

УДК 534.23

# ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 27.02.2003

Исследованы свойства пьезоэлектрического преобразователя при взаимодействии с задающим генератором ограниченной мощности. В результате анализа наибольшего показателя Ляпунова совокупной системы преобразователь – генератор найдены области реализации трех классов установившихся режимов – стационарных, периодических и хаотических – и определены параметры, при которых они реализуются. Установлено, что хаос может возникнуть только при учете взаимодействия между подсистемами. При идеальном электрическом возбуждении процессы в пьезоэлектрическом преобразователе не имеют хаотических установившихся режимов.

Досліджені властивості п'єзоелектричного перетворювача при взаємодії з задаючим генератором обмеженої потужності. В результаті аналізу найбільшого показника Ляпунова сукупної системи перетворювач – генератор знайдені області реалізації трьох класів усталених режимів – стаціонарних, періодичних і хаотичних – та визначені параметри, при яких вони реалізуються. Встановлено, що хаос може виникнути тільки при урахуванні взаємодії між підсистемами. При ідеальному електричному збудженні процеси у п'єзоелектричному перетворювачі не мають хаотичних усталених режимів.

Properties of a piezoceramic transducer at the interaction with a generator of limited power-supply are investigated. As a result of analysis of the largest Lyapunov exponent for the total system transducer – generator, the regions for three classes of steady state regimes – stationary, periodical and chaotic – are determined and the parameters for their realization are found. It is shown that chaos may originate only at accounting for the interaction between the subsystems. Under ideal electric supply, the processes in piezoceramic transducer do not have chaotic steady state regimes.

## ВВЕДЕНИЕ

Функционирование ответственных элементов многих технических устройств, в частности преобразователей, основано на эффекте связанности механического и электрического полей в пьезокерамических средах [1–6]. В связи с этим создание общей математической теории для описания сопряженных электроупругих процессов, протекающих в таких средах при самых общих условиях механического и электрического нагружения, является важным в научном и прикладном аспектах. Линейная теория пьезоэлектричества развита в работах А. Ф. Улитко и его школы [1–3, 5, 6]. Однако в этих и других публикациях по данной тематике рассматриваются только задачи о поведении электроупругих в случаях вынужденных и свободных колебаний, когда пьезокерамика находится под действием силовых и электрических полей заданного вида. При этом вопрос о влиянии диссипации и излучения энергии при колебаниях тела на режимы работы устройства, создающего указанное воздействие, остается вне рассмотрения.

Вместе с тем известно, что если электроупругое тело нагружено на среду с сопротивлением, как это имеет место при работе гидроакустических излучателей, то излучение энергии вовне вызывает изменение электрического поля в генераторе, по сравнению со случаем, когда потерь нет. Это изме-

нение может быть существенным и породить новые динамические режимы или являться пренебрежимо малым, в зависимости от того, какова мощность задающего генератора по сравнению с излучаемой мощностью. Исследование специфических эффектов в динамике пьезокерамического тела и в функционировании задающего генератора, обусловленных “чувствительностью” совокупной системы к излучению энергии, представляет несомненный научный интерес. Этот случай относится к задачам так называемого “ограниченного” или “неидеального” возбуждения пьезокерамических тел. При этом возбуждающий генератор имеет ограниченную мощность, сравнимую с мощностью, излучаемой или потребляемой телом при его деформации.

Данная статья посвящена исследованию задачи об ограниченном возбуждении пьезокерамического тела простейшего вида – стержневого излучателя, работающего в среде с сопротивлением. Ее тематику можно определить как исследование взаимодействия физических подсистем, получившего название эффекта Зоммерфельда – Кононенко [7–16], для случая связи колеблющегося пьезокерамического излучателя и возбуждающего эти колебания генератора электрического тока, имеющего ограниченную мощность. С этой целью построена новая математическая модель, описывающая процесс взаимодействия излучателя, нагру-

женного на гидросреду с сопротивлением, и генератора. Связанность процессов в преобразователе и источнике энергии – генераторе – приводит к качественно новым эффектам в их динамике, которые нельзя выявить, исследуя задачу об идеальном возбуждении. Прежде всего, речь идет о возможности установления хаотических режимов, выйти из которых без дополнительного внешнего воздействия невозможно. Хаотические режимы взаимодействия, к которым система приходит с течением времени, являются по своей сути асимптотическими. Обычно для того, чтобы понять динамику физической системы, анализируются ее установившиеся режимы, так как считается, что они реализуются на практике [10, 17, 18]. Если установившиеся режимы в системе – хаотические, то понимание ее динамики связано не с регулярными, а с хаотическими процессами. Отметим, что если не рассматривать хаотическое поведение объекта, зачастую невозможно ответить на вопросы о его долговечности, надежности и прочности.

Известно, что фазовый портрет (т. е. траектория движения в вымышленном пространстве, где роль координат играют основные переменные, описывающие поведение системы) для хаотического режима является сложным геометрическим объектом. В отличие от него, регулярные фазовые портреты сравнительно просты (точка, замкнутая линия, тор). Фазовые траектории регулярных режимов диссипативных систем отличают общее сжатие и локальная устойчивость, а хаотических – общее сжатие и локальная неустойчивость. Траектории хаотических режимов очень чувствительны к малейшему изменению начальных условий. Будучи близкими в начальный момент, с течением времени они экспоненциально разбегаются друг от друга. Если в динамической системе наблюдается хаос, то ее поведение становится, по сути, непредсказуемым, так как невозможно предсказать точку фазового пространства, которой будет соответствовать искомое решение через заданный промежуток времени, если учесть, что реальная точность задания начальных условий и параметров задачи всегда ограничена либо точностью измерительной аппаратуры, либо точностью вычислительных машин. Тем не менее, всегда можно указать притягивающее множество сложной структуры – хаотический аттрактор, по которому будет двигаться в фазовом пространстве изображающая точка. Кроме того, хаотические режимы от регулярных отличает наличие сплошного спектра.

В данной работе построены фазовые портреты для трех основных классов установившихся режимов взаимодействия – стационарных, периодиче-

ских и хаотических. Проведен сравнительный анализ поведения системы в каждом из них.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В качестве модельной задачи рассмотрим стержневой пьезокерамический преобразователь, к электродам которого приложено электрическое напряжение, возбуждаемое  $LC$ -генератором (рис. 1). Через поверхности стержня  $S_-$  и  $S_+$ , перпендикулярные его оси  $Oz$  (начало координат находится в срединном сечении), происходит излучение звуковых сигналов в жидкость. Исследовать будем продольные колебания круглого стержня длиной  $2h$ , имеющего площадь сечения  $S$  и поляризованного вдоль оси (продольный пьезоэффект).

Согласно теории продольных деформаций [2–4], уравнения состояния в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= s_{33}\sigma_z + d_{33}E_z, \\ D_z &= \epsilon_{33}E_z + d_{33}\sigma_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\epsilon_z$  – продольная деформация;  $\sigma_z$  – механическое напряжение;  $E_z$  – напряженность электрического поля;  $D_z$  – индукция поля;  $s_{33}$  – упругая податливость;  $d_{33}$  – пьезоэлектрическая постоянная;  $\epsilon_{33}$  – диэлектрическая проницаемость.

Ограничиваясь акустическим диапазоном частот, используем уравнения вынужденной электростатики [2–4], которые применительно к рассматриваемой задаче выглядят как

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь  $\Psi$  – электрический потенциал.

Уравнения (1) и (2) дополним соотношением Коши  $\epsilon_z = \partial u / \partial z$  и уравнением колебаний стержня

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где  $u = u(z, t)$  – продольные перемещения стержня;  $\rho$  – его плотность.

Кроме того, учтем граничные условия при колебаниях стержня в среде с импедансом  $\eta_0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\eta_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Psi = \pm V(t) \\ &\text{при } z = \pm h. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $2V(t)$  – разность потенциалов на электродах, соответствующих поверхностям стержня  $S_-$  и  $S_+$ .

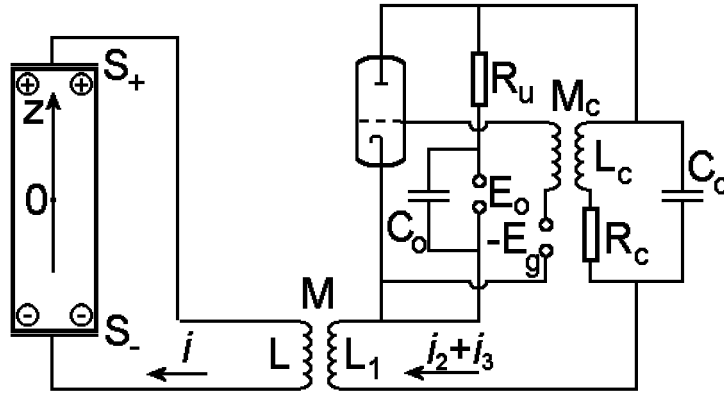


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

Она является неизвестной функцией времени, зависящей от колебаний стержня и тока генератора. Функция  $2V(t)$  – разность потенциалов в электрической цепи, где ток

$$i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t}$$

течет по стержню [2–4]. Ток стержневого преобразователя  $i$  связан с током генератора  $i_2+i_3$  дифференциальным уравнением

$$2V + L\frac{di}{dt} = M\frac{d(i_2+i_3)}{dt}. \quad (5)$$

Для сравнения отметим, что при отсутствии стержня получаем

$$L\frac{di}{dt} = M\frac{d(i_2+i_3)}{dt}.$$

Таким образом, наличие стержня изменяет распределение напряжения в цепи. Добавление пьезоэлемента эквивалентно добавлению некоторой емкости (входной электрической импеданс стержневого преобразователя может быть рассчитан по так называемой “геометрической емкости”) [2–4]. Ток  $i$  в цепи с преобразователем отличается от тока в цепи без него. Если величина тока  $i$  мала и  $2V \gg Ldi/dt$  (в этом случае  $2V \approx Md(i_2+i_3)/dt$ ), то можно считать реализованными условия идеального возбуждения преобразователя. Если же значение  $2V$  является сравнимым с  $Ldi/dt$ , то условие заданности  $2V(t)$  не выполняется, так как ток  $i$  влияет на режим работы генератора через цепь преобразователя.

Задающий электрический генератор ограниченной мощности в большинстве случаев является автоколебательной системой. Классическим примером автоколебательной системы может служить

ламповый генератор [17, 18]. Запишем уравнения Кирхгофа для каждой ветви тока такого устройства [11, 16]. Для определенности предположим, что генератор работает в мягком режиме:

$$i_a = I_0 + I_1(e_g + De_a) - I_3(e_g + De_a)^3. \quad (6)$$

Здесь  $i_a$  – анодный ток;  $e_g$  – напряжение на сетке;  $e_a$  – напряжение на аноде;  $D$  – проницаемость лампы;  $I_0, I_1, I_3$  – постоянные параметры лампы. Тогда уравнения токов генератора имеют вид

$$i_a = i_1 + i_2 + i_3,$$

$$e_a - E_a + R_a i_1 = 0,$$

$$e_g + E_g - M_c \frac{di_2}{dt} = 0, \quad (7)$$

$$L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 = \frac{1}{C_c} \int i_3 dt,$$

$$e_a + L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 + L_1 \frac{d(i_2+i_3)}{dt} = 0.$$

Система уравнений (6), (7) описывает внутренние процессы в ламповом генераторе. Эти уравнения являются нелинейными относительно  $e_g$ . Поскольку обычно  $D$  – малая величина, то в качестве основной переменной целесообразно оставить  $e_g$ . Введя новую переменную

$$\phi(t) = \int_0^t (e_g - E_g) dt \quad (8)$$

(здесь  $-E_g$  – постоянная составляющая  $e_g$ ), получим нелинейное уравнение относительно  $\phi$ :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = a_1 \frac{d\phi}{dt} + a_2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - a_3 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^3, \quad (9)$$

где

$$a_1 = \frac{M_c}{L_c C_c} \left[ I_1 - \frac{R_c R_a C_c - L_c}{R_a (M_c - D L_c)} + \frac{R_c L_1}{R_a^2 M_c} - 3 I_3 (E_g)^2 \right];$$

$$a_2 = 3 \frac{M_c I_3 E_g}{L_c C_c}; \quad a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c};$$

$\omega_0^2 = (R_a + R_c) / (R_a L_c C_c)$  – квадрат частоты генератора в линейной теории.

Если генератор связан с электрической цепью преобразователя, то последнее уравнение системы (7) изменяется на следующее:

$$e_a + L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 + L_1 \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} = M \frac{di}{dt}. \quad (10)$$

Теперь для внутренних процессов в генераторе должно выполняться уравнение

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = a_0 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t), \quad (11)$$

где

$$a_0 = a_1 - \frac{M^2 R_c}{L_c C_c L R_a^2}; \quad a_4 = \frac{2 M M_c}{L R_a L_c C_c}.$$

Уравнение (11) связано с соотношением (5). Следовательно, процесс генерации напряжения  $2V(t)$  описывается системой уравнений четвертого порядка (11), (5), где величина  $i$  зависит от механических деформаций, происходящих в пьезокерамическом стержне. Для деформаций и электрического поля в стержне имеем систему уравнений

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где  $c = [\rho s_{33}(1-k^2)]^{-1/2}$  – скорость продольных сопряженных волн в стержне;  $k = d_{33}(\epsilon_{33} s_{33})^{-1/2}$ .

Представим продольные колебания стержня в виде суммы по собственным модам колебаний:

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i z. \quad (13)$$

Здесь  $\lambda_i$  – корень уравнения

$$\lambda_i h \cos \lambda_i h - k^2 \sin \lambda_i h = 0.$$

Для напряжения  $\Psi$  справедливо соотношение [2–4]

$$\Psi(z, t) = f(t)z + \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)} \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i z. \quad (14)$$

При этом протекающий через стержень ток  $i$  будет

$$i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t} = S \epsilon_{33}(1-k^2) \dot{f} =$$

$$= S \epsilon_{33} \frac{1-k^2}{h} \left[ \dot{V} - \frac{k^2}{d_{33}(1-k^2)} \sum_{i=1}^N \dot{f}_i \sin \lambda_i h \right]. \quad (15)$$

Используя граничные условия (4), приходим к следующим соотношениям для собственных мод колебаний:

$$-\frac{s_{33} h \eta_0}{d_{33}} \sum_{i=1}^N \dot{f}_i(t) \sin \lambda_i h = V(t), \quad (16)$$

$$i = \frac{S \epsilon_{33}(1-k^2)}{h} \dot{V}(t) + \frac{\epsilon_{33} k^2}{h^2 \eta_0} V(t). \quad (17)$$

Подставив эти выражения в соотношение (5), получаем, что напряжение  $2V(t)$ , прикладываемое к электродам преобразователя, определяется как решение следующей системы уравнений четвертого порядка:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = a_1 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t), \quad (18)$$

$$\ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) = a_5 \phi + a_6 \dot{\phi} - a_7 \dot{V}(t).$$

Здесь

$$a_5 = -\frac{M \omega_1^2 R_c (R_a + R_c)}{2 M_c R_a L_c}; \quad a_6 = -\frac{M \omega_1^2 R_c}{2 M_c R_a};$$

$$a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 h S (1-k^2)}; \quad \omega_1^2 = \frac{2h}{L S \epsilon_{33} (1-k^2)}.$$

После нахождения  $V(t)$ , продольные колебания стержня

$$u(t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i z$$

определяются из уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{d_{33}}{s_{33} h \rho} V(t) \delta(z-h) +$$

$$+ \frac{d_{33}}{s_{33} h \rho} V(t) \delta(z+h), \quad (19)$$

где  $\delta(z)$  – функция Дирака.

Если пренебречь эффектом Зоммерфельда – Кононенко, т.е. обратным влиянием механических и электрических колебаний преобразователя на функционирование генератора ( $a_4 = 0$ ), система уравнений (18) распадается на два уравнения. Одно из них является уравнением автоколебаний, а второе – линейным уравнением, описывающим

колебательные процессы в стержне. В этом случае  $\phi(t)$  и  $V(t)$  всегда будут регулярными функциями времени. Таким образом, и функционирование генератора и излучение волн преобразователем в акустическую среду будут соответствовать регулярным (хотя, возможно, и достаточно сложным) процессам.

Если же  $a_4 \neq 0$ , то в системе (18) становятся возможными не только регулярные, но и хаотические режимы. Это обусловлено тем, что нелинейная система (18) имеет размерность четыре. Напомним, что хаотизация движений в гладкой (дифференцируемой) нелинейной динамической системе может происходить, начиная с размерности три [10, 17, 18]. При этом  $V(t)$  может быть хаотической функцией времени, и преобразователь будет порождать в акустической среде хаотические волны. Таким образом, принципиальная возможность существования хаотических режимов в генераторе и возбуждения хаотических волн в акустической среде обусловлена наличием эффекта Зоммерфельда – Кононенко.

**2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Для определения возможных установившихся режимов взаимодействия в системе (18) введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\phi\omega_0}{E_g}, & \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta, \\ \beta &= \frac{V}{E_g}, & \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma, & \tau &= \omega_0 t. \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда исходная система переписется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 - \alpha_4\beta, \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\alpha_0\beta + \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_7\gamma, \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta, & \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \omega_1^2/\omega_0^2; & \alpha_1 &= a_0/\omega_0; & \alpha_2 &= a_2E_g/\omega_0; \\ \alpha_3 &= a_3E_g^2/\omega_0; & \alpha_4 &= a_4/\omega_0; & \alpha_5 &= a_5/\omega_0^3; \\ \alpha_6 &= a_6/\omega_0^2; & \alpha_7 &= a_7/\omega_0. \end{aligned}$$

Поскольку система уравнений (21) является нелинейной дифференциальной системой, допускающей в общем случае только численное решение,

проведем численный эксперимент. Пусть параметры генератора имеют следующие значения [3,4,6]:

$$\begin{aligned} E_c &= 700 \text{ В}, & E_a &= 2000 \text{ В}, \\ I_1 &= 6.5 \cdot 10^{-5} \text{ А/В}, & I_3 &= 5.184 \cdot 10^{-9} \text{ А/В}^3, \\ D &= 0.015, & R_a &= 160 \text{ Ом}, \\ R_c &= 10 \text{ Ом}, & L_c &= 0.094 \text{ Гн}, & C_c &= 1.0465 \text{ мкФ}, \\ M_c &= 0.275 \text{ Гн}, & M &= 1 \text{ Гн}, & L &= 100 \text{ Гн}. \end{aligned}$$

Здесь  $X$  – безразмерный переменный бифуркационный параметр. Эти данные соответствуют таким величинам коэффициентов системы (21):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.995, & \alpha_1 &= 0.0535, & \alpha_2 &= 0.63X, \\ \alpha_3 &= 0.21X, & \alpha_4 &= 0.103, & \alpha_5 &= -0.0604, \\ \alpha_6 &= -0.12, & \alpha_7 &= 0.01, \\ \xi(0) &= \zeta(0) = 0.1, & \beta(0) &= \gamma(0) = 0. \end{aligned}$$

Установившиеся режимы, реализующиеся в системе (18), соответствуют асимптотическим траекториям в фазовом четырехмерном пространстве  $(\xi, \zeta, \beta, \gamma)$ . Асимптотические траектории могут представлять собой точку (размерность ноль), замкнутую кривую (размерность единица), тор (размерности два и три) или странный аттрактор (фрактальная размерность). Фиксированные точки (точки равновесия) соответствуют стационарным решениям системы (18), замкнутые кривые – периодическим (незамкнутые кривые на торе – квазипериодическим) решениям, а странные аттракторы отражают поведение хаотических решений.

Параметр  $X$  варьировался с целью нахождения всех возможных установившихся режимов. Для численного интегрирования системы уравнений (21) применялся метод Рунге – Кутты четвертого порядка с коррекцией интервала интегрирования по методу Дорманда – Принса [10, 12–14]. В процессе численного интегрирования погрешность счета не превышала  $O(10^{-9})$ . Для того, чтобы исключить влияние переходных режимов на параметры установившихся режимов, документирование результатов осуществлялось после того, как безразмерное время достигало достаточно большого значения:  $\tau > 10^5$ .

Одним из главных критериев существования хаотических режимов в динамической системе является наличие положительных показателей Ляпунова [10, 17, 18], характеризующих процесс “разбегания” траекторий в фазовом пространстве по различным направлениям. Если траектории имеют

довольно близкие начальные параметры, то с течением времени они могут:

- 1) сблизиться (если стремятся к одному и тому же предельному циклу);
- 2) сохранить расстояние между собой (если находятся на разных предельных циклах);
- 3) удалиться друг от друга (если они не стремятся к устойчивому регулярному движению).

В последнем случае траектории “забудут” свою близость в начальный момент времени. При этом они могут расходиться очень далеко, снова сблизиться и т.д. Хаотические решения обладают свойством локальной неустойчивости. С математической точки зрения это выражается в том, что они имеют хотя бы один положительный максимальный показатель Ляпунова  $\lambda$  [10, 17, 18]:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{y(t)}{y(0)} \right|.$$

Здесь  $y(0)$  – расстояние между исследуемой траекторией и близкой к ней траекторией в начальный момент времени;  $y(t)$  – расстояние между ними в момент времени  $t$ .

На рис. 2 показана зависимость максимального показателя Ляпунова  $\lambda \neq 0$  от значений параметра  $X$ , определенного по алгоритму Бенеттина [19]. При тех параметрах, когда максимальный показатель Ляпунова становится больше нуля, в системе устанавливаются хаотические режимы. Из рисунка очевидно, что в системе имеются пять таких областей ( $3.95 \leq X \leq 5.14$ ,  $7.26 \leq X \leq 9.00$ ,  $11.9 \leq X \leq 12.5$ ,  $16.8 \leq X \leq 17.4$  и  $19.0 \leq X \leq 20.0$ ), в которых реализуются хаотические установившиеся режимы. Как следует из графика, при  $1.00 \leq X < 3.95$ ,  $5.14 \leq X < 7.26$ ,  $9.00 < X < 11.9$ ,  $12.5 \leq X < 16.8$  и  $17.4 \leq X < 19.0$  решения максимальный показатель Ляпунова системы (18) равен нулю. Следовательно, здесь система (18) имеет периодические (квазипериодические) решения. Как показывают более детальные численные исследования, переход от регулярных режимов к хаотическим осуществляется через перемежаемость.

На рис. 3 представлен максимальный показатель Ляпунова  $\lambda \neq 0$ , вычисленный при постоянном значении  $X = 7.5$ , но при варьировании параметра  $\alpha_7$ , связанного с потерями энергии при колебаниях преобразователя в среде с сопротивлением. В интервалах значений  $0.001 < \alpha_7 < 0.012$  и  $0.028 < \alpha_7 < 0.146$  в системе реализуются хаотические режимы взаимодействия.

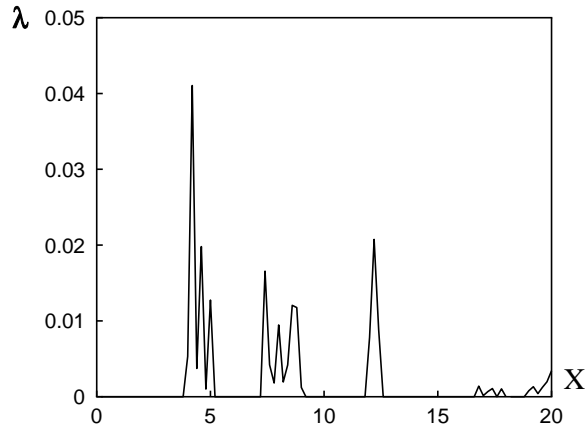


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова от  $X$

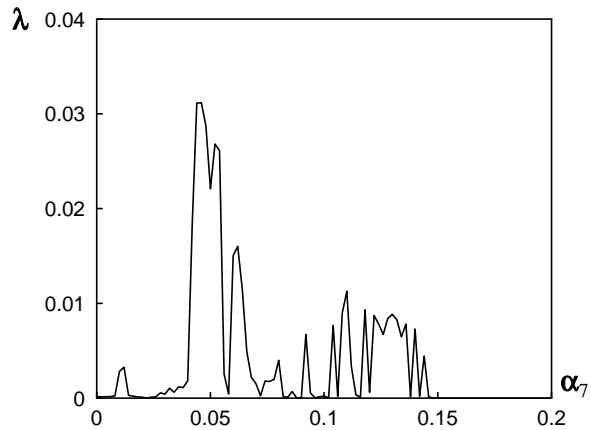


Рис. 3. Зависимость максимального показателя Ляпунова от  $\alpha_7$

На рис. 4, а показана проекция в трехмерном пространстве  $(\beta, \gamma, \xi)$  хаотического аттрактора, который реализуется в системе при  $\alpha_7 = 0.05$ ,  $X = 7.5$ . Соответствующие временные реализации  $\xi(\tau)$  и  $\beta(\tau)$  приведены на рис. 4, б, в. Видно, что такой излучатель транслирует в окружающую среду хаотический сигнал, соответствующий временной функции  $\beta(\tau)$ .

Для сравнения на рис. 5 приведены аналогичные характеристики при работе излучателя и генератора в рассматриваемом диапазоне параметров в случае пренебрежения обратным влиянием излучателя на генератор ( $\alpha_4 = 0$  – мощность источника энергии неограничена). Как видно из сравнения графиков, связанность или обратное воздействие излучателя порождает хаос в системе. Кроме того, учет взаимодействия приводит к зна-

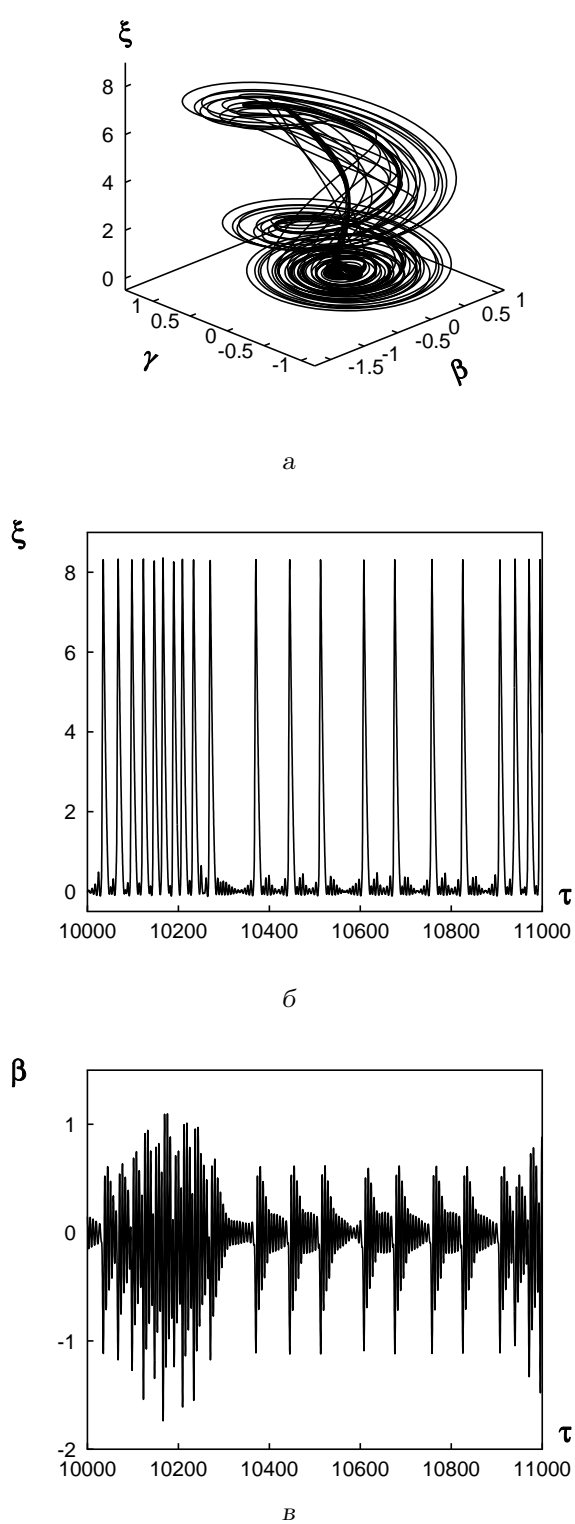


Рис. 4. Проекция странного аттрактора и временные реализации переменных при  $X=7.5$  и  $\alpha_7=0.05$

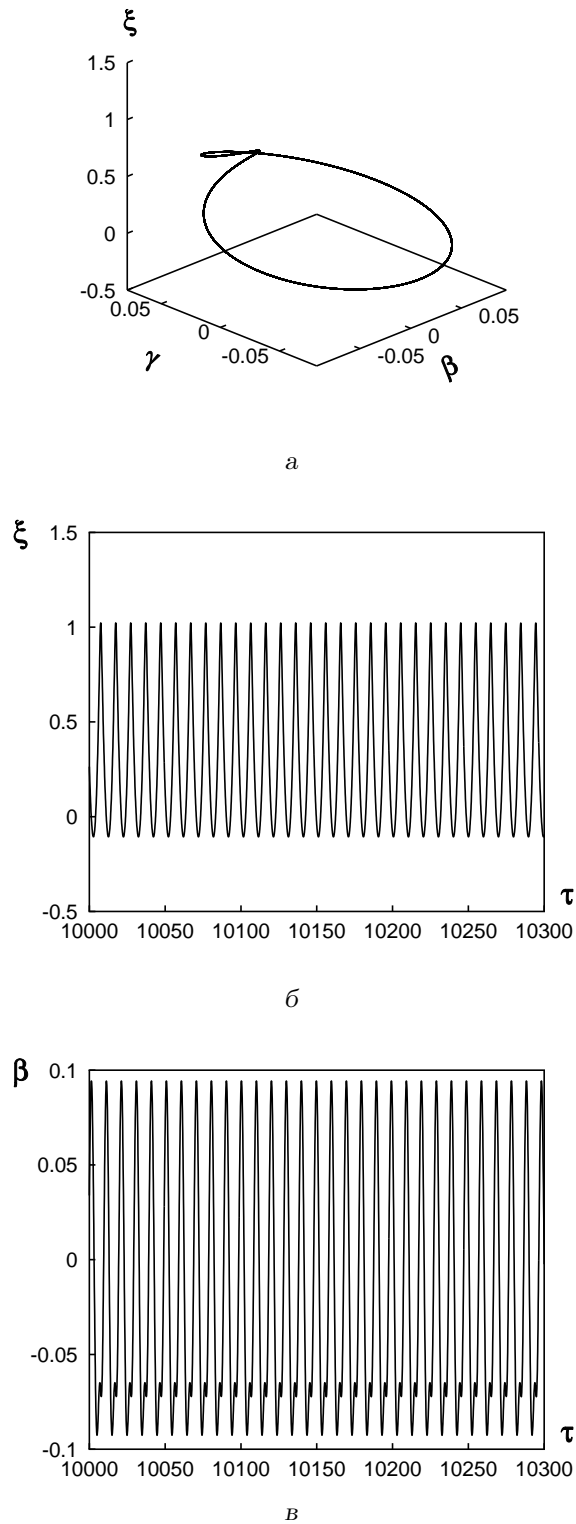
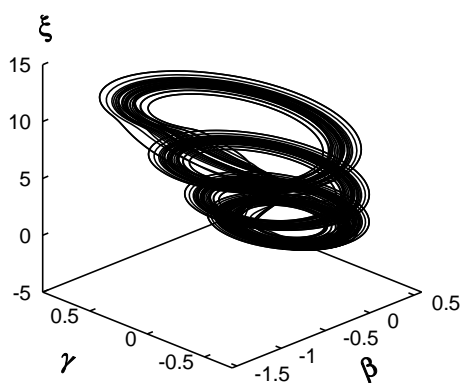
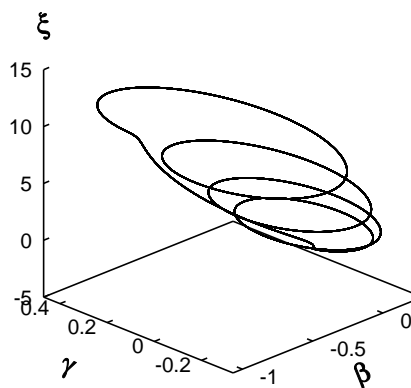


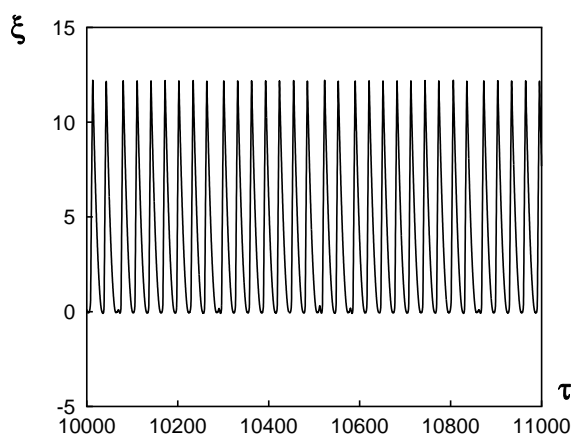
Рис. 5. Проекция замкнутой регулярной траектории и временные реализации переменных при  $X=7.5$ ,  $\alpha_7=0.05$  и  $\alpha_4=0$



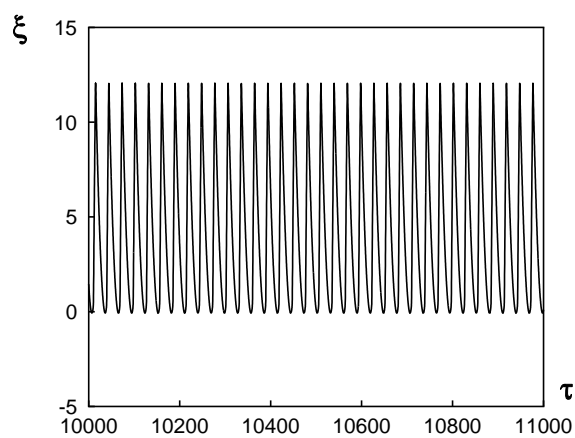
a



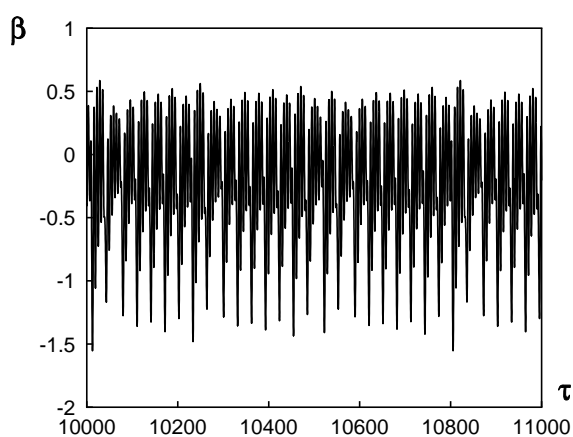
a



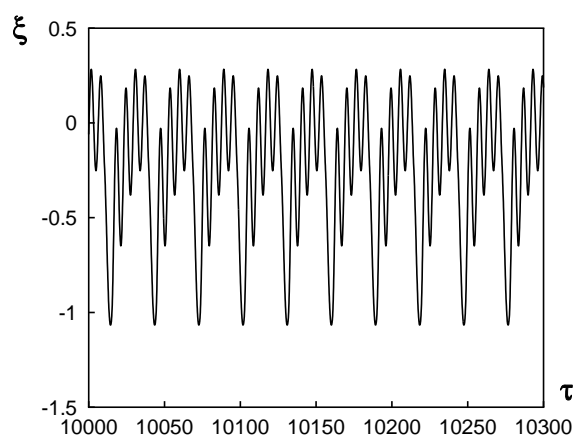
б



б



в

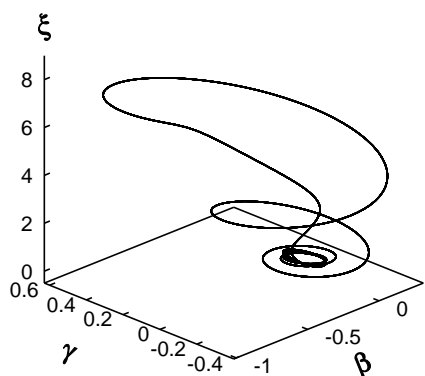


в

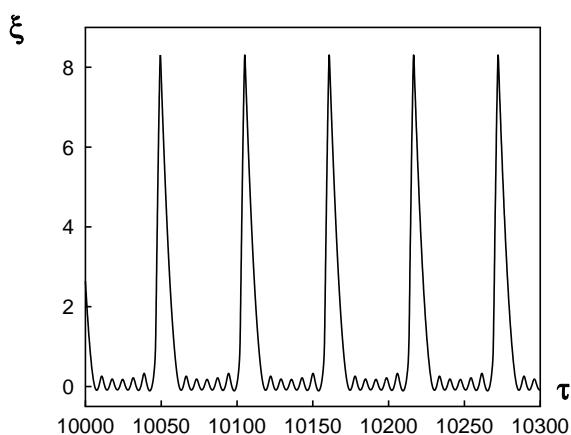
Рис. 6. Проекция странного аттрактора и временные реализации переменных при  $X=12.3$  и  $\alpha_7=0.05$

Рис. 7. Проекция замкнутой регулярной траектории и временные реализации переменных при  $X=12.3$ ,  $\alpha_7=0.05$  и  $\alpha_4=0$

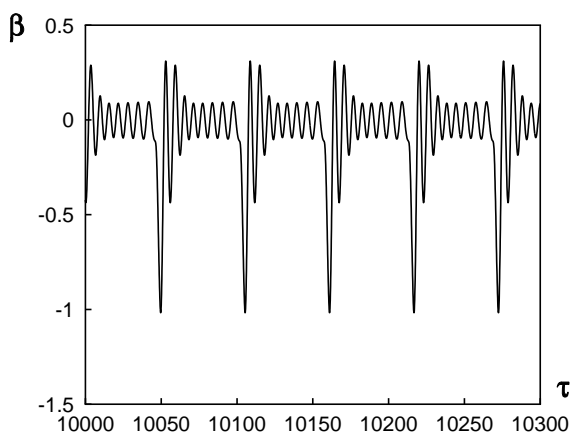




а



б



в

Рис. 8. Регулярная замкнутая траектория и временные реализации переменных при  $X=7.5$ , а  $\alpha_7=1.8$

чительному (на порядок) росту амплитуд колебаний напряжения в генераторе и сигнала излучателя на одних временных интервалах и значительному уменьшению на других. Таким образом, качественно изменяется сигнал, вырабатываемый излучателем. Для связанной системы он напоминает сигнал в режиме быстрого разряда [5], т. е. существуют временные интервалы, на которых сигнал имеет большую амплитуду, а затем наступает мелкое “дрожание” вокруг нуля, когда напряжение на пьезоизлучателе “замирает” вокруг нейтрального значения.

Другой вид хаотического аттрактора и соответствующего ему регулярного предельного цикла при  $\alpha_4=0$  показаны на рис. 6 и 7. Эти графики получены при  $X=12.3$ ,  $\alpha_7=0.05$ . Для этой комбинации параметров учет взаимодействия задающего генератора и пьезокерамического преобразователя приводит лишь к незначительному изменению амплитуды колебаний напряжения в генераторе, однако вновь существенно влияет на частоту сигнала, порождая хаос.

Изменение регулярных характеристик предельного цикла, вызванное взаимодействием, показано на рис. 8. Расчет проводился при  $X=7.5$ ,  $\alpha_7=1.8$ . Это соответствует увеличению потерь энергии при работе излучателя в 36 раз, по сравнению со случаем, представленным на рис. 4 ( $\alpha_7=0.05$ ). В случае больших потерь энергии установившийся режим становится регулярным. Заметим, что максимальные значения амплитуд сигналов не претерпевают существенного изменения, по сравнению с рис. 4. Однако при малых потерях и хаотическом режиме взаимодействия за этот же временной интервал интенсивные сигналы разрядного типа наблюдаются в четыре раза чаще.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе построенной математической модели обнаружен ряд новых эффектов, обусловленных процессом взаимодействия колебательных режимов пьезокерамического излучателя и задающего электрогенератора. В частности, показано, что хаотические установившиеся режимы могут появляться только вследствие взаимодействия между автоколебательной системой электрогенератора и излучателем, описываемым линейными соотношениями. В каждой из подсистем по отдельности хаоса в принципе быть не может.

Показано, что демпфирование и обратная связь, приводя к появлению хаоса, существенно изменяют частотные характеристики как излучателя, так и генератора, обуславливая сплошность их

спектров.

Полученные результаты могут быть применены при анализе непериодических режимов работы электродинамических, электромагнитных и пьезокерамических вибраторов с ограниченным возбуждением.

1. Баженов В. М., Улитко А. Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. мех.– 1975.– **11**, N 1.– С. 22–27.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989.– 277 с.
3. Улитко А. Ф. Векторное разложение в пространственной теории упругости.– К.: Академперіодика, 2002.– 342 с.
4. Auld B. A. Acoustic fields and waves in solids.– New York: Wiley, 1973.– 837 p.
5. Улитко А. Ф. Сопряженные волновые процессы в пьезокерамических телах при электрическом разряде // Акуст. вісн.– 1999.– **2**, N 1.– С. 60–73.
6. Zharii O. Yu. Normal mode expansions in dynamic electroelasticity and their application to electromechanical energy conversion // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– **91**, N 1.– P. 57–68.
7. Sommerfeld A. Beitrage zum dynamischen ausbau der festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.– 1902.– **46**.– P. 391–394.
8. Timoshenko S. Vibration problems in engineering.– New York: Van Nostrand, 1928.– 480 p.
9. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением.– М.: Наука, 1964.– 256 с.
10. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Бояршина Л. Г. и др. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость.– К.: Наук. думка, 1992.– 184 с.
11. Кононенко В. О., Краснополяская Т. С. Ламповый генератор в системе возбуждения механических колебаний // Вибротехника.– 1977.– **28**, N 4.– С. 105–120.
12. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply // 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust: vol. 1.– Prague: Czechoslovak Acad. Sci, 1991.– P. 181–184.
13. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos.– 1993.– **3**.– P. 387–395.
14. Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids & Struct.– 1994.– **8**.– P. 1–18.
15. Krasnopolskaya T. S. Acoustic chaos caused by Sommerfeld effect // J. Fluids & Struct.– 1994.– **8**.– P. 803–815.
16. Краснополяская Т. С. Автономное возбуждение механических колебаний электродинамическим вибратором // Прикл. мех.– 1977.– **13**, N 2.– С. 108–113.
17. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания.– М.: Наука, 1987.– 424 с.
18. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.– New York: Springer-Verlag, 1983.– 459 p.
19. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. A.– 1976.– **14**.– P. 2338–2345.