Моделирование в экономике при неполной информации

Руденко Л.И.

Методы исследования и моделирования социально-экономических систем. Одним из главных методов исследования социально-экономических систем является математическое моделирование. При этом главными задачами моделирования являются *анализ* экономических объектов и процессов, экономическое *прогнозирование*, выработка управленческих *решений*. Полученные путем моделирования результаты и решения не являются окончательными, подлежат детальному анализу и служат основой для планирования исполнительных акций. Поэтому математические модели являются главными компонентами *систем поддержки принятия решений*, в которых главная роль отводится людям – лицам, принимающим решения. Для наиболее эффективной работы СППР необходимо, чтобы используемая модель или комплекс моделей были адекватными, т.е. соответствовали моделируемому объекту или процессу.

Общая схема процесса моделирования состоит из следующих этапов.

1. *Постановка и анализ экономической проблемы***:** выделение важнейших черт и свойств моделируемого объекта, изучение его структуры и взаимосвязей компонент; формулировка сущности проблемы, анализ ограничений и степени полноты информации.

2. *Выбор типа математической модели и ее построение***:** формализация экономической проблемы и представление ее в виде математических зависимостей наиболее подходящего типа. Для этого рассматриваются различные классы моделей и возможности их применения к конкретной задаче. Зачастую возникает ситуация, когда задача может быть формализована в известном и хорошо изученном классе моделей, однако исследователь не располагает необходимой информацией, чтобы четко сформулировать цели и ограничения. В этом случае говорят о *моделях с неполной информацией*.

3. *Математический анализ свойств модели***:** свойства построенной модели и ее решений, их существование и единственность могут быть исследованы математическими приемами. Однако во многих случаях аналитическое исследование невозможно ввиду сложности моделируемых социально-экономических объектов или плохой формализуемости задачи.

При невозможности аналитического решения задачи рассматриваются способы ее численного исследования и имитационного моделирования, что предполагает, прежде всего, сбор и подготовку необходимой информации.

4. Информационное обеспечение **задачи:** определение требуемого качества необходимой информации (статистические данные, извлечение информации из баз данных), выявление источников информации и способов ее получения, предварительная обработка, оценка достоверности и представление информации в требуемом формате.

5. Вычислительные эксперименты: разработка алгоритмов численного решения задачи; выбор программного обеспечения и разработка вычислительных процедур, оценка их эффективности и надежности; разработка программы и плана вычислительного эксперимента; непосредственное проведение расчетов, реализация модельного эксперимента.

6. Анализ результатов: анализ полноты и правильности полученных результатов, их соответствия моделируемой задаче и принятие решения о дальнейшем проведении или завершении эксперимента; формулировка практических выводов о применимости результатов и их внедрение.

На каждом этапе моделирования решаются свои задачи. Все этапы взаимосвязаны, и при выполнении каждого последующего этапа могут быть выявлены недостатки и ошибки предыдущего. Завершающий этап анализа результатов моделирования может привести к выводу о неадекватности модели и необходимости поиска других средств формализации. Поэтому очень важно, чтобы в самом начале исследования были четко определены средства моделирования и методы исследования.

Экономико-математические методы и модели. Характерной особенностью моделирования социально-экономических систем является комплексное использование различных методов. Необходимость исследования и решения экономических проблем стала причиной развития в рамках различных научных дисциплин современных направлений, предоставивших строгое научное обоснование, методологию и аппарат исследования. В настоящее время широко используются следующие **экономико-математические методы**:

- *методы математической статистики*: выборочный метод, корреляционный и регрессионный анализ, дисперсионный анализ, факторный анализ, анализ динамики, теория индексов и другие;
- *методы математической экономики и эконометрии*: межотраслевые балансы, теория производственных функций, анализ спроса и потребления, теория экономического роста, региональный анализ и глобальное моделирование;
- *методы экономической кибернетики*: системный анализ, теория управляющих систем, теория экономической информации и другие;
- *методы исследования операций и принятия оптимальных решений*: математическое программирование (линейное и нелинейное программирование, дискретное программирование, динамическое программирование, сепарабельное программирование, геометрическое программирование); сетевые методы планирования и управления; методы теории игр, теории расписаний, теории управления запасами, теории массового обслуживания и многие другие;

- методы компьютерного моделирования: планирование экспериментов, имитационное моделирование, деловые игры.

Перечисленные методы являются инструментом экономико-математического моделирования, а результатом его являются собственно *модели*. По ряду признаков можно выделить следующие *классы экономико-математических моделей:*

- *по назначению – теоретические* (аналитические) и *прикладные* модели, предназначенные соответственно для анализа общих закономерностей экономических систем и явлений или для решения конкретных задач управления и прогнозирования;
- *по цели – оптимизационные* модели (выбор наилучшего варианта из множества возможных альтернатив); *балансовые* модели (распределение и использование ресурсов); *трендовые* модели (изучение развития системы на основе уравнения тенденции – тренда); *имитационные* модели (компьютерная имитация систем) и другие;
- *по степени агрегированности – макроэкономические* модели (изучение экономики в целом) и *микроэкономические* модели (изучение субъектов экономики и единиц экономической системы);
- *по характеру подхода – дескриптивные* модели (описание и объяснение наблюдаемых явлений) и *нормативные* (выработка предписаний и рекомендуемых решений);
- *по фактору неопределенности – детерминированные* модели, в которых результат однозначно определен исходными условиями, и *стохастические* (вероятностные) модели, учитывающие влияние случайных факторов;
- *по фактору времени – статические* и *динамические* модели;
- *по степени информированности – полностью определенные* модели (известны все компоненты и существуют алгоритмы поиска решений) и модели *с неполной информацией*, или *частично заданные* модели (имеется частичная информация и начальные данные).

Следует отметить, что именно степень полноты информации определяет в значительной мере выбор типа модели.

*Системы поддержки принятия решений***.** Как было уже отмечено вначале, моделирование социально-экономической задачи является основным этапом в процессе выбора решения, а математическая модель (модели) представляет основную составляющую системы поддержки принятия решений.

Задачи принятия решений формулируются и требуют исследования практически во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Принятие решений (ПР) как область научных исследований имеет тесные междисциплинарные связи с математическим моделированием, исследованием операций, системным анализом, искусственным интеллектом, сохраняя за собой разработку *методов принятия решений*, предписывающих *правила рационального выбора*.

Под принятием решения обычно понимают *выбор наиболее предпочтительного варианта* достижения поставленной цели из некоторого множества вариантов. Ответственным за выбор решения и все его последствия является ЛПР – лицо или группа лиц, принимающих решения. Поскольку перебор различных вариантов, построение и оценка соответствующих им решений представляет собой весьма трудоемкую задачу, необходимо наличие автоматизированных средств поддержки – специальных компьютерных программ. *Системой поддержки принятия решений* (СППР) называют систему, предназначенную для принятия решения в некоторой достаточно узкой области, на основе имеющихся *данных, математических моделей* и *знаний.*

Основными компонентами СППР являются:

- *база моделей*, содержащая набор формальных математических моделей различных классов;
- *подсистема методов* принятия решений, позволяющих сравнивать варианты, т.е. подсистема методов работы с ЛПР;
- *база данных*, в которой хранятся необходимые данные в требуемом формате;
- *база знаний* и средства логического вывода;
- *подсистема организации диалога* с ЛПР, управляющая работой всей системы.

В базу моделей включаются модели математической статистики, математического программирования, исследования операций и другие, которые позволяют описать цели и ограничения. ЛПР выбирает наиболее подходящие из имеющихся моделей. Если исследуемая социально-экономическая задача допускает полное формальное описание в рамках одной из моделей, то в дальнейшем на ее основе системой формируются решения и производятся оценки. Результаты предъявляются ЛПР для окончательного выбора.

Широкий класс задач ПР может быть представлен в виде задачи условной оптимизации:

$$extr\ f(\boldsymbol{x})\ /\ \boldsymbol{x} \in X \subset \mathbf{R}^n,$$

где $f(\boldsymbol{x})$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ - целевая функция, выражающая эффективность принимаемого решения, X - множество допустимых решений. В зависимости от типов целевой функции и ограничений получают различные классы оптимизационных задач (непрерывные и дискретные, одно- и многокритериальные, линейные и нелинейные и т.п.). В настоящее время эти задачи систематизированы, достаточно хорошо изучены, предложены разнообразные методы их исследования и эффективные алгоритмы отыскания оптимальных решений.

Однако при моделировании задачи ПР возникают трудности в выборе адекватной математической модели, приведении ее к виду экстремальной задачи на основе имеющейся информации о предметной области. Зачастую эта информация является неполной, недоступной исследованию, противоречивой, связанной с неопределенностью.

Для того чтобы сделать применимыми модели, хранящиеся в базе моделей, в некоторых случаях можно сделать попытку восстановить недостающие компоненты модели на основе имеющейся информации. В этом случае СППР расширяется за счет включения в нее *подсистемы синтеза модели.*

В дальнейшем рассмотрим процесс моделирования и принятия решений на основе линейной модели при неполной информации.

Принятие решений при неполной информации на основе линейной модели. Пусть скалярная задача оптимизации может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования (ЛП)

$$\max(C,x)\big|x \in X \subset R^n,$$

$$C \in R^n,\ X : Ax \le b,\ A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n},\ b^T \in R^m, \tag{1}$$

где $f(x) = (C,x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ – линейная целевая функция, $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ – матрица условий, $b^T = (b_1,\ldots,b_m)^T$ – вектор ограничений. В этом случае будем говорить о *задаче принятия решений на основе линейной модели*:

– требуется отыскать множество $\left\{x^*\right\}$ оптимальных решений, доставляющих экстремум (в данном случае максимум) целевой функции $f(x) = (C,x)$ на множестве допустимых решений *X*.

Предположим, что при исследовании некоторой социально-экономической задачи построение математической модели затруднительно или даже невозможно ввиду отсутствия полной информации о векторе коэффициентов целевой функции и (или) коэффициентах линейных неравенств в (1). Тем не менее есть все основания предполагать, что задача ПР может быть сформулирована в виде задачи ЛП, компоненты которой истинны, но неизвестны.

В таком случае будем говорить о *слабоопределенной линейной модели принятия решений*, в которой неизвестные компоненты частично заданы некоторой начальной информацией I_0:

– требуется отыскать множество $\left\{x^*\right\}$ отпимальных решений или хотя бы один элемент в нем такой, что:

$$(C,x^*) = \max(C,x)\big|Ax \le b,$$
$$C, A, b : I_0. \tag{2}$$

Можно привести различные постановки задач, допускающие представление в виде (2). Рассмотрим, в частности, **задачу нахождения оптимального плана** $\boldsymbol{x}^*=(x_1,\ldots,x_n)^*$ производства $\boldsymbol{n}$ видов продукции (ассортиментного набора), максимального по суммарной прибыли в условиях ресурсных ограничений:

$$max\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})\ /\ \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b},$$

где вектор цен $\boldsymbol{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ **заранее неизвестен**, матрица условий (технологическая матрица) $\boldsymbol{A}=\left\|a_{ij}\right\|_{mxn}$ полностью определена, а вектор ограничений $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_m)^T$ по каждому типу ресурса задан **частично**.

Начальная информация I_0 может быть представлена различными способами, среди которых выделим следующие:

1) целевая функция задана частичным бинарным отношением :

$$f = \left\{\langle x,y\rangle\big|\left(f(x) < f(y)\right) \vee \left(f(x) > f(y)\right), \forall x,y \in D \subset X\right\},$$

где результат сравнения значений целевой функции считается известным для любой пары вариантов решений из множества *D*;

2) множество допустимых решений задано перечислением точек двух конечных множеств

$$X_1 \subset X; X_2 \subset R^n \setminus X, X_1 \cap X_2 = \varnothing, R^n \setminus \left\{X_1 \cup X_2\right\} \ne \varnothing.$$

Покажем, что для такого способа задания непротиворечивой начальной информации поиску решения предшествует синтез компонент модели (2), в основу которого положены алгоритмы теории распознавания образов.

Синтез модели. Пусть множество $D = \left\{x^1, \ldots x^k\right\}$ упорядочено в соответствии с условием $f\left(x_i\right) > f\left(x_j\right), 1 \le i < j \le k$. Тогда для искомого набора коэффициентов *C* выполняется условие $\left(C, x^i - x^j\right) > 0$ или $\left(C, y^s\right) > 0$, где $y^s = x^i - x^j, 1 \le s \le C_k^2, 1 \le i < j \le k,$ и полученную задачу можно рассматривать как задачу построения разделяющей гиперплоскости $\left(C, y\right) > 0$ по обучающей выборке $\left\{y^s, s = 1, \ldots, C_k^2\right\}$.

Для этого используется алгоритм линейной коррекции с постоянным коэффициентом:

$$C^1 = \begin{cases} C^i при (C^{i-1}, y^i) > 0, \\ C^{i-1} + y^i при (C^{i-1}, y^i) \le 0 \end{cases} \tag{3}$$

где C^0 - произвольно, $i = 1, \ldots, C_k^2, 1 \ldots, C_k^2, \ldots$.

Далее, пусть $X_1 = \left\{x^1, \ldots, x^p\right\} \subset X, X_2 = \left\{y^1, \ldots, y^q\right\} \subset R^n \setminus X.$

Тогда множество допустимых решений может быть задано кусочно-линейной поверхностью $H = \left\{H_1, \ldots, H_l\right\}$ где $H_j = \left(h^j, \hat{y}\right) = 0$ - гиперплоскости, отделяющие каждую точку $y^j \in X_2$ от множества X_1.

Здесь $h^j \in R^{n+1}, \hat{y} \in \left\{\left(x_1^1, \ldots, x_n^1, 1\right), \ldots, \left(x_1^p, \ldots, x_n^p, 1\right), \left(-y_1^j, \ldots, -y_n^j, -1\right)\right\}$

и $\forall \hat{y} \in X : \left(h^j, \hat{y}\right) > 0$, что позволяет использовать алгоритм линейной коррекции для вычисления значений h^j :

$$\left(h^j\right)^i = \begin{cases} \left(h^j\right)^{i-1} \\ \left(h^j\right)^{i-1} + \hat{y}^i \end{cases} \tag{4}$$

где $\left(h^j\right)^0$ - произвольное значение, $i = 1, \ldots, p, 1, \ldots p, \ldots$.

Затем выбирается минимальный набор гиперплоскостей, разделяющих в совокупности множества X_1 и X_2, и позволяющих получить *A* и *b*.

Алгоритмы (3),(4) сходятся при условии непротиворечивости начальной информации, предполагающей линейную отделимость каждого элемента $x^j \in D$ от последующих $\left\{x^{j+1}, \ldots, x^k\right\}, j = 1, \ldots, k-1,$ а также линейную отделимость каждого элемента $y \in X_2$ от множества X_1.

В результате повторных выполнений алгоритмов для различных начальных значений C^0 и $\left(h^j\right)^0$ формируются два множества $\hat{C} = \left\{C^i, i = 1, \ldots r\right\}$ и $\hat{H} = \left\{H^j, j = 1, \ldots, q\right\}$ наборов коэффициентов целевой функции и наборов коэффициентов кусочно-линейных поверхностей, моделирующих ограничения. Таким образом, синтез целевой функции и ограничений слабоопределенной модели (2) порождает множество задач линейного программирования

$$Z = \left\{ Z_{ij} : \max\left(C^i, x\right) / A^j x \le b^j, i = 1, \ldots r, j = 1, \ldots, q \right\},$$

Принятие решений. Какую из полученных моделей считать наилучшим доопределением задачи (2) и какое из оптимальных решений x_{ij}^* объявить результатом принятия решений? Возможна ситуация, когда лицо, принимающее решения (ЛПР) на основе дополнительной информации может сделать окончательный выбор модели Z_{ij} и оценить удовлетворительность полученного оптимального решения x_{ij}^*. Однако в случае, когда имеется большое количество вариантов выбора и ЛПР затрудняется указать наилучший вариант, принятие решения можно осуществить на основе теоретико-игровой модели.

Представим игровую ситуацию, в которой первый игрок (ЛПР) стремится к достижению максимального значения целевой функции на множестве возможных доопределений. Другой игрок, которым является внешняя среда (Природа), предлагает недетерминированный выбор из множества альтернатив задания ограничений. Гарантий, что истинными являются ограничения, при которых достигается наилучшее решение задачи, нет. Поэтому целесообразно применение модели матричной игры Γ_G двух противоборствующих сторон, которая обеспечивает гарантированный результат.

Первый игрок имеет *r* стратегий выбора целевых функций, а другой - *q* стратегий выбора ограничений. Платежная матрица имеет вид:

$$G = \left\| g_{ij} = \left(c^i, x_{ij}^*\right) \right\|_{r \times q}$$

Если в платежной матрице есть седловая точка, то игра Γ_G имеет решение в чистых стратегиях, и этот набор стратегий i^*, j^* указывает наилучшие доопределения компонент задачи (2) с решением x^* и максимумом целевой функции $\left(c^{i*}, x^*\right)$.

Если матрица *G* не имеет седловой точки, то можно перейти к смешанному расширению игры Γ_G и, решив пару эквивалентных двойственных задач линейного программирования, найти рекомендуемые вероятности выбора чистых стратегий.

Таким образом, поставив задачу принятия решения на основе слабоопределенной линейной модели, как задачу ЛП с истинными, но неизвестными компонентами, ЛПР, пройдя этап синтеза частично заданных компонент с использованием алгоритмов распознавания, получает окончательное оптимальное решение путем решения построенной матричной игры, что в свою очередь, приводит к задачам ЛП.

Литература

1. Донской В.И.,Башта А.И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации. Симферополь: Таврия,1992.- 165 с.

2. Руденко Л.И. Аппроксимация целевой функции в частично определенной задаче оптимизации // Динамические системы..- Киев: Либідь,1992. Вып.10.-С.117-123.