **3**, N 4.- С. 11-20.
- Басовский В. Г., Вовк И. В., Вовк О. И. Особенности колебаний стенок трахеи человека // Акуст. вісн.- 2001.- **4**, N 3.- С. 10-21.
- Fredberg J. J., Hoening A. Mechanical response of the lungs at high frequencies // J. Biomech. Engng.- 1978.- **100**, May.- P. 57-66.
- Habib R. H., Chalker R. B., Suki B., Jackson A. C. Airway geometry and wall mechanical properties estimated from subglottal input impedance in humans // J. Appl. Physiol.- 1994.- **77**, N 1.- P. 441-451.
- Begis D., Delpuech C., Le Tallec P., Loth L., Thiriet M., Vidrascu M. A finite-element model of tracheal collapse // J. Appl. Physiol.- 1988.- **64**, N 4.- P. 1359-1368.
- Lambert R. K., Baile E. M., Moreno R., Bert J., Pare P. D. A method for estimating the Young's modulus of complete tracheal cartilage rings // J. Appl. Physiol.- 1991.- **70**, N 3.- P. 1152-1159.
- Сапин М. Р., Билич Г. Л. Анатомия человека.- М.: Высшая школа, 1989.- 544 с.
- Человек. Медико-биологические данные. Международная комиссия по радиологической защите. Публикация 23.- М.: Медицина, 1977.- 496 с.
- Olsen C. R., Stevens A. E., McIlroy M. B. Rigidity of trachea and bronchi during muscular constriction // J. Appl. Physiol.- 1967.- **23**, N 1.- P. 27-34.
- Ляв А. Математическая теория упругости.- М.-Л.: ОНТИ, 1935.- 674 с.
- Абрамовиц Н., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.- М.: , 1979.- 832 с.
- Чудновский В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем.- Киев: Изд-во АН УССР, 1952.- 416 с.