

УДК 532.595

ПЛАНИМЕТРИЯ ВИБРОРАВНОВЕСИЙ ПРИ МАЛЫХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЛАХ

А. Н. ТИМОХА

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 8.01.2002

Для случая двумерных потенциальных течений проанализированы усредненные во времени геометрические конфигурации (виброравновесия) ограниченного объема идеальной жидкости, находящейся в прямоугольном сосуде, совершающем высокочастотные поступательные вибрации. В исследованиях использованы концепция квазипотенциальной энергии и предположение о малости волновых чисел. Указаны частные точные аналитические решения. Исследование общего случая базируется на прямой численной минимизации функционала квазипотенциальной энергии. Для решения вспомогательной задачи о волновой функции, являющейся ограничением-связью, построена модификация метода Нистрема – Кресса. Теоретически описаны экспериментальные феномены “сплющивания” и вибростабилизации свободной поверхности жидкости, а также “переворота” (“переориентации” жидкости, ее локализацию около одной из вертикальных стенок) и “провала” (равномерного растекания жидкости между стенками с образованием “каверны” в центре), проявляющиеся при горизонтальных вибрациях сосуда. Обсуждаются результаты расчетов виброравновесий для условий земной гравитации (больших чисел Бонда) и полной невесомости (отсутствия массовых сил). Указано на многозначность решения и зависимость виброравновесия от переходных процессов. Подтверждено теоретически, что эффект “переворота” более вероятен для малых глубин, в то время как “провал” характерен для немалых глубин жидкости. Получены первые теоретические результаты, описывающие “сплющивание” и вибростабилизацию висящей капли на вибрирующей пластинке, в том числе и для случая пренебрежимо малого поверхностного натяжения (больших чисел Бонда).

Для випадку двовимірних потенціальних течій проаналізовані осереднені за часом геометричні конфігурації (віброрівноваги) обмеженого об'єму ідеальної рідини, яка знаходиться в прямокутній посудині, що здійснює високочастотні поступальні вібрації. У дослідженнях використано концепцію квазипотенціальної енергії й припущення про малість хвильових чисел. Вказано часткові точні аналітичні рішення. Дослідження загального випадку базується на прямій чисельній мінімізації функціонала квазипотенціальної енергії. Для розв'язку допоміжної задачі про хвильову функцію, яка є обмеженням-зв'язком, побудовано модифікацію методу Ністрема – Креса. Теоретично описано експериментальні феномени “сплющування” й вібростабілізації вільної поверхні рідини, а також “перевороту” (“переорієнтації” рідини, її локалізацію біля однієї з вертикальних стінок) і “провалу” (рівномірного розтікання рідини між стінками з утворенням “каверни” у центрі), які проявляються при горизонтальних вібраціях посудини. Обговорюються результати розрахунків віброрівноваг для умов земної гравітації (великих чисел Бонда) і повної невагомості (відсутності масових сил). Вказано на багатозначність розв'язку й залежність віброрівноваги від перехідних процесів. Підтверджено теоретично, що ефект “перевороту” більш ймовірний для малих глибин, у той час як “провал” є характерним для немалих глибин рідини. Отримано перші теоретичні результати, що описують “сплющування” й вібростабілізацію висячої краплі на віброуючій пластинці, у тому числі і для випадку, коли поверхневим натягом можна знехтувати (великі числа Бонда).

For case of two-dimensional potential flows, time-averaged geometrical configurations (vibroequilibria) of limited volume of ideal liquid in a rectangular vessel, showing high-frequency forwards vibrations, are analysed. A concept of quasipotential energy and supposition of smallness of the wave numbers is used. Particular exact analytical solutions are stated. The study of a general case is based on straight numeral minimization of a functional of quasipotential energy. Auxiliary boundary problem on the wave function, being a limitation-tie, is solved by modified Nyström – Kress method. Theoretical description is given for experimental phenomena of “flattening” and vibrostabilization of free liquid surface, “overturn” (“reorientation” of the liquid, its localization near one of vertical walls) and “dip” (even spreading of the liquid between the walls with a “cavity” forming in the center), that occur under horizontal vibrations of the vessel. Numerical results for vibroequilibria under conditions of the Earth gravitation (large Bond's numbers) and zero-gravity (lack of mass forces) are discussed. Non-uniqueness of solution and dependence of vibroequilibrium on transitional processes are stated. It is confirmed theoretically that an “overturn” is more probable for small depths, while a “dip” is typical for non-small depths of the liquid. Preliminary theoretical results, describing the “flattening” and vibrostabilization of a drop hanging on vibrating plate are obtained, including the case of negligibly small surface-tension (large Bond's numbers).

ВВЕДЕНИЕ

Задача о нелинейном плескании ограниченного объема жидкости в сосуде, совершающем поступательные или угловые гармонические вибрации с фиксированной частотой и амплитудой, является одной из самых старых, но, по-прежнему, актуальных задач волновой гидродинамики. Обзор большинства известных теоретических и экспериментальных результатов в этой области можно найти в статье Неволлина (1984) [1], в книге Луковского

и Тимохи (1995) [2] или во введении к статье Фалтинсена и Тимохи (2001) [3]. Большинство цитируемых исследований посвящены резонансным волнам, для которых частота вибраций сосуда близка к одной из собственных частот линейных колебаний жидкости относительно ее гидростатического положения, определяющегося объемными и поверхностными потенциальными силами. Наличие точного или приближенно-аналитического решения задачи о гидростатическом равновесии является основным требованием аналитических тео-

рий резонансных плесканий, базирующихся на методах теории возмущений. При этом гидростатическое равновесие ассоциируется с нулевым приближением в асимптотических схемах и является средним во времени положением жидкого объема (mean fluid domain). Попытка обобщить подобные асимптотические подходы для описания ряда нерезонансных явлений, в том числе исследуемых в данной работе, оказывается безрезультатным. Основной причиной такого положения дел является противоречие с экспериментальными данными, устанавливающими, что среднее во времени положение жидкости существенно отличается от ожидаемого гидростатического. В этом случае возникает понятие квазистатического положения равновесия.

Изначально такие квазистатические равновесия, отличные от капиллярных, были обнаружены на границе раздела двух жидкостей близкой плотности в экспериментах Вольфа (1969) [4]. Позднее эти результаты были подтверждены Безденежных с соавторами (1984) [5]. Эксперименты проводились в земных условиях в лотках большой ширины, так что поверхностным натяжением можно было пренебречь. Однако, вместо ожидаемого плоского рельефа, при горизонтальных вибрациях лотка наблюдались квазистатические волнообразные рельефы. Пионерской теоретической работой, исследовавшей этот феномен, следует, по-видимому, считать статью Любимова и Черепанова (1986) [6]. Обзор современного состояния проблемы и некоторые новые экспериментальные данные можно найти в статьях Хеннера с соавторами (1999) [7], а также Ла Рокка с соавторами (2002) [8]. Другим известным примером, когда гармоническое нагружение ограниченного объема жидкости приводит к экзотическим квазистатическим конфигурациям свободной границы, является случай высокочастотных вибраций сосуда с жидкостью. Первые эксперименты, зафиксировавшие отличие вибрационных квазистатических рельефов от капиллярных, и, кроме того, подтвердившие гипотезу о возможной вибрационной стабилизации свободной поверхности, были проведены в 1960–1970-ых годах. Кроме дискутируемых ниже работ Вольфа (1969, 1970) [4, 9], Ганиева с соавторами (1977) [10] и Любимова с соавторами (1981) [11], интересующиеся читатели могут найти описание ряда экспериментальных результатов и некоторых теоретических подходов к их объяснению в обзорах Неволина (1984) [1], Луковского и Тимохи (1999) [12], а также Бейера с соавторами (2001) [13].

Важно, что высокочастотные вибрации могут не только искривлять среднее положение свободной

границы, но даже приводит к разрыву односвязного объема на несколько устойчивых жидких порций. Фактически, речь идет о том, что в рассматриваемых случаях “вибросилы” (см. классическую работу Капицы (1952) [14], где было введено такое понятие) зачастую не просто соизмеримы с другими потенциальными силами, но и могут быть доминирующим фактором, влияющим на геометрию и устойчивость ограниченного объема жидкости. В общем случае, задача может быть сформулирована как задача о вибрационном (акустическом) позиционировании жидкости. Практическая мотивация решения таких задач связана с созданием новых космических бесконтактных технологий (см. обзоры теоретических и экспериментальных работ Луковского и Тимохи (2001) [15], отчеты оригинальных экспериментальных данных, полученных на борту Второй американской космической лаборатории в работах Ванга (1996) [16], Апфеля с соавторами (1998) [17] и Ли с соавторами (1998) [18], в рамках программы НАСА КС-135 Ванисом с соавторами (1999) [19] или в рамках Европейской программы экспериментов MICREX Лирке (1991) [20]). Несмотря на это, в научной литературе можно найти лишь небольшое количество аналитических работ, исследующих такие феномены.

Ряд сложностей математического характера, которые необходимо преодолеть для создания адекватных теорий, описаны, например, в работе Тимохи (1997) [21] и обзоре Луковского и Тимохи (1999) [12]. Главными из упомянутых сложностей являются селекция и параметрическое представление допустимых геометрических конфигураций жидкости, решение специальных краевых задач со свободной границей, описывающих взаимовлияние вибросил и квазиравновесных состояний, а также исследование устойчивости динамического равновесия. Строгий математический анализ возникающих при этом краевых и вариационных задач был дан в работе Бейера с соавторами (2001) [13]. Там же квазистатические конфигурации объема жидкости при высокочастотных вибрациях сосуда получили название *виброравновесий (vibroequilibria)*. В то же время, Бейер с соавторами (2001) [13] не дают ни качественного, ни численного анализа возможных геометрических конфигураций виброравновесий. Подобные примеры имеются лишь в работах Луковского и Тимохи (1995) [2], а также Тимохи (1997) [21]. Однако в цитируемых статьях исследуются лишь простейшие ситуации, в которых виброравновесия совпадают с гидростатическим положением (или асимптотически близки к нему) либо, исходя из экспе-

риментальных данных, существует возможность прогнозировать форму виброравновесия.

Данная работа продолжает аналитические исследования, проведенные Тимохой (1997) [21] и Бейером с соавторами (2001) [13] в рамках концепции виброравновесий. Нами будут рассмотрены некоторые геометрически сложные виброравновесия в случае поступательных вибраций цилиндрического сосуда прямоугольного сечения. Направляющий вектор вибраций считается параллельным одной из граней. Рассматриваются двумерные потенциальные (в плоскости вибраций) течения. Основной целью данной работы является анализ виброравновесий в случае высокочастотных горизонтальных вибраций сосуда и качественное объяснение известных из экспериментальных работ Любимова с соавторами (1981) [11], а также Ганиева с соавторами (1977) [10] эффектов “переворота” и “провала”. При этом, следуя препринту Тимохи (1992) [22] и статье Бейера с соавторами (2001) [13], задача определения устойчивых виброравновесий будет рассматриваться в рамках минимизации функционала квазипотенциальной энергии, когда волновое число вибрационного поля в жидкости мало. Поскольку такой функционал в качестве ограничения-связи имеет специальную смешанную краевую задачу, особое место в построении численного метода будет уделено обобщению метода Нистрема – Кресса интегральных уравнений, ассоциированных с такими задачами в областях с угловыми точками. В дополнение к исследованию виброравновесий в прямоугольном сосуде нами будут анонсированы результаты анализа форм равновесия капли, лежащей (висящей) на вибрирующей с высокой частотой пластине. Кроме феномена “сплющивания” капли под действием вибрации, будет показано, что для достаточно высоких частот приложения висящая капля может удерживаться на вибрирующей пластине даже в том случае, когда поверхностное натяжение пренебрежимо мало по отношению к гравитационным силам.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вариационная формулировка Бейера с соавторами (2001) [13]. Пусть течения жидкости Q_f , частично заполняющей абсолютно твердый сосуд Q (рис. 1, а), идеальны и потенциальны, а площадь контакта между жидкостью и стенками сосуда является множеством ненулевой меры. Предполагается, что сосуд совершает гармонические высокочастотные поступательные вибрации со скоростью $\mathbf{v} = -\nu A \sin(\nu t)(a_1, a_2, a_3)$. Циклическая ча-

стота возбуждения ν , амплитуда вибраций A и направляющий вектор (a_1, a_2, a_3) являются постоянными. При этом A – малая величина, по отношению к линейным размерам объема жидкости (сосуда) l , а частота возбуждения ν значительно больше, чем первый собственный тон колебания жидкости в сосуде. Кроме того, $\nu^{-1} = O(A/l)$.

Бейер с соавторами (2001) [13], введя в рассмотрение усредненные во времени геометрические конфигурации жидкости $Q_0 = \langle Q_f \rangle$ (виброравновесия), ограниченные усредненными смоченной (S) и свободной (Σ_0) поверхностями, показали, что устойчивые конфигурации Q_0 могут быть найдены из принципа минимума квазипотенциальной энергии, принимающего для безразмерной задачи следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi(Q_0) = & \eta_1(|\Sigma_0| - \cos \alpha |S|) - \\ & - \eta_2 \int_{Q_0} (g_1 x + g_2 y + g_3 z) dQ + \int_{Q_0} (|\nabla \psi|^2 - \\ & - k^2(\psi - a_1 x - a_2 y - a_3 z)^2) dQ \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{1}$$

при ограничениях-связях

$$Q_0 \subset Q, \quad \int_{Q_0} dQ = V = \text{const} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta \psi + k^2 \psi = & k^2(a_1 x + a_2 y + a_3 z) \text{ в } Q_0, \\ \partial_n \psi = & 0 \text{ на } S, \quad \psi = a_1 x + a_2 y + a_3 z \text{ на } \Sigma_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь соотношение (2) является условием сохранения объема, а смешанная краевая задача (3) определяет $\psi(x, y, z)$ – волновую функцию пульсационных (акустических) течений в Q_0 . Здесь $|\cdot|$ обозначает площадь поверхности; $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$, $|\mathbf{g}| = 1$ – направляющий единичный вектор гравитационного поля; α – угол смачивания; k – волновое число; ∂_n – нормальная производная (внешняя к Q_0). Введенные безразмерные неотрицательные числа η_1 и η_2 обратно пропорциональны ν^2 и соответствуют соотношениям между поверхностным натяжением, объемными (гравитационными) силами и так называемой “вибрационной энергией” (усредненной кинетической энергией высокочастотных пульсаций объема жидкости), выражаемой последним интегральным членом в формуле (1).

Планиметрическая постановка при $k \ll 1$. Рассмотрим поступательные вибрации цилиндрического открытого сосуда прямоугольного сечения, так что \mathbf{g} и \mathbf{a} компланарны и лежат в плоскости Oxz . Задача описания виброравновесий мо-

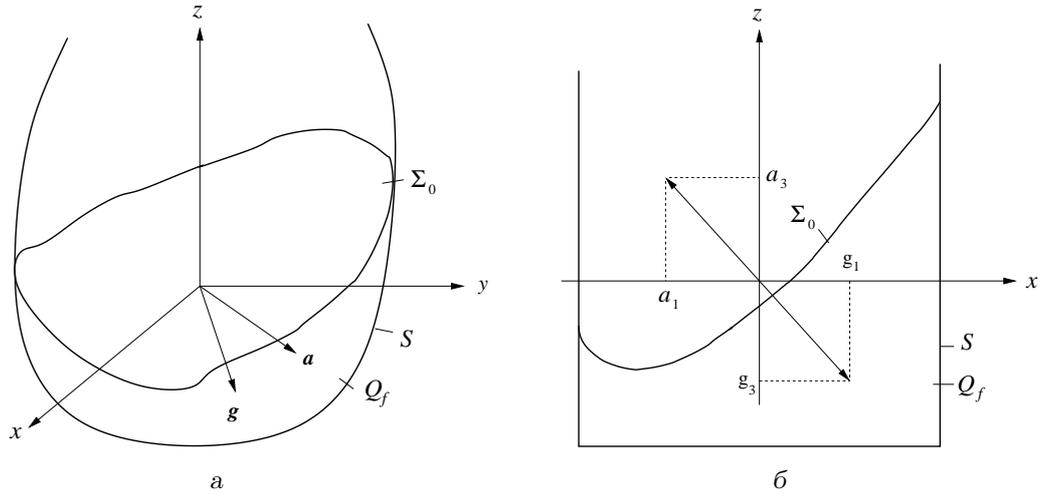


Рис. 1. Эскиз виборавношення и принятые обозначения:
 а – в общем (трехмерном) случае, б – в рамках двумерных течений в прямоугольном баке

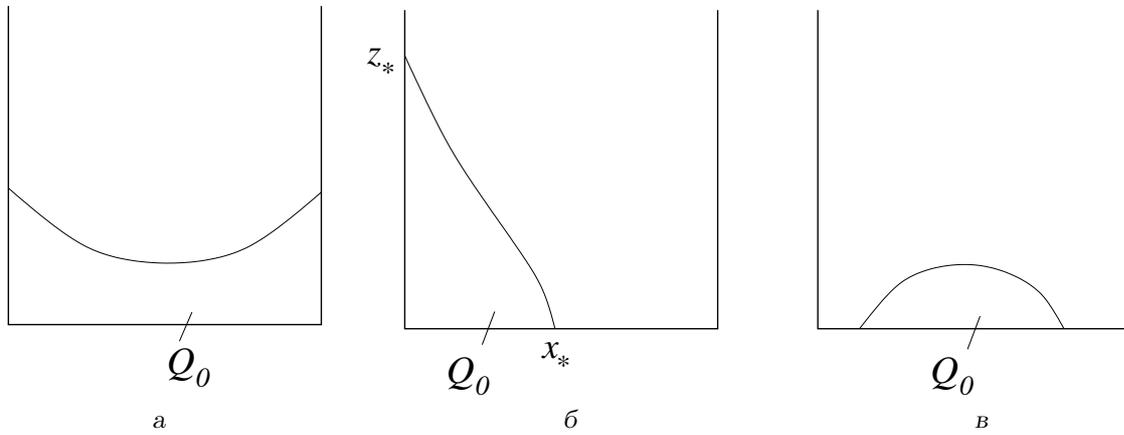


Рис. 2. Рассматриваемые допустимые положения жидкости в открытом прямоугольном сосуде:
 а – “криволинейная трапеция”, б – “криволинейный треугольник”, в – “капля”

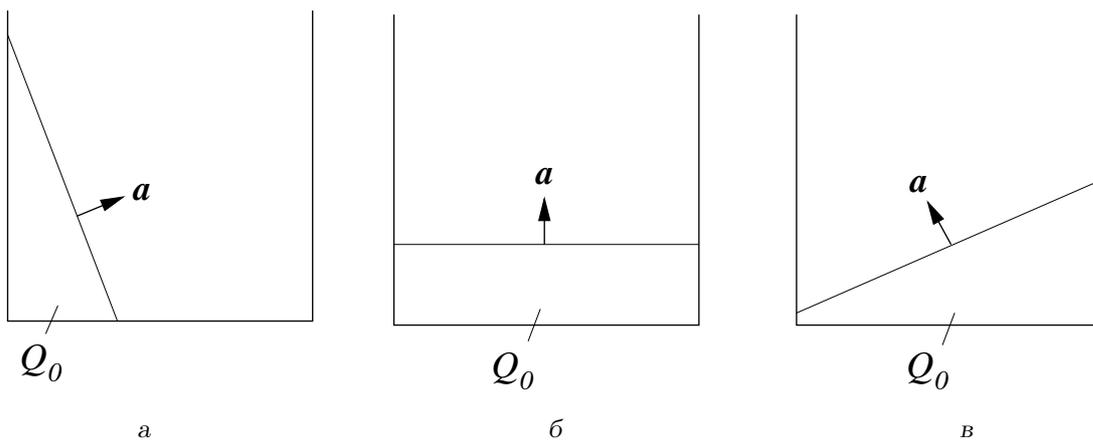


Рис. 3. Виборавношення в открытом прямоугольном сосуде при $\eta_1 = \eta_2 = 0$
 (поверхностное натяжение и объемные силы пренебрежимо малы)

жет быть сведена к двумерной (рис. 1, б). Предположив дополнительно, что волновые числа малы ($k \ll 1$), приходим к упрощенной вариационной формулировке (1)–(3) вида

$$\Pi(Q_0) = \eta_1(|\Sigma_0| - \cos \alpha |S|) - \eta_2 \int_{Q_0} (g_1 x + g_3 z) dQ + \int_{Q_0} |\nabla \psi|^2 dQ \rightarrow \min \quad (4)$$

при ограничении-связи

$$\Delta \psi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \partial_n \psi = 0 \text{ на } S, \quad (5)$$

$$\psi = a_1 x + a_3 z = w(x, z) \text{ на } \Sigma_0$$

и условия сохранения объема (2), где “объем” связывается с площадью Q_0 в сечении Oxz , а все интегралы в (4) и (2) предполагаются двумерными.

Заметим, что малость k физически эквивалентна предположению о несжимаемости жидкости. Это допустимо в случае, когда частота возбуждения значительно меньше минимального собственного акустического тона в Q_0 . Ранее несжимаемость постулировалась в работах Любимова и Черепанова (1986) [6], в некоторых примерах, рассмотренных Тимохой (1992) [22], а также Хеннером с соавторами (1999) [7]. В данной работе изучаются виброравновесия в прямоугольном сосуде в рамках постановки (2), (4), (5) на допустимых классах виброравновесий Q_0 , схематически изображенных на рис. 2. Ограничения на допустимую форму виброравновесия предполагают, что граница области Q_0 состоит не более чем из четырех гладких частей, где лишь одна является криволинейной, а остальные – смоченные поверхности сосуда. В то время как гладкость границы очевидна для смоченных стенок и дна сосуда, гладкость свободной границы принимается в качестве рабочей гипотезы, которая может быть аргументирована исключительно наличием поверхностного натяжения в тех случаях, когда оно не является пренебрежимо малым. Хотя виброравновесие может быть односвязной областью, т.е. жидкость может разделяться под действием вибраций на две и более изолированных подобластей, допустимые виброравновесия предполагаются в рамках этой работы односвязными. Такое ограничение является незначительным, поскольку каждая связная подобласть может быть рассмотрена независимо.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

2.1. Аналитическое решение

Когда поверхностное натяжение и гравитация пренебрежимо малы по сравнению с вибросилами

($\eta_1 = \eta_2 = 0$), вариационная задача (2), (4), (5) имеет точное аналитическое решение

$$\psi = C_1 = \text{const}, \quad a_1 x + a_3 z = C_1, \quad (6)$$

на котором достигается абсолютно минимальное значение функционала $\Pi = 0$. Это решение демонстрирует тот факт, что вибросилы при отсутствии других потенциальных сил “сплюсцивают” границу Σ_0 , превращая ее в плоскость, перпендикулярную направляющему вектору вибрации \mathbf{a} , как схематически изображено на рис. 3.

Известно, что гидростатическая (капиллярная) форма равновесия также может быть плоской. Интересен случай, когда $\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0$, но упомянутые плоские равновесия совпадают. Это возможно (см. рис. 3, б) при $g_1 = g_2 = 0$, $|g_3| = 1$, $\alpha = \pi/2$ (вектор \mathbf{g} перпендикулярен ко дну, вибрации вертикальны, а угол смачивания является прямым). Легко заметить, что если $\eta_1, \eta_2 > 0$, $g_3 = -1$ (ускорение гравитации направлено вниз), то и капиллярная и вибрационная плоские поверхности устойчивы. Если же $g_3 = 1$ (гравитация направлена вверх), то плоская равновесная форма может быть неустойчивой. Для анализа ее устойчивости нужно вычислить знак второй вариации функционала (4) или собственные значения оператора Якоби, явный вид последнего был выведен Бейером с соавторами (2001) [13]. Его собственные значения для решения (6) имеют вид

$$\lambda_k = \eta_1 \kappa_k^2 - \eta_2 g_3 + \kappa_k \text{th}(\kappa_k h), \quad (7)$$

$$\kappa_k = \frac{\pi k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Используя спектральный критерий устойчивости в форме Бейера с соавторами (2001) [13]: $\lambda_k > 0$, можно найти η_2 , при которых плоское виброравновесие на рис. 3, б) устойчиво:

$$g_3 \eta_2 < \eta_1 \kappa_1^2 + \kappa_1 \text{th}(\kappa_1 h). \quad (8)$$

Условием устойчивости плоской капиллярной формы (см. Мышкис с соавторами (1987, 1992) [23, 24]) будет ограничение на числа Бонда:

$$\sqrt{\frac{gl^3}{\sigma}} = \text{Bo} = -\frac{\eta_2 g_3}{\eta_1} > \kappa_1^2. \quad (9)$$

Простой анализ показывает, что даже если не выполнено неравенство (9) (капиллярная форма неустойчива), условие (8) может выполняться (виброравновесие устойчиво), поскольку $\eta_1 \sim \eta_2 \rightarrow 0$, $\pi h \rightarrow \infty$. Этот факт качественно подтверждает феномен вибростабилизации, установленный экспериментально в работах Вольфа (1969, 1970) [4, 9].

Детали других экспериментов, описывающих параметрическую стабилизацию свободной поверхности жидкости можно найти в обзоре Неволлина (1984) [1]. Такая возможность была теоретически предсказана в книге Луковского и Тимохи (1995) [2] в рамках маятниковой аналогии и феномена вибростабилизации вертикального маятника с вибрирующей точкой подвеса, анализируемого Капицей (1952) [14].

2.2. Численный метод

Явное параметрическое представление приближенного допустимого положения свободной границы, удовлетворяющее соотношению (2), и метод граничных элементов для решения краевой задачи (5) в промежуточных положениях Q_0 сводят вариационную проблему к функции многих переменных. Развиваемый ниже приближенный метод базируется на прямой численной процедуре определения локальных минимумов этой функции.

Представление свободной границы. Для геометрических конфигураций, изображенных на рис. 2, предположим, что уравнение свободной границы Σ_0 допускает нормальный вид $z = f(x)$ или $x = f(z)$. Функция $f(\cdot)$ связывается с кубическим сплайном в форме Форсайта с соавторами (1977) [25]

$$f(\cdot) \cong A_i(f_k) + B_i(f_k)(\cdot - \cdot_i) + C_i(f_k)(\cdot - \cdot_i)^2 + D_i(f_k)(\cdot - \cdot_i)^3, \tag{10}$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i – функции значений $f_k = f(\cdot_k)$ в узлах $\cdot_k, k=0, \dots, M, M \geq 4$ (согласно процедуре Форсайта с соавторами (1977) [25], строится кубический сплайн без дополнительных условий на концах отрезка). Это означает, что граница Σ_0 определяется исключительно массивом чисел $\{f_k, k=0, \dots, M\}$. В связи с наличием условия (2), не все f_k являются независимыми. Поэтому в наших численных процедурах массив $\{f_k, k=0, \dots, M\}$ параметризуется таким образом: $f_k = f_k(d_i), k=0, \dots, M$, что вспомогательный массив $\{d_k, k=0, \dots, M_1\}$ несет в себе независимый набор переменных и условие (2) выполнено для всех d_i из области определения. Видно, что два первых члена функционала (4) зависят от f и ее производных, а следовательно, от массива $\{d_k, k=0, \dots, M_1\}$. Последний интегральный член в выражении (4) также зависит от этого массива и функции $\psi(x, z)$, определяемой из кра-

евой задачи (5), причем

$$\int_{Q_0} (\nabla\psi)^2 dQ = \int_{\Sigma_0} \partial_n \psi w dl. \tag{11}$$

Равенство (11) означает, что для каждого шага итерационного приближения Q_0 для подсчета последнего интегрального члена функционала (4) необходимо знать лишь Неймановский след решения краевой задачи (5) на границу Σ_0 . В этом смысле наиболее предпочтительными и быстрыми являются методы, использующие интегральную формулировку краевой задачи. Подобные методики использовались, к примеру, Мизуно и Кодано (1990) [26] и Ландрини с соавторами (1999) [27]. Они базировались на интегральных уравнениях, речь о которых пойдет ниже.

Интегральные уравнения для смешанной краевой задачи (5). Пусть $P(\xi, \eta) \in \partial Q_0$ и $P^*(x, z) \in Q_0$ – две произвольные точки на границе и внутренней области Q_0 . Представление гармонической функции через интегралы простого и двойного слоев (Михлин (1977) [28, с. 207]) имеет вид

$$\psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial Q_0} \left[\ln \frac{1}{R} \partial_{n_P} \psi - \psi \partial_{n_P} \ln \frac{1}{R} \right] d\Gamma_P, \tag{12}$$

где $R = R(\xi, \eta; x, z) = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - z)^2}$ и $G(P, P^*) = \ln(1/R)$ – двумерная функция Грина; ∂_{n_P} – символ нормальной производной к ∂Q_0 в точке P . В соответствии с правилами для потенциалов простого и двойного слоев, интегральное представление (12) может быть спроектировано на границу области Q_0 . Это приведет к соотношению

$$\omega_{(x,z)} \psi(x, z) = \oint_{\partial Q_0} \left[\ln \frac{1}{R} \partial_{n_P} \psi - \psi \partial_{n_P} \ln \frac{1}{R} \right] d\Gamma_{(\xi,\eta)}, \tag{13}$$

где $P^*(x, z) \in \partial Q_0$ и $\omega_{(x,z)}$ – телесный угол в точке $P^*(x, z)$ ($\omega_{(x,z)} = \pi$ для внутренних точек на гладких участках границы).

След Дирихле $\psi = w(x, z)$ известен на Σ_0 , в то время, как условие Неймана $\partial_n \psi = 0$ выполняется на оставшейся части границы. Тогда для $P^* \in \partial Q_0$ представление (13) порождает следующее инте-

гральное уравнение:

$$\int_{\Sigma_0} \left[\Phi \ln \frac{1}{R} - w \partial_{n(\xi, \eta)} \ln \frac{1}{R} \right] d\Gamma_{(\xi, \eta)} - \int_S \Psi \partial_{n(\xi, \eta)} \ln \frac{1}{R} d\Gamma_{(\xi, \eta)} = \omega_{(x, z)} \begin{cases} w(x, z), & (x, z) \in \Sigma_0, \\ \Psi(x, z), & (x, z) \in S, \end{cases} \quad (14)$$

где $\partial_{n_P} = \partial_{n(\xi, \eta)}$. Это интегральное уравнение связывает две неизвестные функции:

$$\Phi = \partial_n \psi \text{ на } \Sigma_0, \quad \Psi = \psi \text{ на } S \quad (15)$$

и, фактически, распадается на систему интегральных уравнений для гладких частей границы ∂Q_0 . Поскольку ∂Q_0 имеет не более четырех гладких частей, а именно: Σ_0 (свободная криволинейная граница), S_- (смоченная левая стенка), S_+ (смоченная правая стенка) и S_0 (дно), то случай “криволинейной трапеции” (см. рис. 2, а) является наиболее общим. Тогда интегральные уравнения (14) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \Phi(\xi) \sqrt{1+f'^2(\xi)} \left[\ln \frac{1}{R} \right]_{\eta=f(\xi)} d\xi - \\ & - \int_{-1}^1 w(\xi) \left[\partial_\eta \ln \frac{1}{R} - f'(\xi) \partial_\xi \ln \frac{1}{R} \right]_{\eta=f(\xi)} d\xi + \\ & + \int_0^{f(-1)} \Psi_-(\eta) \left[\partial_\xi \ln \frac{1}{R} \right]_{\xi=-1} d\eta - \\ & - \int_0^{f(1)} \Psi_+(\eta) \left[\partial_\xi \ln \frac{1}{R} \right]_{\xi=1} d\eta + \\ & + \int_{-1}^1 \Psi_0(\xi) \left[\partial_\eta \ln \frac{1}{R} \right]_{\eta=0} d\xi = \\ & = \pi \begin{cases} w(x, f(x)), & z = f(x), & -1 < x < 1, \\ \Psi_0(x), & z = 0, & -1 < x < 1, \\ \Psi_-(z), & x = -1, & 0 < z < f(-1), \\ \Psi_+(z), & x = 1, & 0 < z < f(1). \end{cases} \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь Неймановский след $\Phi = \Phi(x) \in W^{-1/2}([-1, 1])$ был определен в соотношении (15), а след Дирихле Ψ является липшицевой функцией на гладких участках границы S_0, S_- и S_+ (см. Обэн (1972) [29]) и

распадается в совокупность трех независимых функций:

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_0(x), & -1 < x < 1, \\ \Psi_-(z), & 0 < z < f(-1), \\ \Psi_+(z), & 0 < z < f(1), \end{cases} \quad (17)$$

$$\Psi_0(-1) = \Psi_-(0), \quad \Psi_0(1) = \Psi_+(0).$$

Явный вид ядер интегральной системы (16) приведен в приложении как для случая “криволинейной трапеции”, так и для случая “криволинейного треугольника” (см. рис. 2, а и б). Заметим, что большая часть ядер этой системы регулярна (или имеет устранимые особенности), однако некоторые из них могут иметь сингулярности на концах интервала интегрирования, связанные с интегралами двойного слоя, или логарифмическую сингулярность на интервале интегрирования, связанную с интегралами простого слоя. При этом характер сингулярности ядер и решений в окрестности точек контакта свободной границы с стенками (дном) может меняться с изменением контактного угла и кривизны криволинейной границы.

Выбор подходящего “быстрого” метода решения, который учитывал бы и равномерно покрывал все возможные сингулярности для допустимых конфигураций Q_0 , оказался весьма сложной проблемой. Отметим, к примеру, что эти сингулярности игнорируются методами граничных элементов низких порядков (см., например, Мизуно и Кодاما (1990) [26]). Ландрини с соавторами (1999) [27] обсуждают эти сингулярности, однако предложенная ими схема высокого порядка, использующая технику *B*-сплайнов, также не учитывает сингулярности в угловых точках. Подходящий подход к решению интегральных уравнений, ассоциированных с задачей Дирихле в области с угловой точкой, дается Крессом (1990) [30]. Он базируется на методе Нистрема и по количеству операций имеет тот же порядок, что и перечисленные методы граничных элементов. Поскольку техника Кресса учитывает высшую сингулярность в ядрах системы, в наших расчетах она была выбрана в качестве базовой. Детали обобщения данной методики на случай системы интегральных уравнений (16) даны в приложении. В то же время, в рамках этой работы не анализируются вычислительные аспекты такого обобщенного метода, что является отдельной сложной математической проблемой.

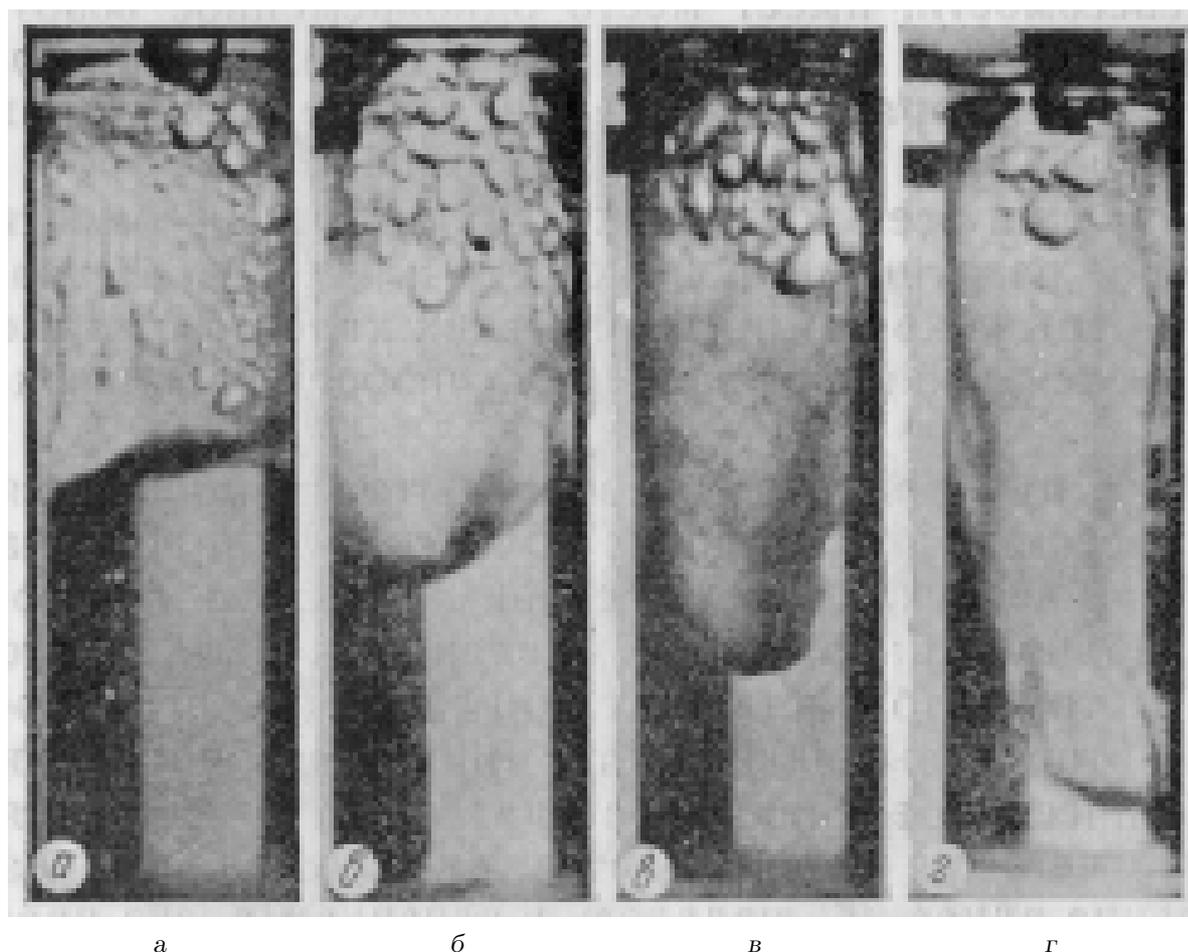


Рис. 4. Фотографии из экспериментальной серии Ганиева с соавторами (1977) [10], расположенные слева направо в соответствии с возрастанием частоты вибраций (в и г иллюстрируют симметричные и асимметричные виброравновесия соответственно)

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

Численный метод применялся для качественного описания экспериментальных результатов, устанавливающих растекание и дальнейшее “сплющивание” объема жидкости около вертикальных стенок при горизонтальных высокочастотных вибрациях сосуда. При этом эксперименты в длинном горизонтальном бассейне (лотке), проведенные в земных условиях Любимовым с соавторами (1981) [11], фиксируют, в основном, феномен “переворота”, “переориентации” жидкости (жидкий объем удерживается вибрацией около одной из вертикальных стенок). Этот эффект связывается в дальнейшем с асимметричным положением жидкости относительно оси симметрии сосуда Oz . Эксперименты в невесомости (Ганиев с соавторами (1977) [10]) устанавливают, кроме того, фе-

номен “провала” (“каверна” в центре расширяется вплоть до разделения объема жидкости на приблизительно два равных объема, локализованных на противоположащих стенках), описываемый симметричными конфигурациями (рис. 4, в).

Максимальная размерность для сплайн приближения была $M=20$, $N_1=\dots=N_4=50$ для сетки на границы области Q_0 . Численная процедура обычно требовала $N_1 \approx \dots \approx N_4 \approx 30$ и $M=10$ для того, чтобы добиться стабилизации четырех – пяти знаков в равномерной метрике для приближения свободной границы Σ_0 . Максимальные размерности использовались для подсчета критических положений свободной границы. Минимизация функционалов (43) и (50) проводилась квазиньютоновским методом в версии Каханера с соавторами (1988) [31]. Число итераций зависело от числа узлов на границе области и лежало в пределах

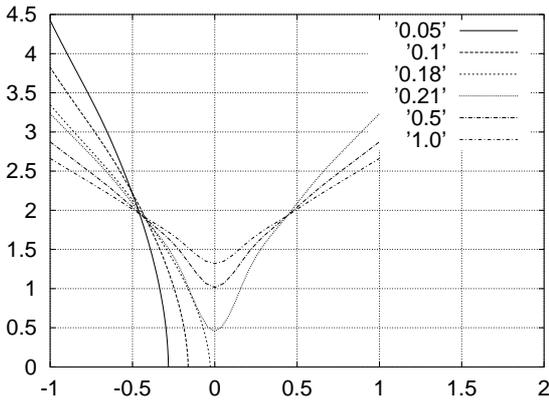


Рис. 5. Симметричное растекание жидкости при горизонтальных вибрациях сосуда. Глубина жидкости в статическом состоянии $h=2$, поверхностное натяжение игнорируется ($\eta_1=0$). Виброравновесия отмечены величинами η_2 . Критическое значение η_2 , где жидкость разделяется на две равных порции (“половинки”), равно 0.205

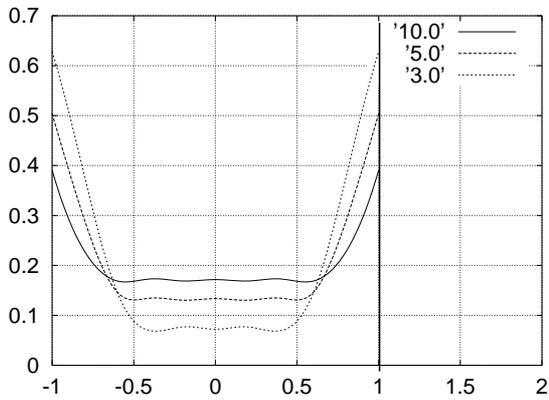


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для $h=0.2$. Критическое значение $\eta_2=2.2$

5 ÷ 50. Расчеты производились в среде SunOS 5.7. Время расчета одного виброравновесия зависело от исходных физических параметров и начального приближения для авторских неоптимизированных FORTRAN-кодов и оценивалось в пределах 15 ÷ 600 секунд.

3.1. Виброравновесия в земных условиях

В этом подразделе будут рассмотрены виброравновесия в условиях земной гравитации, когда гравитационное ускорение направлено перпендикулярно дну сосуда ($g_1=0$ и $g_3=-1$), сосуд вибрирует поступательно в горизонтальном направлении ($a_1=1$, $a_3=0$), а поверхностным натяжением можно пренебречь, положив $\eta_1=0$. Тогда ви-

броравновесия будут зависеть лишь от значения η_2 , характеризующего соотношение между гравитацией и вибросилами, а также объема Q_0 , составляющего $V=2h$. Исключая ситуацию $\eta_2 \gg 1$ (вибросилы пренебрежимо малы и виброравновесие совпадает с плоским гидростатическим положением жидкости под действием гравитации) и вариант $\eta_2 \ll 1$, рассмотренный аналитически в подразделе 2.1, положим $\eta_2 \sim 1$. Некоторые случаи виброравновесия представлены на рис. 5 – 9. Расчеты показывают, что они могут иметь как симметричную, так и асимметричную структуру. Реальная геометрия виброравновесия зависит от η_2 , h и начального положения границы (в терминах нашей итерационной процедуры). Последнее утверждение означает, что задача о виброравновесии имеет не единственное решение. При этом переходные процессы, происходящие в начальной стадии после приложения к сосуду вибронагрузки, оказывают решающее значение на то, какое из решений реализуется.

Рис. 5 и 6 соответствуют плоскому гидростатическому равновесию, что физически допустимо в случае, когда волновые переходные процессы пренебрежимо малы. Такое начальное приближение всегда приводит к симметричным виброравновесиям, имеющим “каверну” в центре (жидкость “растекается” между двумя вертикальными стенками в пропорции 1:1). Соответствующие симметричные виброравновесия для $\eta_2 > 0.205$ ($h=2$) показаны на рис. 5. При $\eta_2 \leq 0.205$ примененная численная процедура становилась неустойчивой. Это объясняется тем, что свободная граница “касается” дна. В предположении, что такое касание с уменьшением η_2 означает разделение области Q_0 на две равные порции, расчеты были продолжены для каждой ее “половинки”. При этом была использована численная процедура для “криволинейных треугольников”.

На рис. 5 даны примеры соответствующих “левых половинок” области для $\eta_2=0.18, 0.1$ и 0.05 . Интересно, что для немалых глубин расчеты указывают, что контактный угол свободной границы с дном должен быть прямым. При оценке критических значений η_2 , при которых Q_0 разделяется на две “половинки”, предполагалось, что разделение происходит тогда, когда x_* -координата одной из них пересечет центр дна (см. рис. 2, б). Безразмерное критическое значение η_2 зависело от объема (глубины h), рис. 7. Кроме того, на рис. 8 показаны критические конфигурации “левых половинок” для некоторых значений h . Из рисунка видно, что для малых h (мелкой жидкости) свободная граница становится геометрически близкой к наклонной

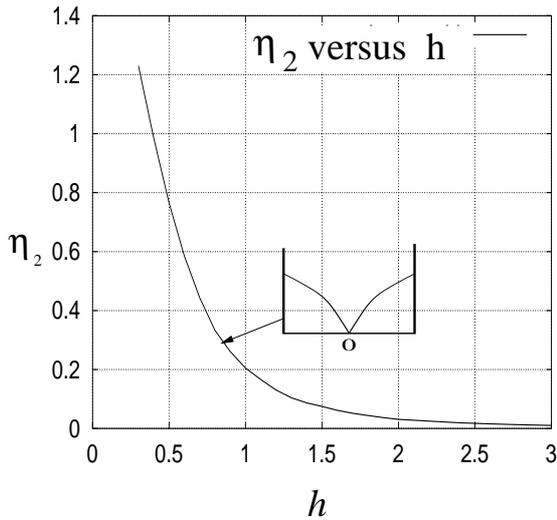


Рис. 7. Зависимость критического значения η_2 , при котором объем разделяется на две равные порции, от объема жидкости $V=2h$. Поверхностное натяжение игнорируется ($\eta_1=0$)

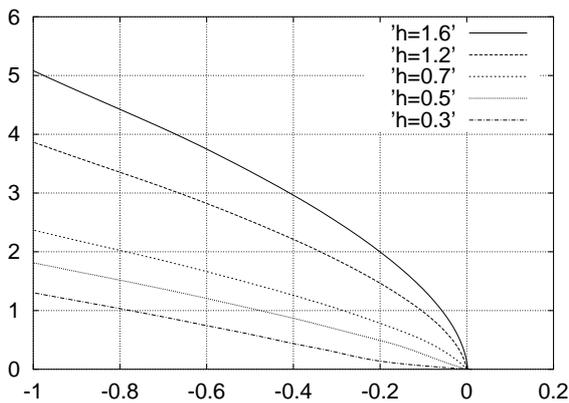


Рис. 8. Зависимость критических квазиравновесий левой “половинки” объема жидкости $V=2h$ по отношению к h (граница пересекает центр дна). Критические значения η_2 см. на рис. 7. Поверхностное натяжение игнорируется ($\eta_1=0$)

плоскости. Значит, и “симметричные” конфигурации для мелкой воды должны отличаться от приведенных на рис. 5. Это подтверждают виброравновесия для $h=0.2$, показанные на рис. 6. Здесь ширина “каверны” становится существенно большей, а основная масса жидкости позиционируется и “сплющивается” около стенок. При этом гравитационные силы удерживают на дне сосуда лишь небольшую часть жидкости.

Серия численных результатов, представленная на рис. 9, посвящена “асимметричным” вибро-

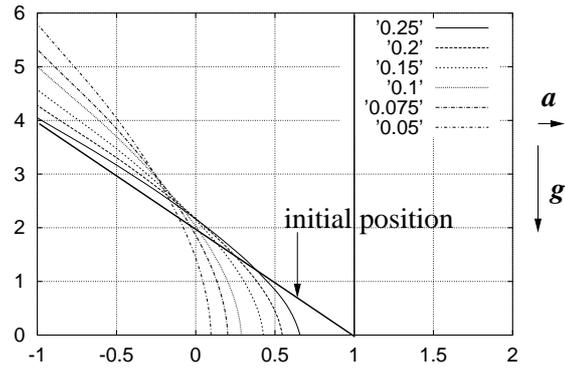


Рис. 9. Зависимость асимметричных виброравновесий от η_2 при $h=2$. Поверхностное натяжение игнорируется ($\eta_1=0$)

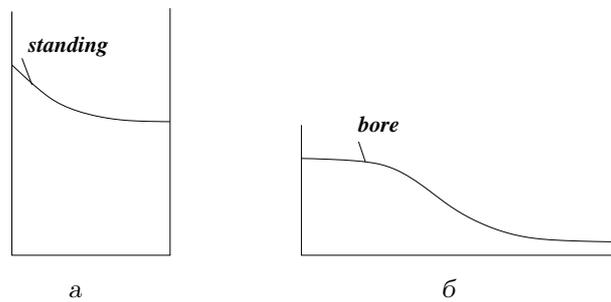


Рис. 10. Некоторые ожидаемые начальные состояния свободной границы, обусловленные переходными волнами: а – для немалых глубин, б – для малых глубин

равновесиям. Она соответствует асимметричным (треугольным) начальным положениям. Расчеты показали, что для $\eta_2 > 0.25$ такое начальное положение границы ведет к симметричным виброравновесиям (см. рис. 5). Асимметричные устойчивые виброравновесия реализуются для меньших η_2 . Интересно, что все асимметричные положения, которые нам удалось найти численно, сопровождались “оголением” дна. Возможная причина для такого эффекта состоит в том, что если жидкость имеет существенную смоченную границу контакта с обеими вертикальными стенками, она получает два сонаправленных, соизмеримых по абсолютной величине импульса с противоположных сторон. Это может приводить к равномерному растеканию жидкости между этими смоченными стенками.

Принимая во внимание вероятные профили переходных волн, указанных на рис. 10 (Луковский и Тимоха (2000) [32] грубо оценивают возникновение этих волновых профилей при $h < 0.4$), мо-

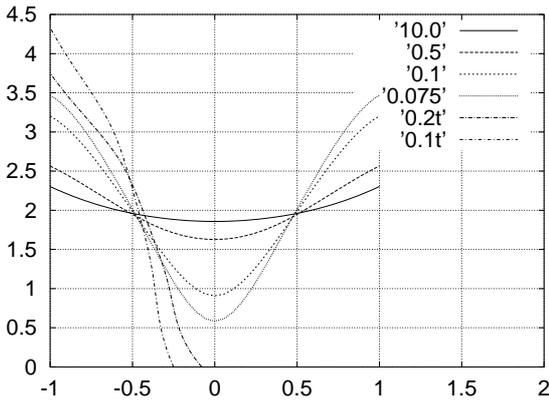


Рис. 11. Симметричные виборавноесия в условиях невесомости ($\eta_2 = 0, h = 2.0, \alpha = \pi/4$). Профили помечены величинами η_1

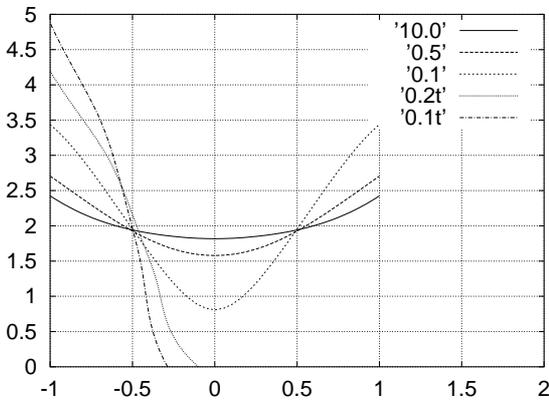


Рис. 12. То же, что на рис. 11, но при $\alpha = \pi/6$

жно с высокой вероятностью предсказать реализуемость предпочтительно асимметричных конфигураций для малых h , в то время как большие глубины связаны с симметричными. Этот вывод подтверждается экспериментальными результатами Любимова с соавторами (1981) [11], полученными в мелком прямоугольном лотке.

3.2. Виброравноесия в невесомости

Случай полной невесомости соответствует $\eta_2 = 0$ и $\eta_1 \neq 0$. Серия соответствующих виборавноесий на рис. 11 и 12 демонстрирует симметричные формы для двух контактных углов $\pi/4$ и $\pi/6$ (горизонтальные вибрации). Подобно случаям, рассмотренным выше, такие симметричные конфигурации обнаруживаются всегда при начальных состояниях, близких к капиллярному равновесию, или при плоских начальных положениях. Вычи-

сления показывают, что симметричные конфигурации свободной границы в этом случае лишь несущественно отличаются от профилей, найденных в условиях земной гравитации, так что различие может быть легко объяснено наличием постоянного контактного угла. Далее, при уменьшении η_1 (при увеличении частоты вибраций) симметричные формы также претерпевают разделение на две связанные части (“половинки”), локализованные около левой и правой стенок. В этом смысле очень важным является поведение критического η_1 . В условиях земной гравитации для виборавноесия существует критическое значение η_1 , при котором Q_0 разделяется на две равные части, совпадающие с величиной $\tilde{\eta}_1$, когда два равных объема сливаются в один связный объем. В то же время, наши вычисления установили для случая на рис. 11 и 12 наличие гистерезиса критических значений η_1 . Был найден существенный диапазон значений η_1 , где сосуществуют одновременно связанные и несвязные формы равновесия. Соответствующие профили отмечены метками 0.2t и 0.1t. Такой гистерезис объясняется скачком потенциальной энергии, обусловленной поверхностным натяжением. Наконец, как и в случае “земной гравитации”, обнаружены асимметричные равновесия при достаточно малых η_2 и асимметричных начальных положениях границы. Тем самым качественно подтверждаются экспериментальные выводы Ганиева с соавторами (1977) [10].

3.3. Виброравноесия капли

Капиллярные формы равновесия капель, контактирующих с бесконечной абсолютно твердой пластинкой, детально исследованы в монографиях Мышкиса с соавторами (1987, 1992) [23, 24]. Была установлена инвариантность соответствующих капиллярных профилей по отношению к горизонтальным сдвигам. Отсюда следует, что осесимметричные капли устойчивы тогда и только тогда, когда они устойчивы относительно симметричных возмущений. Вариационная формулировка (4) дает возможность исследовать двумерный случай этой проблемы, когда пластина вибрирует вдоль оси Oz ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{g}$). Благодаря полной симметрии задачи, можно применить нашу методику расчета к половине капли ABC , как показано на рис. 13. Симметрия относительно (AB) ведет к тому, что контактный угол в точке A будет прямым. Смешанная краевая задача (5) должна быть решена в криволинейном треугольнике ABC , где нулевое условие Неймана требуется на AB (в связи с симметрией) и на BC , а условие Дирихле выполняется

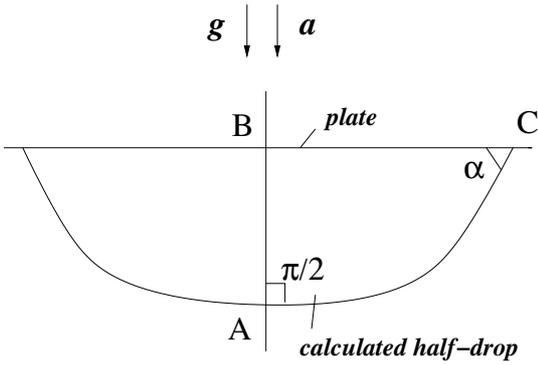


Рис. 13. Эскиз висящей капли

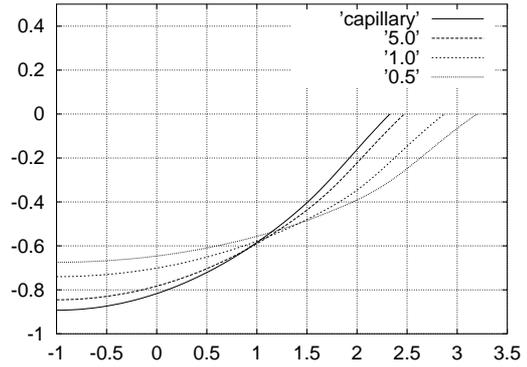


Рис. 14. Профили “половинки” висящей капли на вертикально вибрирующей пластине в условиях полной невесомости ($\eta_2=0$). Кривые помечены величинами η_1 ; $V=2, \alpha=\pi/6$

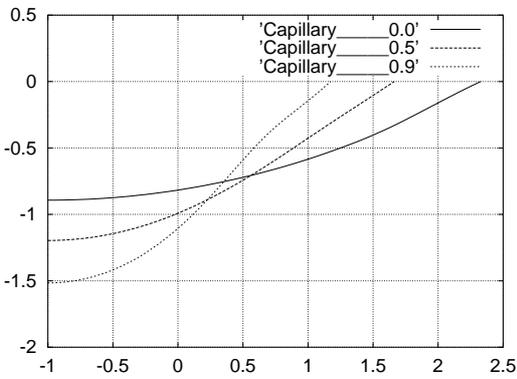


Рис. 15. Капиллярные формы равновесия “половинки” висящей капли. Кривые помечены числами Бонда $|Bo|=\eta_2/\eta_1$; $V=2, \alpha=\pi/6$

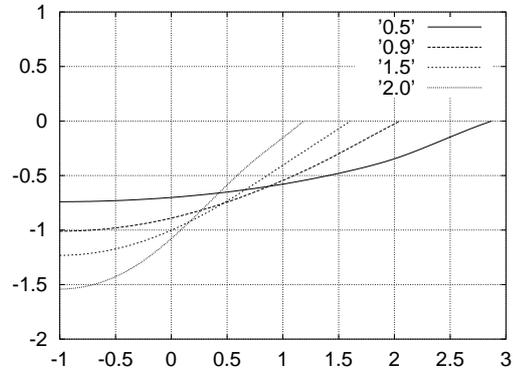


Рис. 16. Виброравновесия “половинки” висящей капли ($\eta_1=1$). Кривые помечены величинами η_2 ; $V=2, \alpha=\pi/6$

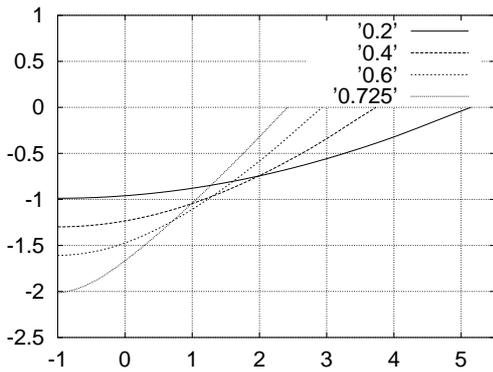


Рис. 17. Виброравновесия “половинки” висящей капли. Поверхностное натяжение игнорируется ($\eta_1=0, V=4$). Кривые помечены величинами η_2 . Критическое значение η_2 , когда капля срывается с пластинки, равно 0.73

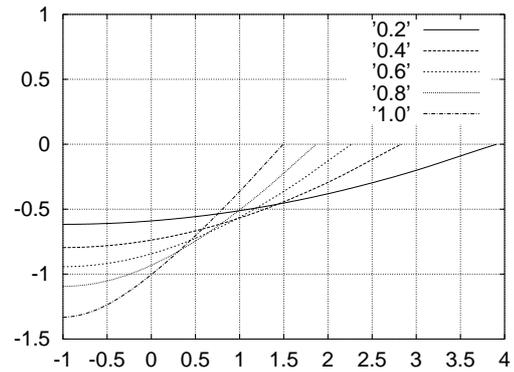


Рис. 18. То же самое, что и на рис. 17, но при $V=2$. Критическое значение η_2 , когда капля срывается с пластинки, равно 1.03.

на CA .

На рис. 14 представлены результаты для $\eta_2 = 0$ (полная невесомость). Как и ожидалось, выбросилы “сплющивают” каплю. С уменьшением η_1 (при увеличении частоты вибрации) капля “сплющивается” в бесконечно тонкую пленку.

Рис. 15 и 16 демонстрируют зависимость капиллярных форм и виборавновесия от абсолютной величины числа Бонда $|Bo| = \eta_2/\eta_1$. (Вектор гравитации направлен вниз и ожидается потеря устойчивости со срывом капли с пластинки для достаточно больших $|Bo|$.) В предположении, что выбросилы соизмеримы по влиянию с поверхностным натяжением ($\eta_1 = 1$), наблюдается не только “сплющивание” капли, но и изменение критических значений числа Бонда, т. е. эффект вибростабилизации. Так, критическое число Бонда для капиллярных профилей для рис. 15 оценивается как $Bo \approx 1.02$, в то время как наличие вертикальных вибраций сдвигает его к величине $Bo \approx 2.06$ (см. рис. 16).

Когда вибрации отсутствуют и поверхностное натяжение пренебрежимо мало ($\eta_1 = 0$), то лежащая капля формирует бесконечно тонкую пленку ($g_3 = 1$), а висящая капля ($g_3 = -1$) срывается с пластины под действием гравитации. Еще одна серия вычислений проведена с целью исследования устойчивости висящей капли ($\eta_1 = 0$, $g_3 = -1$) для $V = 4$ и $V = 2$ под действием вибраций (рис. 17 и 18). Эти расчеты продемонстрировали явление вибростабилизации. Интересно, что, в противоположность случаю капиллярной жидкости, понятие угла смачивания в точке A теряет смысл, однако вычисления всегда дают, что формально он должен быть прямым.

ВЫВОДЫ

Исследуется задача о формах квазиравновесия ограниченного объема идеальной несжимаемой жидкости под действием высокочастотных вибраций сосуда (vibroequilibria). Рассматриваются двумерные течения жидкости в случае поступательных высокочастотных вибраций цилиндрического резервуара прямоугольного сечения, причем трехмерная задача сводится к планиметрической в площади действия вибраций (направляющий вектор вибраций и вектор гравитационного ускорения коллинеарны и параллельны одной из граней). Поперечные деформации свободной границы не исследовались. Для определения устойчивых виборавновесий использовался принцип минимума квазипотенциальной энергии в форме Бейера с соавторами (2001) [13], который состоит в ми-

нимизации функционала, суммирующего энергию поверхностных сил, потенциальную энергию гравитационного поля и так называемую “виброэнергию”. Для вычисления последней необходимо решить смешанную краевую задачу для волновой функции в варьируемой области.

1. Для частного случая отсутствия поверхностных и массовых потенциальных сил построены аналитические решения задачи, описывающие “сплющивание” жидкости под действием вибраций и стабилизацию плоской капиллярной поверхности, экспериментально установленную Вольфом (1970) [9].
2. Для решения вспомогательной смешанной краевой задачи построен специальный метод, являющийся обобщением метода Нистрема – Кресса. Он обеспечивает малое число операций и учитывает сингулярности в ядрах соответствующих интегральных уравнений, связанные с угловыми точками контакта жидкости со стенками (дном).
3. Построен специальный итерационный метод минимизации функционала на трех типах допустимых областей: “криволинейная трапеция”, “криволинейный треугольник” и “капля”.
4. Описаны эффекты деформации гидростатического состояния жидкости под действием вибраций в условиях земной гравитации (большие числа Бонда) при горизонтальных вибрациях сосуда. Показано, что для достаточно больших частот вибраций жидкость может как разделяться на два равных объема (феномен “провала”), так и локализовываться около одной из стенок (эффект “переворота”). При этом последнее состояние, благодаря характерным переходным волнам, более свойственно малым глубинам, что и было установлено ранее в экспериментах Любимова с соавторами (1981) [11].
5. Описаны эффекты “провала” и “переворота” в условиях полной невесомости и качественно подтверждены выводы экспериментальных исследований Ганиева с соавторами (1977) [10].
6. Качественно описаны “сплющивание” и вибростабилизация капли, висящей на вертикально вибрирующей пластинке. Показано, что капля может удерживаться вибрацией на пластине даже в том случае, когда поверхностные силы пренебрежимо малы (при больших числах Бонда).

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает благодарность Государственному фонду фундаментальных исследований Украины, при частичной финансовой поддержке которого была выполнена эта работа (Проект ДФФД N 01.07/096).

1. Неволин В. Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн (Обзор) // Инж.-физ. ж.– 1984.– 47, N 6.– С. 1028–1042.
2. Луковский И. А., Тимоха А. Н. Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объема жидкости.– К.: Ин-т матем. НАН Украины, 1995.– 400 с.
3. Faltinsen O. M., Timokha A. N. Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank // J. Fluid Mech.– 2001.– 432.– P. 169–20.
4. Wolf G. H. The dynamic stabilization of the Rayleigh–Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium // Z. Physik.– 1969.– 227, N 3.– P. 291–300.
5. Безденежных Н. К., Брискман В. А., Любимов Д. В., Черепанов А. А., Шаров М. Т. Управление устойчивостью поверхности раздела жидкостей с помощью вибраций, электрических и магнитных полей // Тез. докл. Всесоюз. семинара по гидромеханике и теплопереносу в невесомости.– Черногловка, 1984.– С. 18–20.
6. Lubimov D. V., Cherepanov A. A. Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field // Fluid Dynamics.– 1986.– 21.– P. 849–854.
7. Khenner M. V., Lyubimov D. V., Belozerova T. S., Roux B. Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system // Eur. J. Mech. B/Fluids.– 1999.– 18.– P. 1085–1101.
8. La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M. A. Interfacial gravity waves in a two-fluid system // Fluid Dynamics Research.– 2002.– 30, N 1.– P. 31–66.
9. Wolf G. H. Dynamic stabilisation of the interchange instability of a liquid-gas interface // Phys. Rev. Let.– 1970.– 24, N 9.– P. 444–446.
10. Ганиев Р. Ф., Лакиза В. Д., Цапенко А. С. О динамическом поведении поверхности жидкости в условиях, близких к невесомости, при вибрационном воздействии // Прикл. мех.– 1977.– 13, N 5.– С. 102–107.
11. Любимов Д. В., Черепанов А. А., Брискман В. А. Управление устойчивостью свободной поверхности жидкости переменными полями // II Всесоюз. семинар по гидромеханике и теплопереносу в невесомости: Тез. докл.– Пермь: ИМСС УНЦ АН СССР, 1981.– С. 112–114.
12. Луковский И. А., Тимоха А. Н. Нелинейная теория плескания жидкости в подвижных полостях: классические и неклассические задачи (обзор) // Вопросы аналитической механики и ее применений.– К.: Ин-т матем. НАН Украины, 1999.– С. 169–200.
13. Beyer K., Gawrilyuk I., Guenther M., Lukovsky I., Timokha A. Compressible potential flows with free boundary. Part I: Vibracapillary equilibria // ZAMM.– 2001.– 81(4).– P. 261–271.
14. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук.– 1952.– 44, N 1.– С. 34–42.
15. Lukovsky, I.A., Timokha, A.N. Sound effect on dynamics and stability of fluid sloshing in zero-gravity // Акуст. вісн.– 1999.– 2, N 3.– P. 69–83.
16. Wang T. Drop Physics Module / Drop Dynamics Experiment // The second United States Microgravity Laboratory (USML-2). 90-day Science Report.– March, 1996.– P. 69–71.
17. Apfel R. E., Tian Y., Jankovsky J., Shi T., Chen X., Holt R. G., Trinh E., Croonguist A., Thornton K. C., Sacco A. Jr., Coleman C., Leslie F. W., Matthiesen D. H. Free oscillations and surfactant studies of superdeformed drops in microgravity // Phys. Rev. Let.– 1998.– 78, N 10.– P. 1912–1915.
18. Lee C. P., Anilkumar A. V., Hmelo A. B., Wang T. G. Equilibrium of liquid drops under effects of rotation and acoustic flattening: Results from USML-2 experiments in space // J. Fluid Mech.– 1998.– 354.– P. 43–67.
19. Wanis S., Sercovich A., Komerath N. Acoustic shaping in microgravity: higher order surface shapes.– AIAA Pap: 1999, N 99-0954.– 7 p.
20. Lierke E. G., Ed. Acoustic positioning // Summary review of sounding rocket experiments in fluid science and material sciences (post-flight).– TEXUS 1 to 20, MASTER 1 and 2, ESA SP-1132, February, 1991.– P. 362–365.
21. Тимоха А. Н. Влияние поперечных вибраций сосуда на свободную поверхность жидкости // Техн. мех.– 1997.– вып. 5.– С. 33–41.
22. Тимоха А. Н. Поведение свободной поверхности жидкости в вибрирующем сосуде. Препринт 92.22.– К.: Ин-т матем. АН Украины, 1992.– 46 с.
23. Myshkis A. D., Babsky V. G., Kopachevskii N. D., Slobozhanin L. D., Typsov A. D. Low-gravity fluid mechanics. Mathematical theory of capillary phenomena.– Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.– 386 p.
24. Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. Д., Тюпцов А. Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости.– К.: Наук. думка, 1992.– 592 с.
25. Forsythe G. E., Malcolm N. A., Moler C. B. Computer methods for mathematical computation.– New York: Prentice-Hall, 1977.– 259 p.
26. Mizuno Akisato, Kodama Yoshihiro Analysis of nonlinear wave-making phenomena by means of boundary element method // Res. Repts. Kogakuin Univ.– 1990.– N 69.– P. 15–20.
27. Landrini M., Grytøyr G., Faltinsen O. M. A B-spline based BEM for unsteady free-surface flows // J. Ship Research.– 1999.– 43, N 1.– P. 13–24.
28. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.– М.: Наука, 1977.– 431 с.
29. Aubin J.-P. Approximation of elliptic boundary-value problems.– New York: Wiley-Interscience, 1972.– 383 p.
30. Kress R. A Nyström methods for boundary integral equations in domains with corners // Numer. Math.– 1990.– 58.– P. 145–161.
31. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software.– New York: Prentice-Hall, 1988.– 324 p.
32. Lukovsky I. A., Timokha A. N. Steady-state nonlinear sloshing in a rectangular tank: passage to shallow water // Доповіді НАН України.– 2000.– N 11.– P. 48–51.

**ПРИЛОЖЕНИЕ.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (16)**

Область – “криволинейная трапеция”

Представление свободной границы. Когда угол смачивания $\alpha \neq 0$, то гладкая свободная граница Σ_0 области на рис. 2, а (“криволинейная трапеция”) допускает нормальное представление $z = f(x)$. Для удовлетворения условия сохранения объема, принимающего в этом случае вид условия сохранения площади $\int_{-1}^1 f(x) dx = V$, вводится вспомогательная функция $d(x) \in C^2([-1, 1])$, так что

$$\begin{aligned} z = f(x) = \\ = d(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(x) dx + h, \end{aligned} \tag{18}$$

где $h = 2V$ – средняя глубина жидкости. Функция $d(x)$ связывается в дальнейшем с кубическим сплайном, и, следовательно, формула (18) порождает сплайн-приближение (10) функции $f(x)$, где $f_k, k=0, \dots, M$ зависят от $d_k = d(x_k), k=0, \dots, M$ ($M_1 = M$), причем

$$f_k = F(x_k, d_0, \dots, d_M); \tag{19}$$

$$f'(x) = d'(x); \quad f''(x) = d''(x).$$

Массив $\{d_k, k=0, \dots, M_1\}$ задает все допустимые сплайн-приближения Σ_0 . Заметим, что, в связи со специальной структурой выражения (18), представление функции $f(x)$ неоднозначно и $\Pi(d_0, \dots, d_M)$ (функционал, образованный после подстановки (18)) инвариантен относительно сдвиговой замены:

$$\Pi(d_0 + C, \dots, d_M + C) = \Pi(d_0, \dots, d_M)$$

для произвольной константы C . Это, однако, является несущественным для процедуры минимизации, базирующейся на условии $\Pi_{N+1} < \Pi_N$ на каждом шаге итераций.

Интегральные уравнения для смешанной краевой задачи (5). Система интегральных уравне-

ний (16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}_{11}}(\xi_1, x_1) [\varphi(\xi_1) - \varphi(x_1)] d\xi_1 + \\ & + \int_{-1}^1 \mathcal{F}_{12}(\xi_1, x_1) \varphi(\xi_1) d\xi_1 + \varphi(x_1) \mathcal{F}_{13}(x_1) + \\ & + \int_{-1}^1 \mathcal{F}_{14}(\xi_2, x_1) \Psi_0(\xi_2) d\xi_2 + \\ & + \int_0^{f(-1)} \underline{\mathcal{F}_{15}}(\eta_1, x_1) [\Psi_-(\eta_1) - w(-1)] d\eta_1 + \\ & + \int_0^{f(1)} \underline{\mathcal{F}_{17}}(\eta_2, x_1) [\Psi_+(\eta_2) - w(1)] d\eta_2 + \\ & + w(-1) \mathcal{F}_{16}(x_1) + w(1) \mathcal{F}_{18}(x_1) = \pi w(x_1) - \\ & - \int_{-1}^1 \mathcal{G}_{11}(\xi_1, x_1) w(\xi_1) d\xi_1, \quad -1 < x_1 < 1, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \mathcal{F}_{21}(\xi_1, x_2) \varphi(\xi_1) d\xi_1 - \pi \Psi_0(x_2) + \\ & + \int_0^{f(-1)} \underline{\mathcal{F}_{22}}(\eta_1, x_2) [\Psi_-(\eta_1) - \Psi_-(0)] d\eta_1 + \\ & + \int_0^{f(1)} \underline{\mathcal{F}_{24}}(\eta_2, x_2) [\Psi_+(\eta_2) - \Psi_+(0)] d\eta_2 + \\ & + \Psi_-(0) \mathcal{F}_{23}(x_2) + \Psi_+(0) \mathcal{F}_{25}(x_2) = \\ & = - \int_{-1}^1 \mathcal{G}_{21}(\xi_1, x_2) w(\xi_1) d\xi_1, \quad -1 < x_2 < 1, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}_{31}(\xi_1, z_1)} \varphi(\xi_1) d\xi_1 + \\
 & + \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}_{32}(\xi_2, z_1)} [\Psi_0(\xi_2) - \Psi_-(0)] d\xi_2 + \\
 & + \Psi_-(0) \mathcal{F}_{33}(z_1) - \pi \Psi_-(z_1) + \\
 & + \int_0^{f(1)} \mathcal{F}_{34}(\eta_2, z_1) \Psi_+(\eta_2) d\eta_2 = \\
 & = - \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{G}_{31}(\xi_1, z_1)} [w(\xi_1) - w(-1)] d\xi_1 - \\
 & - w(-1) \mathcal{G}_{32}(z_1), \quad 0 < z_1 < f(-1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}_{41}(\xi_1, z_2)} \varphi(\xi_1) d\xi_1 + \\
 & + \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}_{42}(\xi_2, z_2)} [\Psi_0(\xi_2) - \Psi_+(0)] d\xi_2 + \\
 & + \int_0^{f(-1)} \mathcal{F}_{44}(\eta_1, z_2) \Psi_-(\eta_1) d\eta_1 - \\
 & - \Psi_+(0) \mathcal{F}_{43}(z_2) + \pi \Psi_+(z_2) = \\
 & = - \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{G}_{41}(\xi_1, z_2)} [w(\xi_1) - w(1)] d\xi_1 - \\
 & - w(1) \mathcal{G}_{42}(z_2), \quad 0 < z_2 < f(1),
 \end{aligned}$$

где $\varphi(\xi) = \Phi(\xi) \sqrt{1 + f'^2(\xi)}$.

Подчеркнутые одной линией ядра имеют степенные особенности на концах интервала интегрирования, а подчеркнутые дважды – логарифмические особенности. Аналитические выражения для этих ядер имеют вид

$$\mathcal{F}_{11}(\xi, x) = -\ln |\xi - x|,$$

$$\mathcal{F}_{12}(\xi, x) = -\frac{1}{2} \begin{cases} \ln \left(1 + \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \right)^2 \right), & \xi \neq x, \\ \ln(1 + (f'(x))^2), & \xi = x \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{13}(x) = - \int_{-1}^1 \ln |\xi - x| d\xi = \begin{cases} 2 - (1-x) \ln(1-x) - \\ - (1+x) \ln(1+x), & -1 < x < 1, \\ 2 - 2 \ln 2, & x = \pm 1, \end{cases}$$

$$(22) \quad \mathcal{F}_{14}(\xi, x) = \frac{f(x)}{(\xi - x)^2 + f^2(x)},$$

$$\mathcal{F}_{15}(\eta, x) = \frac{1+x}{(1+x)^2 + (\eta - f(x))^2},$$

$$\mathcal{F}_{16}(x) = \int_0^{f(-1)} \frac{1+x}{(1+x)^2 + (\eta - f(x))^2} d\eta = \begin{cases} \arctg \frac{f(x)}{1+x} - \arctg \frac{f(x) - f(1)}{x+1}, & -1 < x \leq 1, \\ \pi/2 - \arctg f'_0, & x = -1, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{17}(\eta, x) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + (\eta - f(x))^2},$$

$$(23) \quad \mathcal{F}_{18}(x) = \int_0^{f(1)} \frac{1-x}{(1-x)^2 + (\eta - f(x))^2} d\eta = \begin{cases} \arctg \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right) + \\ + \arctg \frac{f(x)}{1-x}, & -1 \leq x < 1, \\ \arctg f'(1) + \pi/2, & x = 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_{11}(\xi, x) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(\xi)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (f(\xi) - f(x))^2}, & \xi \neq x, \\ -\frac{f''(x)}{2(1 + f'^2(x))}, & \xi = x, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{21}(\xi, x) = -\frac{1}{2} \ln |(\xi - x)^2 + f^2(\xi)|,$$

$$\mathcal{F}_{22}(\xi, x) = \frac{1+x}{(1+x)^2 + \eta^2},$$

$$\mathcal{F}_{23}(x) = \int_0^{f(-1)} \frac{1+x}{(1+x)^2 + \eta^2} d\eta = \begin{cases} \arctg \frac{f(-1)}{1+x}, & -1 < x \leq 1, \\ \pi/2, & x = -1, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{24}(\eta, x) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + \eta^2},$$

$$\mathcal{F}_{25}(x) = \int_0^{f(1)} \frac{1-x}{(1-x)^2 + \eta^2} d\eta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{f(1)}{1-x}, & -1 \leq x < 1, \\ \pi/2, & x = 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_{21}(\xi, x) = \frac{f(\xi) - f'(\xi)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + f^2(\xi)},$$

$$\mathcal{F}_{31}(\xi, z) = -\frac{1}{2} \ln |(\xi + 1)^2 + (f(\xi) - z)^2|,$$

$$\mathcal{F}_{32}(\xi, z) = \frac{z}{(1 + \xi)^2 + z^2},$$

$$\mathcal{F}_{33}(z) = \int_{-1}^1 \frac{z}{(1 + \xi)^2 + z^2} d\xi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2}{z}, & z \neq 0, \\ \pi/2, & z = 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{34}(\eta, z) = \frac{2}{4 + (\eta - z)^2},$$

$$\mathcal{G}_{31}(\xi, z) = \frac{f(\xi) - z - f'(\xi)(\xi + 1)}{(\xi + 1)^2 + (f(\xi) - z)^2},$$

$$\mathcal{G}_{32}(z) = \pi - \mathcal{F}_{33}(z) - \left(\operatorname{arctg} \frac{f(1) - z}{2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{2} \right),$$

$$\mathcal{F}_{41}(\xi, z) = -\frac{1}{2} \ln |(\xi - 1)^2 + (f(\xi) - z)^2|,$$

$$\mathcal{F}_{42}(\xi, z) = \frac{z}{(\xi - 1)^2 + z^2},$$

$$\mathcal{F}_{43}(z) = \int_{-1}^1 \mathcal{F}_{44}(\xi, z) d\xi = \mathcal{F}_{33}(z),$$

$$\mathcal{F}_{44}(\eta, z) = \frac{2}{4 + (\eta - z)^2},$$

$$\mathcal{G}_{41}(\xi, z) = \frac{f(\xi) - z - f'(\xi)(\xi - 1)}{(\xi - 1)^2 + (f(\xi) - z)^2},$$

$$\mathcal{G}_{42}(z) = \pi - \mathcal{F}_{43}(z) - \left(\operatorname{arctg} \frac{f(-1) - z}{2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{2} \right)$$

Метод Нистрема–Кресса для системы инте-

гральных уравнений (20)–(23). Метод Кресса базируется на специальных квадратурных формулах. Идея вывода таких квадратурных формул сводится к следующему.

Рассмотрим интеграл $\int_{-1}^1 g(x) dx$, где подынтегральное выражение является гладким в $(-1, 1)$, но имеет сингулярности на концах $x = \pm 1$. Пусть функция $\eta: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ является биективной, строго монотонно возрастающей и кусочно-бесконечно дифференцируемой, так что η' имеет нули определенного порядка на концах интервала интегрирования. Тогда, произведя замену $x = \eta(t)$

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 \eta'(t) g(\eta(t)) dt \quad (24)$$

и применив метод трапеции к новому интегралу, получим искомую квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N-1} \beta_i^{(N)} g(x_i^{(N)}) \quad (25)$$

с весами и узлами, вычисляемыми по формуле

$$t_i^{(N)} = i/N, \quad \beta_i^{(N)} = \eta'(t_i), \quad x_i^{(N)} = \eta(t_i), \quad i = 0, \dots, 2N \quad (26)$$

(если это не будет принципиально, для простоты будем писать w_i вместо $w_i^{(N)}$ и x_i вместо $x_i^{(N)}$).

Теоремы, доказанные Крессом (1990) [30], обеспечивают сходимость квадратурных формул (25) и схему метода Нистрема при $N \rightarrow \infty$. Заметим, что квадратурные формулы Кресса могут быть непосредственно применены к регулярным интегралам и к интегралам с ядрами, подчеркнутыми одной линией. Дважды подчеркнутые ядра требуют других квадратурных формул (они будут построены ниже). При этом для применимости схемы Нистрема необходимо позаботиться о том, чтобы узлы всех квадратурных формул совпадали на Σ_0, S_- и S_+ . К сожалению, при применении бесконечно-дифференцируемой замены $\eta \in C^\infty([-1, 1])$, предложенной Крессом, добиться этого не удастся. Подходящая замена, чтобы удовлетворить условия теорем Кресса для интегралов двойного слоя и обеспечить метод квадратурными формулами для интегралов с логарифмической особенностью, может быть выбрана

как

$$\eta(t) = \begin{cases} -1 + (t+1)^p, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1 - (1-t)^p, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (27)$$

$$\eta'(t) = p \begin{cases} p(t+1)^{p-1}, & -1 \leq t \leq 0, \\ p(1-t)^{p-1}, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $p \geq 2$ – натуральное число. Результирующие весовые коэффициенты в соотношении (25) вычисляются по формуле

$$\beta_i = p \begin{cases} (t_i + 1)^{p-1}, & i = 0, \dots, N-1, \\ 1, & i = N, \\ (1 - t_i)^{p-1}, & i = N+1, \dots, 2N. \end{cases} \quad (28)$$

Замена (27) превращает ядра \mathcal{F}_{31} и \mathcal{F}_{41} в непрерывные $(p-2)$ -раза дифференцируемые функции на $[-1, 0] \times [0, f(-1)]$, $[0, 1] \times [0, f(-1)]$ и $[-1, 0] \times [0, f(1)]$, $[0, 1] \times [0, f(1)]$ соответственно. Следовательно, требуется лишь квадратурная формула для интеграла с ядром \mathcal{F}_{11} , где логарифмическая сингулярность расположена во внутренних точках интервала $(-1, 1)$. После подстановки (27) этот интеграл принимает вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln |\xi - x_k| d\xi = \int_{-1}^1 \varphi(\eta(t)) \eta'(t) \ln |\eta(t) - x_k| dt, \quad (29)$$

где $k=0, \dots, 2N$ и

$$\ln |\eta(t) - x_k| = \begin{cases} \ln |(t+1)^p - (1+x_k)|, & -1 \leq t \leq 0, \\ \ln |(1-x_k) - (1-t)^p|, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (30)$$

Поскольку $(\tau_k^{(1)})^p = 1+x_k \geq 0$ и $(\tau_k^{(2)})^p = 1-x_k \geq 0$ при $k=0, \dots, 2N$, и они равны нулю лишь для $\tau_0^{(1)} = \tau_{2N}^{(2)} = 0$, то можно записать

$$\ln |\eta(t) - x_k| = \begin{cases} \ln |t - \kappa_k^{(1)}| + F_1(t, \tau_k^{(1)}, p), & t \in [-1, 0], \\ \ln |t - \kappa_k^{(2)}| + F_2(t, \tau_k^{(2)}, p), & t \in (0, 1], \end{cases}$$

при $\kappa_k^{(1)} = \tau_k^{(1)} - 1$, $\kappa_k^{(2)} = 1 - \tau_k^{(2)}$. Кроме того,

$$F_1(t, \tau_k^{(1)}, p) = \ln \left(\sum_{i=1}^p (t+1)^{i-1} (\tau_k^{(1)})^{p-i} \right),$$

$$F_2(t, \tau_k^{(2)}, p) = \ln \left(\sum_{i=1}^p (1-t)^{i-1} (\tau_k^{(1)})^{p-i} \right),$$

так что F_1 может иметь сингулярную точку при $t = -1$, а F_2 при $t = 1$, причем $\eta'(t)\varphi(\eta(t))F_j$ являются регулярными $(p-2)$ -раза дифференцируемыми функциями на $[-1, 1]$. Интеграл (29) будет

$$\int_{-1}^0 \eta'(t)\varphi(\eta(t)) \ln |t - \kappa_k^{(1)}| dt + \int_0^1 \eta'(t)\varphi(\eta(t)) \ln |t - \kappa_k^{(2)}| dt + \int_{-1}^0 \eta'(t)\varphi(\eta(t)) F_1(t, \tau_k^{(1)}, p) dt + \int_0^1 \eta'(t)\varphi(\eta(t)) F_2(t, \tau_k^{(2)}, p) dt, \quad (31)$$

где регулярные интегральные слагаемые могут быть подсчитаны по формуле трапеций. Первые два интеграла (31) требуют специальной квадратурной формулы, которая в настоящей работе выводится посредством линейной сплайн-аппроксимации регулярной части:

$$\eta'(t)\varphi(\eta(t)) \cong A_i + B_i(t - \kappa_k^{(j)}), \quad j = 1, 2.$$

Это дает

$$\int_{-1}^1 \eta'(t)\varphi(\eta(t)) \begin{cases} \ln |t - \kappa_k^{(1)}|, & t \in [-1, 0], \\ \ln |t - \kappa_k^{(2)}|, & t \in [0, 1] \end{cases} dt \approx \sum_{i=1}^{2N-1} \alpha_{i,k} \varphi_i, \quad (32)$$

где

$$\alpha_{i,k} = N\beta_i \begin{cases} (t_{i+1} - \kappa_k^{(1)})C(t_{i+1}, t_i, \kappa_k^{(1)}) - \\ -(t_{i-1} - \kappa_k^{(1)})C(t_i, t_{i-1}, \kappa_k^{(1)}) + \\ + D(t_i, t_{i-1}, \kappa_k^{(1)}) - D(t_{i+1}, t_i, \kappa_k^{(1)}), \\ \qquad i = 1, N - 1; \\ D(t_N, t_{N-1}, \kappa_k^{(1)}) - D(t_{N+1}, t_N, \kappa_k^{(2)}) + \\ + (t_{N+1} - \kappa_k^{(2)})C(t_{N+1}, t_N, \kappa_k^{(2)}) - \\ -(t_N - \kappa_k^{(1)})C(t_N, t_{N-1}, \kappa_k^{(1)}), \\ \qquad i = N; \\ (t_{i+1} - \kappa_k^{(2)})C(t_{i+1}, t_i, \kappa_k^{(2)}) - \\ -(t_{i-1} - \kappa_k^{(2)})C(t_i, t_{i-1}, \kappa_k^{(2)}) + \\ + D(t_i, t_{i-1}, \kappa_k^{(2)}) - D(t_{i+1}, t_i, \kappa_k^{(2)}), \\ \qquad i = N + 1, 2N - 1 \end{cases} \quad (33)$$

c

$$C_{i,k}^{(j)} = \left[(t - \kappa_k^{(j)}) \ln |t - \kappa_k^{(j)}| \right]_{t_i}^{t_{i+1}} + t_i - t_{i+1},$$

$$D_{i,k}^{(j)} = \left[\frac{(t - \kappa_k^{(j)})}{2} \ln |t - \kappa_k^{(j)}| - \frac{(t - \kappa_k^{(j)})^2}{4} \right]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

и $(t - \kappa_k^{(j)}) \ln |t - \kappa_k^{(j)}| = 0$ при $t = \kappa_k^{(j)}$.

Суммируя квадратурные формулы для регулярных интегралов в выражениях (31) и (32), получаем

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln |\xi - x| d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{2N-1} \beta_{k,i}^{\log} \varphi_i = \sum_{i=1}^{2N-1} \varphi_i \left[\alpha_{i,k} + \frac{1}{N} \beta_i \widehat{F}_{ki} \right], \quad (34)$$

где

$$\widehat{F}_{ki} = \begin{cases} F_1(t_i, \tau_k^{(1)}, p), \\ \qquad i = 1, N - 1, \\ \frac{1}{2}(F_1(t_N, \tau_k^{(1)}, p) + F_2(t_N, \tau_k^{(2)}, p)), \\ \qquad i = N, \\ F_2(t_i, \tau_k^{(2)}, p), \\ \qquad i = N + 1, 2N - 1. \end{cases}$$

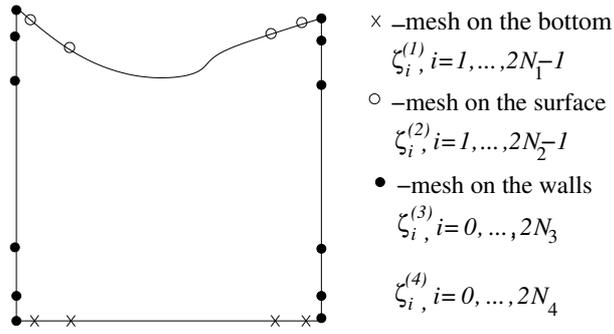


Рис. 19. Распределение узлов для криволинейной трапеции

Теперь, используя узлы квадратурных формул Кресса в качестве узлов метода Нистрема на каждом гладком участке границы, как показано на рис. 19, дискретизируем функции $w(x, f)$ и $f(x)$ вместе с их производными:

$$\zeta_i^{(1)} = x_i^{(N_1)}, \quad \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(N_1)},$$

$$f_i = f(\zeta_i^{(1)}), \quad f'_i = f'(\zeta_i^{(1)}), \quad f''_i = f''(\zeta_i^{(1)}), \quad (35)$$

$$w_i = w(\zeta_i^{(1)}, f_i), \quad \varphi_i = \varphi(\zeta_i^{(1)}),$$

$$i = 0, \dots, 2N_1,$$

и

$$\zeta_i^{(2)} = x_i^{(N_2)}, \quad \beta_i^{(2)} = \beta_i^{(N_2)},$$

$$\Psi_{0i} = \Psi_0(\zeta_i^{(2)}), \quad i = 0, \dots, 2N_2;$$

$$\zeta_i^{(3)} = \frac{f_0}{2}(x_i^{(N_3)} + 1), \quad \beta_i^{(3)} = \frac{f_0}{2}\beta_i^{(N_3)}, \quad (36)$$

$$\Psi_{-i} = \Psi_{-}(\zeta_i^{(3)}), \quad i = 0, \dots, 2N_3;$$

$$\zeta_i^{(4)} = \frac{f_{2N_1}}{2}(x_i^{(N_4)} + 1), \quad \beta_i^{(4)} = \frac{f_{2N_1}}{2}\beta_i^{(N_4)},$$

$$\Psi_{+i} = \Psi_{+}(\zeta_i^{(4)}), \quad i = 0, \dots, 2N_4;$$

где для непрерывной функции Ψ (см. Обэн (1972) [29]) выполнено

$$\Psi_{-(2N_3)} = w_0; \quad \Psi_{-0} = \Psi_{00}, \quad (37)$$

$$\Psi_{0(2N_2)} = \Psi_{+0}; \quad \Psi_{+(2N_4)} = w_{2N_1}.$$

С учетом дискретизации (35), (36) и условий (37) получаем аппроксимацию интегральных уравнений (20)–(23) относительно $2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - 1)$ -мерного вектора, состав-

ленного из

$$\begin{aligned}
 \varphi_i, \quad i &= 1, \dots, 2N_1 - 1, \\
 \Psi_{0i}, \quad i &= 1, \dots, 2N_2 - 1, \\
 \Psi_{-i}, \quad i &= 0, \dots, 2N_3 - 1, \\
 \Psi_{+i}, \quad i &= 0, \dots, 2N_4 - 1.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Эти дискретные уравнения метода Нистрема приводят к следующей линейной системе:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_{j,i}^{\log} \varphi_i + \sum_{i=1}^{2N_2-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{14}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(1)}) \Psi_{0i} + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{15}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(1)}) \Psi_{-i} + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(4)} \mathcal{F}_{17}(\zeta_i^{(4)}, \zeta_j^{(1)}) \Psi_{+i} = \\
 & = \pi w_j - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{11}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(1)}) w_i - \\
 & - w_0 \left[\mathcal{F}_{16}(\zeta_j^{(1)}) - \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{15}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(1)}) \right] - \\
 & - w_{2N_1} \left[\mathcal{F}_{18}(\zeta_j^{(1)}) - \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(4)} \mathcal{F}_{17}(\zeta_i^{(4)}, \zeta_j^{(1)}) \right], \\
 & \quad j = 1, \dots, 2N_1 - 1, \\
 & \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{F}_{21}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(2)}) \varphi_i - \pi \Psi_{0i} + \\
 & + \Psi_{-0} \left[\mathcal{F}_{23}(\zeta_j^{(2)}) - \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{22}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(2)}) \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{22}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(2)}) \Psi_{-i} + \\
 & + \Psi_{+0} \left[\mathcal{F}_{25}(\zeta_j^{(2)}) - \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(4)} \mathcal{F}_{24}(\zeta_i^{(4)}, \zeta_j^{(2)}) \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(4)} \mathcal{F}_{24}(\zeta_i^{(4)}, \zeta_j^{(2)}) \Psi_{+i} = \\
 & = - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{21}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(2)}) w_i, \\
 & \quad j = 1, \dots, 2N_2 - 1,
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{F}_{31}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(3)}) \varphi_i + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_2-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{32}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(3)}) \Psi_{0i} + \\
 & + \Psi_{-0} \left[\mathcal{F}_{33}(\zeta_j^{(3)}) - \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{32}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(3)}) \right] - \\
 & - \pi \Psi_{-j} + \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(4)} \mathcal{F}_{34}(\zeta_i^{(4)}, \zeta_j^{(3)}) \Psi_{+i} = \\
 & = - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{31}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(3)}) [w_i - w_0] - \\
 & \quad - w_0 \mathcal{G}_{32}(\zeta_j^{(3)}), \\
 & \quad j = 0, \dots, 2N_3 - 1, \\
 & \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{F}_{41}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(4)}) \varphi_i + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_2-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{42}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(4)}) \Psi_{0i} + \\
 & + \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{44}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(4)}) \Psi_{-i} + \\
 & + \Psi_{+0} \left[\mathcal{F}_{43}(\zeta_j^{(4)}) - \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{42}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(4)}) \right] - \\
 & - \pi \Psi_{+j} = - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{41}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(4)}) \times \\
 & \quad \times [w_i - w_{2N_1}] - w_{2N_1} \mathcal{G}_{42}(\zeta_j^{(4)}), \\
 & \quad j = 0, \dots, 2N_4 - 1.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Функционал. Учитывая соотношения (35), (36) и тот факт, что решение φ_i системы (39)–(42) зависит от f_i , f'_i и f''_i , приходим, взамен исходного функционала (4), к функции независимых переменных $\{d_k, k=0, \dots, M_1\}$

$$\begin{aligned}
 & \Pi(d_0, \dots, d_{M_1}) = \\
 & = \eta_1 \left(\sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \sqrt{1 + (f'_k)^2} - \cos \alpha (2 + f_0 + f_M) \right) - \\
 & - \eta_2 \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \left(g_1 \zeta_i^{(1)} f_i + g_2 \frac{f_i^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} w_i \varphi_i.
 \end{aligned} \tag{43}$$

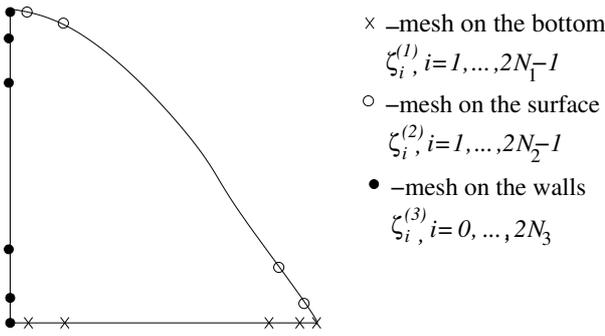


Рис. 20. Структура узлов для криволинейного треугольника

Область – “криволинейный треугольник”

Представление свободной границы. Для простоты предположим, что свободная граница допускает нормальное представление $z = f(x)$ и x_* является координатой точки, где свободная граница пересекает дно (см. рис. 2, б). Следующая гомотетическая трансформация позволяет свести задачу в “криволинейном треугольнике” к описанной выше ситуации при условии, что $f(x)$ пересекает правый нижний угол треугольника, т. е. $f(1) = 0$:

$$\begin{cases} x = -1 + (x_1 + 1)l_*, \\ z = z_1 l_*, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + (x + 1)/l_*, \\ z_1 = z/l_*, \end{cases}$$

где $l_* = (1 + x_*)/2$.

В этом случае $\{f_k > 0, k=0, \dots, (M-1)\}$, а $f_M = 0$. Чтобы избавиться от неравенств $f_i > 0$, вводится вспомогательный массив $\{d_k, k=0, \dots, M_1\}$, $M_1 = M-1$ и $f_i = \exp(d_i), i=0, \dots, M_1$.

Заметим, что аналогичная трансформация возможна также для представления $x = f(z)$. Наш алгоритм учитывал обе возможные ситуации, смена представления свободной границы производилась тогда, когда производные от f становились достаточно большими при подходе к концам интервала.

Интегральные уравнения. Интегральные уравнения (20)–(23) принимают в случае “криволиней-

ного треугольника” следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathcal{F}_{11}}}(\xi_1, x_1) [\varphi(\xi_1) - \varphi(x_1)] d\xi_1 + \\ & + \int_{-1}^1 \mathcal{F}_{12}(\xi_1, x_1) \varphi(\xi_1) d\xi_1 + \varphi(x_1) \mathcal{F}_{13}(x_1) + \\ & + \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathcal{F}_{14}}}(\xi_2, x_1) [\Psi_0(\xi_2) - w(1)] d\xi_2 + w(1) \mathcal{F}(x) + \\ & + \int_0^{f(-1)} \underline{\underline{\mathcal{F}_{15}}}(\eta_1, x_1) [\Psi_-(\eta_1) - w(-1)] d\eta_1 + \\ & + w(-1) \mathcal{F}_{16}(x_1) + w(1) \mathcal{F}_{18}(x_1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \pi w(x_1) - \int_{-1}^1 \mathcal{G}_{11}(\xi_1, x_1) w(\xi_1) d\xi_1, \\ & -1 < x_1 < 1, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \mathcal{F}_{21}(\xi_1, x_2) \varphi(\xi_1) d\xi_1 - \pi \Psi_0(x_2) + \\ & + \int_0^{f(-1)} \underline{\underline{\mathcal{F}_{22}}}(\eta_1, x_2) [\Psi_-(\eta_1) - \Psi_-(0)] d\eta_1 + \\ & + \Psi_-(0) \mathcal{F}_{23}(x_2) = -w(1) \mathcal{G}_{22}(x) - \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-1}^1 \mathcal{G}_{21}(\xi_1, x_2) [w(\xi_1) - w(1)] d\xi_1, \\ & -1 < x_2 < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathcal{F}_{31}}}(\xi_1, z_1) \varphi(\xi_1) d\xi_1 + \\ & + \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathcal{F}_{32}}}(\xi_2, z_1) [\Psi_0(\xi_2) - \Psi_-(0)] d\xi_2 + \\ & + \Psi_-(0) \mathcal{F}_{33}(z_1) - \pi \Psi_-(z_1) = \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} & = - \int_{-1}^1 \underline{\underline{\mathcal{G}_{31}}}(\xi_1, z_1) [w(\xi_1) - w(-1)] d\xi_1 - \\ & - w(-1) \mathcal{G}_{33}(z_1), \quad 0 < z_1 < f(-1), \end{aligned}$$

где введены следующие новые ядра:

$$\mathcal{F}_{19}(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1-x}{f(x)} + \arctg \frac{1+x}{f(x)}, & x \neq 0, \\ \pi/2 - \arctg \frac{1}{f'(x)}, & x = 1; \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_{22}(x) = \begin{cases} \pi - \arctg \frac{f(-1)}{1+x}, & x \neq -1, \\ \pi/2, & x = -1; \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_{33}(z) = \pi - \mathcal{F}_{33}(z).$$

Метод Нистрема. Повторяя процедуру дискретизации предыдущего параграфа в соотношениях (35)–(38), см. рис. 20, вместо системы (39)–(42) получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_{j,i}^{\log} \varphi_i + \sum_{i=1}^{2N_2-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{14}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(1)}) \Psi_{0i} + \\ & + \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{15}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(1)}) \Psi_{-i} = \\ & = \pi w_j - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{11}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(1)}) w_i - \\ & - w_0 \left[\mathcal{F}_{16}(\zeta_j^{(1)}) - \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{15}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(1)}) \right] - \\ & - w_{2N_1} \left[\mathcal{F}_{19}(\zeta_j^{(1)}) - \sum_{i=1}^{2N_4-1} \beta_i^{(4)} \mathcal{F}_{14}(\zeta_i^{(4)}, \zeta_j^{(1)}) \right], \\ & j = 1, \dots, 2N_1 - 1, \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{F}_{21}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(2)}) \varphi_i - \pi \Psi_{0i} + \\ & + \Psi_{-0} \left[\mathcal{F}_{23}(\zeta_j^{(2)}) - \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{22}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(2)}) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(3)} \mathcal{F}_{22}(\zeta_i^{(3)}, \zeta_j^{(2)}) \Psi_{-i} = -w_{2N_1} \mathcal{G}_{22}(\zeta_j^{(2)}) - \\ & - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{21}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(2)}) [w_i - w_{2N_1}], \\ & j = 1, \dots, 2N_2 - 1, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{F}_{31}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(3)}) \varphi_i + \\ & + \sum_{i=1}^{2N_2-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{32}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(3)}) \Psi_{0i} - \pi \Psi_{-j} + \\ & + \Psi_{-0} \left[\mathcal{F}_{33}(\zeta_j^{(3)}) - \sum_{i=1}^{2N_3-1} \beta_i^{(2)} \mathcal{F}_{32}(\zeta_i^{(2)}, \zeta_j^{(3)}) \right] = \\ & = - \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \mathcal{G}_{31}(\zeta_i^{(1)}, \zeta_j^{(3)}) [w_i - w_0] - \\ & - w_0 \mathcal{G}_{33}(\zeta_j^{(3)}), \quad j = 0, \dots, 2N_3 - 1. \end{aligned} \tag{49}$$

Решение (47)–(49) дает вектор φ_i , $i = 1, \dots, (2N_1 - 1)$, зависящий от $\{d_k, k = 1, \dots, M_1\}$.

Функционал (4) трансформируется в функцию многих переменных

$$\begin{aligned} & \Pi(d_0, \dots, d_{M_1}) = \eta_1 l_* \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} \sqrt{1 + (f'_i)^2} - \cos \alpha (2 + f_0) \right) - \\ & - \eta_2 l_*^3 \sum_{i=1}^{(2N_1-1)} \beta_i^{(1)} \left(g_1 \zeta_i^{(1)} f_i + g_2 \frac{f_i^2}{2} \right) - \\ & - \eta_2 g_1 (l_* - 1) V + l_*^2 \sum_{i=1}^{2N_1-1} \beta_i^{(1)} w_i \varphi_i, \end{aligned} \tag{50}$$

где

$$l_*^2 = \frac{V}{\int_{-1}^1 f(x) dx}. \tag{51}$$