Сафонова Н. В.
ЧТО ИЗУЧАЕТ МАТЕМАТИКА?

Математика уже давно не черпает свои идеи из человеческого опыта. Отрыв от эмпирической базы ныне настолько силен, что возникает неожиданный, но серьезный вопрос: что изучает математика?

В математической энциклопедии мы можем прочитать: "Математика - наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира" [9, стр. 560]. Ни один математик не согласится с таким узким определением.[1] Уже с середины XIX века математики замечают, что эта наука изучает не только количественные отношения.

"*Сущность математики,* -- говорил Буль в 1854 году, - *не состоит в том, чтобы заниматься идеями числа и величины.*"[2, стр. 319]. Г. Грассман, подобно Булю, настаивает на том, что "*название науки о величинах не подходит к совокупности математических дисциплин*" [2, стр. 320]. Г. Ганкель в 1867 году утверждал, что математика "*имеет своим предметом не совокупность величин или их образов - чисел, но мысленных вещей (Gedankending), которым могут соответствовать действительные объекты или отношения, хотя такое соответствие необязательно" [2, стр. 321].*

Однако не следует думать, что математиков в обсуждении этого вопроса охватило редкое единодушие, и ответ на вопрос "Что изучает математика?" может не знать только непосвященный. Я бы даже сказала, что нет другой такой темы, в которой математики до сих пор не только не пришли к единому мнению, но даже противоречат сами себе.

Первое противоречие. Отрыв от эмпирической базы настолько силен, что математики (эти любители строгости и ясности) не хотят связывать взгляды на природу математики с областью своих занятий. "Никакой руководитель исследовательских работ какой-либо промышленной компании не станет интересоваться метафизическими воззрениями поступающего к нему на работу математика. Между такого рода воззрениями и действиями, в которых заинтересован руководитель, не усматривается никакой связи. В поисках решения какой-либо конкретной системы дифференциальных уравнений все математики мирно объединяются, что не мешает им яростно спорить за чашкой чаю о "природе математики" [13, стр.197-198].

Вот ярчайший тому пример. Остается только удивляться, как члены группы Бурбаки, немало способствовавшие формализму математики, могли всерьез полагать, что "каковы бы ни были философские оттенки, в которые понятия математических объектов окрашивались у того или иного математика или философа, имеется по крайней мере один пункт, в котором они единодушны: это то, что эти объекты нам даны и не в нашей власти приписывать им произвольные свойства, так же как физик не может изменить какое-либо природное явление. Правду сказать, составной частью этих воззрений, несомненно являются реакции психологического порядка, в которые нам не следует углубляться, но которые хорошо знакомы каждому математику, когда он впустую тратит силы, стараясь поймать доказательство, беспрестанно, как ему кажется, ускользающее" [2, стр. 317]. На том противоречия не исчерпываются. Думаю, не погрешу против истины, если скажу, что практически все математики с большим удовольствием вступают в дискуссию о природе математики. И тут возникает полнейший хаос мнений. Судите сами.

Возьмем, например, следующее признание Эрмита: "*Я полагаю, что числа и функции анализа не являются произвольным сознанием нашего ума; я думаю, что они существуют вне нас с такой же необходимостью, как и предметы объективной реальности, и мы их встречаем или открываем и изучаем их так же, как физики, химики, зоологи*" [2, стр. 317].

А вот другое мнение: "Современная математика изучает конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики" [4, стр.14].

Джеймс Джинс в своей книге "Загадочная Вселенная" выражает другую точку зрения: "Самый важный факт состоит в том, что все рисуемые наукой картины природы, которые только могут находиться в согласии с данными наблюдений, - картины математические… Природа, по-видимому, очень "хорошо осведомлена" о правилах чистой математики" [6, стр.231].[2]

Не удержусь и приведу свое мнение. Первая половина правды: математика изучает символы. На эту идею меня натолкнула статья Г. Вейля "О символизме математики". [3]. "Для Брауэра символы, принадлежа, подобно словам, языку, являются лишь вспомогательными средствами для представления и передачи математических положений и мыслей. Для Гильберта символы[3], хотя они и ничего не значат, - или даже именно поэтому, являются субстанцией математики" [3, стр.64].

Правда, согласившись, что математика изучает символы (а это довольно-таки прозрачно), мы получаем новую проблему: что есть символы? "Всегда остается проблема толкования" [3, стр.57]. Но мы имеем дело с формальной математикой, а следовательно, вслед за Гильбертом будем утверждать, что символы ничего не значат. Мы свободны наделять их каким угодно значением или не наделять вовсе.

Вторую идею я позаимствовала у А. Пуанкаре. "Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения" [12, стр.26]. На основе этих двух мнений делаем вывод: математика изучает не просто символы, а отношения между ними, причем минимальную их часть она закрепляет аксиоматически, (например, a+b=b+a), а остальные получает с помощью логического вывода.

И здесь мы (хоть это немного отдалит нас от проблемы данной работы) просто обязаны ответить на вопрос: зачем нам нужна математика в такой роли? Не является ли математика игрой для интеллектуалов? Я полагаю, что нет. Роль символического мышления еще до конца не определена.

Как не согласиться с Г. Ноаком: "Способность к пониманию символов, возникающую вместе с формированием языка, можно считать решающим шагом, который вывел человека из животной жизни" [11, стр.97].

И почему в то время, когда явно определился кризис математики, все больше проявляется новая тенденция - многие вузы вводят вступительный экзамен по математике на факультеты, где этот предмет вовсе не является профилирующим? - Да потому, что затребованы молодые люди, лучше других умеющие оперировать символами, а этим как раз характеризуются "математические способности". И я спрашиваю: не исключена ли возможность, что математика вновь станет "царицей наук", но уже в новом качестве, как "царица символического мышления"?

Отойдем от патетики и вернемся к реальности. Такая "умозрительная" область, как "основания математики", оказалась применима к другим наукам. "Вряд ли кто мог предположить в начале нашего века, когда зарождалась математическая логика, и даже в 30-40-е годы, в пору ее расцвета, что эта чисто теоретическая дисциплина, относящаяся скорее к области "философии математики", найдет практическое применение. И тем не менее это произошло уже в 50-е годы… а в 70-е годы появился даже термин "вычислительная логика" [8, стр.331-332].

Вернемся к проблеме данной работы. Как разобраться в таком количестве мнений о предмете математики и какое из них ближе к истине? Чтобы выпутаться из всех несуразностей, необходимо классифицировать мнения и ввести новую терминологию. Эту работу прекрасно выполнил известный логик Хаскелл Б. Карри в статье “Природа математики” [5]. “Различные точки зрения на природу математики делятся на две основные группы. Мы будем называть их контенсивизмом и формализмом. Согласно контенсивизму, математика имеет определенный предмет, определенное содержание; объекты, фигурирующие в математических утверждениях, считающихся в математическом обиходе понятными, - числа, множества, отношения, функции и т. д., - в каком-то смысле существуют, и математические утверждения истинны как раз в той степени, в какой они согласуются с фактами. С точки же зрения формализма, математика характеризуется скорее своим методом изучения; ее объекты или не определяются, или если и определяются, то таковы, что подлинная их природа несущественна, так что замена одних категорий объектов на другие может и не повлиять на истинность теории. Мы должны, например, отнести к формализму любую точку зрения, согласно которой математика имеет дело с символами, ибо, хотя символику можно и фиксировать, никто не станет утверждать, что существенным является выбор конкретной символики. В противоположность этому для контенсивизма характерно признание определенности математических объектов.

Контенсивизм можно далее разделить на две основные линии. Представители одной из них, известной под именем платонизма[4], утверждают, по сути дела, что понятия числа и множества существуют в действительности (независимо от нашего знания о них) и что классическая математика, хотя и нуждается в более серьезном обосновании, на самом деле не является ненадежной. Другие контенсивисты, напротив, считают, что в математике есть нечто гнилое и что значительную часть классического анализа нужно отбросить. Эту разновидность уместно назвать критическим контенсивизмом. Главенствующая в настоящее время разновидность критического контенсивизма называется интуиционизмом [5 стр. 27-29].

Теперь остается рассмотреть все "за" и "против" каждого направления.

В отношении платонизма картина достаточно ясна. К концу XIX века этого взгляда придерживались практически все математики. Как иронично замечает Карри, “вероятно, платонизм - это тот взгляд, которого более или менее подсознательно придерживается большинство математиков, не занимающихся специально вопросами обоснования. Это также позиция пионеров математической логики Фреге и Рассела; ее и сегодня защищают некоторые выдающиеся логики” [5, стр. 28].

Дело в том, что развитие математики в тот момент было таково, что родиться другому мнению время еще не пришло. Отсюда и возникла путаница, о которой говорилось ранее - по существу, математики уже занимались развитием формализованных теорий, но для того, чтобы сформировалось мнение о том, что изучает математика, необходимо было обозреть всю математику в целом (а она только создавалась).

Время суеверий закончилось и для математиков. На сегодняшний день, по общему мнению, единственным убежденным платоником среди современных философов математики является Пенелопа Мэдди. (Рецензия С. Строголова в реферативном журнале 13. Математика. Выпуск свободного тома №3.– М., 1993 г. (3А1К.)). В [7] "Автор ставит своей целью показать, что натурализм как философское течение имеет право на существование в философии математики".

Думаю, что, несмотря на столь героические попытки Пенелопы Мэдди, платонизм себя изжил и существовать в философии математики может лишь в качестве исторического факта.

Нам остается рассмотреть все “за и против” позиции формализма и интуиционизма в решении вопроса: "что изучает математика?", а это означает, что мы снова приходим к старой распре двух течений. В качестве представителей двух школ возьмем интуициониста Г. Вейля и логика Х. Карри. В статье “О символизме математики и математической физики” (1954) [3]. Г. Вейль нехотя соглашается: ”Однако факт остается фактом: мы обладаем простым формализмом, который охватывает всю математику, какую мы имеем по сей день, и который до сих пор не приводил к противоречиям” [3, стр.65]; а для спасения своей концепции выдвигает идею: “Если формальная математика больше не претендует на установление истинных утверждений, следует задать вопрос, какую же тогда цель она вообще ставит перед собой. Ответ Кузанского и Лейбница, что математика будто бы отражает в конечных символах идеи, которыми Бог обладает в непосредственной интуиции бесконечного, в наше время находит мало сочувствия, и он, во всяком случае, слишком односторонне теологичен. Убедительнее звучит указание на естественнонаучное применение математики, на роль, которую она играет при конструктивном построении теории реального мира в физике. В этом случае мы можем обратиться к проверке теоретической конструкции посредством опыта и предсказаний” [3, стр.66]. Итак, Вейль предлагает математикам строить конструктивные теории реального мира в физике и тем самым проверить математику опытом. Посмотрим, что говорит по этому поводу современная математика.

На международном конгрессе математиков в Беркли (1986) в докладе “Физика и геометрия” Эдвард Виттен говорил: ”Уже не раз в прошлом задачи, возникавшие в теоретической физике, влияли на развитие математики, и наоборот, структуры, впервые появившиеся в математике, участвовали в развитии физики. До XX века самые яркие примеры тому - роль римановой геометрии в открытии общей теории относительности и влияние квантовой механики на развитие функционального анализа. Эти примеры, однако, связаны с событиями шестидесяти-семидесятилетней давности. В последние полвека математика и физика развивались в различных направлениях, и взаимодействие этих дисциплин играло меньшую роль” [10, стр.394]. Далее Виттен указывает на еще один возможный контакт математики и физики “по образцу общей теории относительности изобрести чистым усилием мысли новую математическую схему, обобщающую риманову геометрию и способную охватить квантовую теорию поля. Многие честолюбивые теоретики пытались это сделать, но из этого пока ничего не вышло. Прогресс был достигнут совсем другим путем. В попытке понять механизм сильных взаимодействий физики пришли в конце 60-х - начале 70-х годов к исследованию того, что стало потом известным под именем "струнной теории". На теорию струн "натолкнулись" случайно или, во всяком случае, на весьма окольном пути при изучении так называемой "модели Венециано"[5] [10, стр.396]. На сегодняшний день “дело обстоит примерно так, как если бы нам удалось сформулировать общую теорию относительности в каких-нибудь искусственных терминах, не ведая ничего о римановой геометрии; тогда естественно возникла бы задача построения римановой геометрии как математического аппарата теории гравитации. Сама мысль о формулировке общей теории относительности без римановой геометрии кажется странной, но именно такая ситуация в струнной теории. Никто не знает, какой окажется ее естественная логическая схема” [10, стр.397]. Автор убежден, что “открытие будет знаменовать начало нового золотого века в истории взаимодействия физики и математики; но в будущем нас ожидает лишь конечное число примеров существенного взаимодействия физики и математики” [10, стр.397-398].

Следует сказать, практически все математики уверены, что вся математика не может служить теоретической базой для физики, она, несомненно, многограннее и шире. “Перед тем как началось революционное развитие современной физики, было потрачено немало труда из-за желания во что бы то ни стало заставить математику рождаться из экспериментальных истин; но, с одной стороны, квантовая физика показала, что эта “макроскопическая” интуиция действительности скрывает “микроскопические” явления совсем другой природы, причем для их изучения требуются такие разделы математики, которые, наверное, не были изобретены с целью приложений к экспериментальным наукам, а с другой стороны, аксиоматический метод показал, что “истины”, из которых хотели сделать сосредоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые имеют гораздо более широкое применение. В конце концов, это интимное взаимопроникновение, гармонической необходимостью которого мы только что восхищались[6], представляется не более чем случайным контактом наук, связи между которыми являются гораздо более скрытыми, чем это казалось a priori” [2a, стр.258].

Итак, идея Вейля обосновать математику реальными физическими законами заманчива, но невыполнима (во всяком случае, в ближайшее время).[7]

Нам остается рассмотреть, какая проблема возникает в формализме по вопросу о предмете математики и как ее решает, например, Х.Карри.

“Разновидность формализма, которой придерживается автор этих строк, утверждает скорее, что сущность математики заключается в формальном методе как таковом и что она включает различные виды формальных теорий, а также обсуждение взаимоотношения формальных теорий друг с другом и их отношения к другим доктринам. В этом смысле математика есть наука о формальных методах” [5, стр.35]. - Это его точка зрения на предмет математики, а вот как он отвечает на возражения, выдвинутые против формализма: ”Зададим, наконец, вопрос: до какой степени абсолютная надежность присуща математике? Поиск абсолютной надежности был, очевидно, основной мотивировкой для концепции Брауэра и Гильберта. Но нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Зачем, скажем, нам так уж нужно быть уверенными в непротиворечивости теории или в том, что ее нужно вывести с помощью абсолютно определенной интуиции чистого времени, прежде чем использовать эту теорию? Ведь никакой другой науке мы не предъявляем таких требований.[8] В физике, например, теории всегда гипотетичны; мы принимаем теорию, коль скоро на ее основе можно делать полезные предсказания, и видоизменяем или отвергаем ее, коль скоро этого сделать нельзя. Именно так случалось и с математическими теориями, когда в связи с обнаружением в них противоречий приходилось модифицировать не оспариваемые до того времени математические доктрины. Так почему мы не можем так поступать в будущем? Используя формалистскую концепцию для объяснения того, что представляет собой теория, мы принимаем теорию, коль скоро она полезна, удовлетворяет некоторым условиям естественности и простоты, разумным для своего времени, и коль скоро известно, что эта теория не введет нас в заблуждение. Мы должны держать наши теории под постоянным наблюдением, чтобы видеть, что эти условия выполнены, и чтобы получить все основанные на догадках доказательства адекватности теорий, которые мы можем получить. Теорема Геделя утверждает, что это все, что мы можем сделать; эмпирическая философия науки утверждает, что это все, что мы должны сделать. Более того, поскольку оценка полезности теории зависит от ее назначения, можно для различных целей принимать по-разному построенные теории, так что интуиционистская и классическая математики могут сосуществовать” [3, стр.38-39].

Многие математики вместе с Карри утверждают, что никакого кризиса математики нет. Они благодарны интуиционистам за то, что те удержали их от бездумного увлечения аксиоматическим методом. И выбирают направление развития математики, ”коль скоро оно полезно, удовлетворяет некоторым условиям естественности и простоты, разумным для своего времени, и коль скоро известно, что оно не введет нас в заблуждение”. Я думаю, критерий полезности (в смысле Карри) как нельзя более удачно выразил Г. Вейль: “Поэтому я нахожу уместным обратиться к современному математику с таким призывом: если ты умеешь решать проблему явно конструктивным путем, не ограничивайся чисто экзистенциальными доказательствами” [3, стр.67].

Литература

1. Bernays P. Sur le platonisme dans les mathematiques, Enseignement Mat., 34 (1935-1936), 52-69.
2. Н. Бурбаки. Теория множеств. - М.,1965.
3. Г. Вейль. Математическое мышление. - М., 1989.
4. П. Вопенка. Математика в альтернативной теории множеств. - М., 1983.
5. Х. Карри. Основания математической логики. - М., 1989.
6. М. Клайн. Математика. Поиск истины. - М., 1988.
7. Maddy P. // Abstr. 9th Int. Congr. Log., Methodol. and Phil. Sci., uppsala, Aug/ 7-14, 1991. Vol. 2. Sec 6-9 - [uppsala], [1991]. - с.2.
8. Математическая логика в программировании. Сб. статей. - М.,1991.
9. Математическая энциклопедия. Под ред. И.М. Виноградова. Т. 3. - М., 1982.
10. Международный конгресс математиков в Беркли, 1986. - М., 1991.
11. Noac H. Symbol und Existenz der Wissenschaft. - Halle: Saale, 1936.
12. А.Пуанкаре. О науке. - М., 1990.
13. А.А. Френкель. И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств. - М., 1966.
14. А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 4. Статьи, рецензии, письма. Эволюция физики. - М., 1967.

---

[1] С точки зрения логики, определение слишком узкое, так как не охватывает всего предмета занятий математики.

[2] М. Клайн в конце XX века всерьез утверждает: "Математика и физическая реальность неразделимы" [6, стр.254].

[3] Согласно известному анекдоту, Гильберт охотно пояснял эту мысль, говоря, что, если заменить слова "точка", "прямая" и "плоскость" словами "стол", "стул" и "пивная кружка", в геометрии ничего не изменится" [2, стр.32].

[4] Платон в диалоге “Менон” утверждал, что математические конструкции не зависят от опыта и даже предшествуют ему. Карри, в свою очередь замечает, что этот термин впервые применил Бернайс.[1]. В философии и в философии математики этот термин имеет различные значения.

[5] См. G.Veneziano, Nuovo Cimento A57 (1986), 190.

[6] Авторы имеют в виду роль римановой геометрии в общей теории относительности.

[7]Как уже отмечалось, в среде физиков весьма популярна идея, что математика открывает законы природы. Эйнштейн в книге “Мир, каким я вижу его” (1934) пишет: “Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность” [14, с.184].

[8] Здесь я не согласна с Х. Карри. Автор забыл о том, что математика потеряла эмпирическую базу. Здесь мы имеем ту же ситуацию, что и с аксиомой о параллельных, возникшей в XIX веке. - Математики не могут решить опытным путем - отказаться или сохранить аксиому бесконечности и аксиому выбора. Интересно то, что существуют математические системы как с этими аксиомами, так и без них, а также с различными их

модификациями. Смотри, например, [4]. А также мы снова упираемся в вопрос: зачем нам нужна наука без эмпирической базы?