

УДК 534.14

# ВНУТРЕННЯЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ПОГРУЖЕННОЙ В БЕЗГРАНИЧНУЮ СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ, С ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ СФЕРОЙ

В. Д. ДЗЮБА, В. Д. КУБЕНКО

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев**Получено 17.12.2001*

Сформулирована задача о взаимодействии осциллирующего сферического тела с тонкой упругой цилиндрической оболочкой, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью и погруженной в безграничную идеальную сжимаемую среду с другими параметрами. Геометрический центр сферы находится на оси цилиндра. Процедура построения решения основана на возможности представления частных решений уравнений Гельмгольца для обеих сред в цилиндрических координатах с помощью частных решений в сферических координатах, и наоборот. В результате удовлетворения граничных условий на поверхности сферы и на стенке оболочки получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье-разложения потенциала скорости жидкости по полиномам Лежандра. Определены гидродинамические характеристики жидкости, заполняющей цилиндрический объем и окружающей его, а также прогибы цилиндрической оболочки. Проведено сравнение с задачей о колебаниях сферы на оси тонкой упругой цилиндрической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью (без учета внешней среды).

Сформульовано задачу про взаємодію сферичного тіла, що осцилює, з тонкою пружною циліндричною оболонкою, яка заповнена ідеальною стисливою рідиною та занурена в безмежне ідеальне стисливе середовище з іншими параметрами. Геометричний центр сфери знаходиться на осі циліндра. Процедура побудови розв'язку спирається на можливість представлення частинних розв'язків рівнянь Гельмгольца для обох середовищ, які записані у циліндричних координатах, за допомогою частинних розв'язків у сферичних координатах, та навпаки. В результаті задоволення граничних умов на поверхнях сфери та оболонки отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів Фур'є-розкладу потенціалу швидкостей рідини за поліномами Лежандра. Визначено гідродинамічні характеристики рідини, що заповнює циліндричний об'єм та оточує його, а також прогини циліндричної оболонки. Проведено порівняння з задачею про коливання сфери на осі тонкої пружної циліндричної оболонки, що заповнена стисливою рідиною (без урахування зовнішнього середовища).

The problem on interaction between an oscillating spherical body and a thin elastic cylindrical shell filled by an ideal compressible liquid and submerged into an infinite ideal compressible medium with other parameters is formulated. Geometrical center of the sphere is located on the cylinder's axis. Development of the solution is based on the possibility to represent particular solutions of the Helmholtz equations, written for both media in the cylindrical coordinates, by means of particular solutions in spherical coordinates and vice versa. After satisfying boundary conditions on the surfaces of the sphere and the shell, the infinite system of linear algebraic equations is obtained to determine the coefficients in the Fourier expansion of the liquid's velocity potential with respect to the Legendre polynomials. Hydrodynamic characteristics of liquids filling the cylindrical shell and surrounding it are determined, as well as flexural deformations of the cylindrical shell. A comparison with the sphere vibrating at the axis of a thin elastic cylindrical shell filled by the compressible liquid (not accounting to the external liquid) is made.

## ВВЕДЕНИЕ

Многосвязные задачи дифракции стационарных волн рассматривались многими авторами. Дифракция электромагнитных волн исследовалась в монографии [1], акустических волн – в работе [2]. Монографии [3, 4] посвящены систематическому изложению результатов изучения дифракции волн в упругой среде. В указанных и ряде других публикаций дифракционные задачи решаются для систем однотипных поверхностей: рассматриваются семейства параллельных цилиндров либо семейства сферических (сфероидальных) тел.

В работах [5, 6] построено аналитическое пред-

ставление для потенциала, определяющего пульсационное движение сферы в сжимаемой (акустическое приближение) и несжимаемой жидкости, заполняющей круговую цилиндрическую полость. В них предполагалось, что источник сферической формы расположен на оси полости, так что имеет место осевая симметрия. Позже в работе [7] аналогичная задача для дальней зоны решалась методом “нулевого поля”. Работы [8–12] посвящены внутренней задаче взаимодействия сферического тела и цилиндра (жесткого тела и тонкой упругой цилиндрической оболочки), заполненного несжимаемой жидкостью; в них приведены соответствующие численные результаты. В работе [13] рассмо-

трена осесимметричная задача о колебаниях сферы в жесткой цилиндрической полости, содержащей сжимаемую жидкость, а в публикации [14] – задача о построении потенциала, определяющего движение сферического тела по заданному закону в сжимаемой жидкости, заполняющей тонкую упругую цилиндрическую оболочку, приведены результаты решения конкретных задач. Наличие внешней среды в этих публикациях не учитывалось.

В настоящей публикации рассматривается задача о построении потенциала, определяющего осцилляции сферического тела в сжимаемой жидкости, заполняющей тонкую упругую цилиндрическую оболочку, погруженную в безграничную сжимаемую жидкость с другими параметрами. Сфера расположена на оси оболочки, так что имеет место осевая симметрия. Решение, полученное в данной работе, опирается на возможность представления частных решений уравнений Гельмгольца для обеих сред в цилиндрических координатах через частные решения этих же уравнений в сферических координатах, и наоборот. В результате удовлетворения граничных условий на стенке оболочки и на поверхности сферы получена бесконечная система алгебраических уравнений, коэффициенты которой имеют вид несобственных интегралов от цилиндрических функций. Для нахождения решения бесконечной системы использован метод редукции. Приведены количественные результаты. Дано сравнение с задачей о колебаниях сферы на оси тонкой упругой цилиндрической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью (без учета внешней среды).

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечную круговую цилиндрическую оболочку радиуса  $\rho_0$ , толщины  $h$ , которая заполнена идеальной сжимаемой жидкостью плотности  $\gamma_1$ , погружена в безграничную идеальную сжимаемую жидкость плотности  $\gamma_2$  и содержит на своей оси сферическое тело, поверхность которого гармонически осциллирует. Радиус сферы обозначим через  $r_0$ . Сферическое тело и цилиндрическая оболочка не имеют точек соприкосновения.

Соотнесем цилиндрическую оболочку с цилиндрической системой координат  $(\rho, \phi, z)$ , ось  $OZ$  которой совпадает с осью цилиндра. Свяжем с центром сферического тела, лежащим на оси цилиндра, сферические координаты  $(r, \phi, \theta)$ . Граничная задача состоит в отыскании решений уравнений Гельмгольца для обеих сред (индекс “1” указывает на характеристики внутренней среды; “2” – внеш-

ней):

$$\nabla^2 \varphi_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \varphi_1 = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla^2 \varphi_2 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \varphi_2 = 0 \tag{1.2}$$

при следующих граничных условиях на поверхности оболочки:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.4}$$

и на поверхности сферы:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} = V(\theta). \tag{1.5}$$

В соотношениях (1.1) – (1.5):  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $c_1$  и  $c_2$  – скорости звука в жидкости, заполняющей и окружающей оболочку соответственно;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – волновые потенциалы внутри и снаружи цилиндрического объема соответственно;  $\omega$  – заданная частота колебаний сферы;  $w$  – прогиб цилиндрической оболочки (считаем  $w$  положительным по направлению к центру кривизны оболочки);  $V(\theta)$  – известная функция, представимая рядом по полиномам Лежандра. Временной множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду опущен.

Волновые потенциалы связаны с давлением и скоростью движения жидкости формулами

$$p_l = i \gamma_l \omega \varphi_l, \quad U_l = \text{grad } \varphi_l, \quad l = 1, 2. \tag{1.6}$$

Принимая во внимание линеаризованную теорию оболочек [15], основанную на гипотезах Кирхгофа – Лява, и считая прогибы малыми по сравнению с толщиной оболочки, запишем следующие уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \gamma_M \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= \gamma_M \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= \frac{1 - \mu^2}{Eh} q - \\ &\quad - \gamma_M \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\mu}{2\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ L_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ L_{33} &= \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{2}{\rho_0^2} \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \phi^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^4}{\partial \phi^4} \right), \\ L_{12} &= L_{21} = \frac{1+\mu}{2\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi}, \\ L_{13} &= L_{31} = -\frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}, \\ L_{23} &= L_{32} = -\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Здесь  $u, v, w$  – перемещения точек срединной поверхности оболочки в осевом направлении, вдоль дуги и в радиальном направлении соответственно;  $\gamma_M$  – плотность материала цилиндрической оболочки;  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $q$  – гидродинамическая нагрузка, действующая на оболочку, определяемая как

$$q|_{\rho=\rho_0} = (-p_1 + p_2)|_{\rho=\rho_0}. \quad (1.8)$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{\rho_0}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, & \bar{z} &= \frac{z}{\rho_0}, & \bar{h} &= \frac{h}{\rho_0}, \\ \bar{u} &= \frac{u}{\rho_0}, & \bar{v} &= \frac{v}{\rho_0}, & \bar{w} &= \frac{w}{\rho_0}, & \bar{f} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_M}, \\ \bar{t} &= \frac{tc_1}{\rho_0}, & \bar{\omega} &= \frac{\omega\rho_0}{c_1}, & \bar{U} &= \frac{U}{c_1}, & \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{\rho_0 c_1}, \\ \bar{p} &= \frac{p}{\gamma_1 c_1^2}. \end{aligned}$$

Далее будем использовать только безразмерные величины (при этом черту над переменными в выражениях опускаем).

Цилиндрическая оболочка находится под действием симметричной относительно оси  $Oz$  нагрузки со стороны жидкостей. Следовательно, деформации срединной поверхности оболочки не будут зависеть от угла поворота вокруг оси  $Oz$  (т.е. от угла  $\phi$ ), а перемещения точек срединной поверхности вдоль дуги будут тождественно равны нулю.

Запишем уравнения движения оболочки вида (1.7) в безразмерных величинах для случая осе-

симметричного деформирования оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial w(z)}{\partial z} &= -\omega^2 \frac{c_1^2}{c_M^2} u(z), \\ -\mu \frac{\partial u(z)}{\partial z} + \left( 1 + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) w(z) &= \\ &= \left( \frac{f}{h} q(1, z) + \omega^2 w(z) \right) \frac{c_1^2}{c_M^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Под  $c_M$  понимается скорость звука в материале оболочки, определяемая как

$$c_M = \sqrt{\frac{E}{\gamma_M(1-\mu^2)}}.$$

Применяя преобразование Фурье по координате  $z$  к уравнениям (1.9), получаем:

$$\begin{aligned} -\xi^2 u^F(\xi) - i\mu \xi w^F(\xi) &= -\omega^2 \frac{c_1^2}{c_M^2} u^F(\xi), \\ -i\mu \xi u^F(\xi) + \left( 1 + \frac{h^2}{12} \xi^4 \right) w^F(\xi) &= \\ &= \left( \frac{f}{h} q^F(1, \xi) + \omega^2 w^F(\xi) \right) \frac{c_1^2}{c_M^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

и, учитывая соотношение (1.8), а также связь между волновым потенциалом и давлением в жидкости (1.6), имеем выражение, связывающее прогиб оболочки с потенциалом скоростей жидкости в пространстве изображений:

$$w^F(\xi) = \frac{R(\xi, \omega)}{i\omega} \left[ \varphi_1^F(1, \xi) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \varphi_2^F(1, \xi) \right], \quad (1.11)$$

где

$$R(\xi, \omega) = \frac{\omega^2 \frac{c_1^2}{c_M^2} \frac{f}{h} \left( \omega^2 \frac{c_1^2}{c_M^2} - \xi^2 \right)}{\mu^2 \xi^2 + \left( \omega^2 \frac{c_1^2}{c_M^2} - \xi^2 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{12} \xi^4 - \omega^2 \frac{c_1^2}{c_M^2} \right)};$$

индекс “ $F$ ” обозначает изображение по Фурье.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Представим потенциал внутри цилиндрического объема  $\varphi_1$  в виде суммы двух функций, одна из которых является решением уравнения (1.1) в сферических, другая – в цилиндрических координатах:  $\varphi_1 = \varphi_S + \varphi_C$ .

Решение  $\varphi_S$ , затухающее при  $r \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\varphi_S(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_n(r\omega) P_n(\cos \theta), \quad (2.1)$$

где  $P_n$  – полином Лежандра;  $x_n$  – неопределенная постоянная;  $h_n$  – сферическая функция Ханкеля первого рода.

Решение (2.1) можно переписать в цилиндрических координатах. Будем исходить из известной формулы [16], связывающей решения уравнения Гельмгольца в цилиндрической и сферической системах координат:

$$h_n(\omega r) P_n(\cos \theta) = \frac{i^{-n}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) \times H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.2)$$

Исходя из этого, решение (2.1) может быть записано в цилиндрических координатах  $(\rho, z)$  следующим образом:

$$\varphi_S = \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) A(\xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad (2.3)$$

где

$$A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} x_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (2.4)$$

Функция  $\varphi_S$ , представляющая ограниченное при  $\rho \rightarrow 0$  решение уравнения (1.1) в цилиндрических координатах, имеет вид [1]

$$\varphi_C(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.5)$$

Для того, чтобы записать  $\varphi_C$  в сферических координатах, воспользуемся следующей формулой [6]:

$$e^{i\xi z} J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n + 1) \times P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.6)$$

Тогда для функции  $\varphi_C$  получим

$$\varphi_C(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(\omega r) P_n(\cos \theta), \quad (2.7)$$

$$B_n = i^n (2n + 1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi. \quad (2.8)$$

Здесь  $j_n$  – сферическая функция Бесселя.

Потенциал вне цилиндрического объема  $\varphi_2$ , являющийся решением уравнения Гельмгольца (1.2)

в цилиндрических координатах при  $\rho \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$\varphi_2(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) H_0\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.9)$$

В формулах (2.5) и (2.9)  $B(\xi)$ ,  $C(\xi)$  – неизвестные функции.

### 3. УДОВЛЕТВОРЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Граничные условия на поверхности тонкой упругой цилиндрической оболочки (1.3) и (1.4) необходимо записать в пространстве изображений по Фурье:

$$\frac{\partial \varphi_l^F(\rho, \xi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = i\omega w^F(\xi), \quad l = 1, 2, \quad (3.1)$$

где, в соответствии с уравнениями (2.3), (2.5) и (2.9),

$$\varphi_1^F(\rho, \xi) = A(\xi) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) + B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right), \quad (3.2)$$

$$\varphi_2^F(\rho, \xi) = C(\xi) H_0\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \rho\right), \quad (3.3)$$

а выражение для функции  $w^F(\xi)$  определяется формулой (1.11).

Удовлетворяя граничному условию (3.1) с учетом выражений (1.11), (3.2) и (3.3), получаем систему уравнений для определения вида неизвест-

ных функций  $B(\xi)$  и  $C(\xi)$ :

$$C(\xi) \frac{\gamma_2}{\gamma_1} R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \right) - B(\xi) \left[ \sqrt{\omega^2 - \xi^2} J_1 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) + R(\xi, \omega) J_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) \right] = A(\xi) \left[ \sqrt{\omega^2 - \xi^2} H_1 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) + R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) \right], \quad (3.4)$$

$$C(\xi) \left[ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \right) - \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} H_0 \left( \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \right) \right] - B(\xi) R(\xi, \omega) J_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) = A(\xi) R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right).$$

Решив систему (3.4), получим следующие выражения для неизвестных функций:

$$B(\xi) = -\frac{A(\xi)}{Bzn(\xi)} \left[ \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - Mn(\xi) \right) \times H_1 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) + R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) \right], \quad (3.5)$$

$$C(\xi) = \frac{A(\xi) R(\xi, \omega) \sqrt{\omega^2 - \xi^2}}{Bzn(\xi) \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} H_1 \left( \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \right)} \times \left[ J_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) H_1 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) - H_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) \left( J_1 \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) \right], \quad (3.6)$$

где

$$Bzn(\xi) = \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - Mn(\xi) \right) \times J_1 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) + R(\xi, \omega) J_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right),$$

$$Mn(\xi) = \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \right) \sqrt{\omega^2 - \xi^2}}{\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} H_1 \left( \sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \right)}.$$

На поверхности колеблющейся сферы (при  $r=r_0$ ) из соотношений (1.5), (2.1), (2.7) и (2.8) получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n h'_n(\omega r_0) \omega P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n j'_n(\omega r_0) \omega P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n(\cos \theta),$$

где штрих обозначает производную по аргументу сферической функции. Отсюда следует, что для каждого  $n$  имеет место равенство

$$x_n h'_n(\omega r_0) \omega + B_n j'_n(\omega r_0) \omega = V_n. \quad (3.7)$$

Формулы (2.1), (2.4), (2.7), (2.8), (3.5) позволяют записать бесконечную систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $x_n$  в виде

$$x_n - \frac{1}{2\omega} \frac{j'_n(\omega r_0)}{h'_n(\omega r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} (2n+1) q_{mn} x_m = \frac{V_n}{\omega h'_n(\omega r_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

где коэффициенты  $q_{mn}$  записываются как

$$q_{mn} = \int_0^{\infty} \frac{2}{Bzn(\xi)} \left[ \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - Mn(\xi) \right) \times H_1 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) + R(\xi, \omega) H_0 \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right) \right] \times P_n \left( \frac{\xi}{\omega} \right) P_m \left( \frac{\xi}{\omega} \right) d\xi, \quad (3.9)$$

причем сумма индексов  $n+m$  – четная (в противном случае  $q_{mn} = 0$ ).

Бесконечная система алгебраических уравнений (3.8) относится к классу систем нормального типа. В работе [13] показано, что определитель системы, подобной системе (3.8), является определителем нормального типа. Таким образом, полученная система имеет единственное ограниченное решение [17]. Это решение можно получить методом усечения рассматриваемой бесконечной системы уравнений.

Следует отметить, что в приведенных выше преобразованиях допустима перемена порядков интегрирования и суммирования.

**4. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ**

Для численного решения бесконечная система алгебраических уравнений (3.8) была сведена к конечной системе  $N$  уравнений. Порядок усечения системы определялся пробным путем таким образом, чтобы достигалась достаточная (порядка  $10^{-4}$ ) точность удовлетворения граничных условий (1.3)–(1.5).

Приняв во внимание соотношения (2.1), (2.4), (2.7) и (3.5), выразим через найденные коэффициенты  $x_n$  потенциал скоростей, давление и скорость жидкости внутри оболочки в сферических координатах  $(r, \theta)$ :

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ x_n h_n(\omega r) - \frac{i^n}{2\omega} (2n+1) \times \right. \tag{4.1}$$

$$\left. \times j_n(\omega r) \sum_{m=0}^{\infty} x_m i^{-m} q_{mn} \right] P_n(\cos \theta),$$

$$p_1(r, \theta) = i\omega \varphi_1(r, \theta), \tag{4.2}$$

$$U_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ x_n h'_n(\omega r) - \frac{i^n}{2\omega} (2n+1) \times \right. \tag{4.3}$$

$$\left. \times j'_n(\omega r) \sum_{m=0}^{\infty} x_m i^{-m} q_{mn} \right] \omega P_n(\cos \theta).$$

Здесь коэффициенты  $q_{mn}$  определяются соотношением (3.9), а штрих, как и ранее, обозначает производную по аргументу сферической функции.

С помощью выражений (2.9) и (3.6) получим соотношения, связывающие найденные коэффициенты  $x_n$  с потенциалом скоростей, давлением и скоростью жидкости снаружи оболочки в цилиндрических координатах:

$$\varphi_2(\rho, z) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} x_n i^{-n} \varphi_n^q(\rho, z), \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^q(\rho, z) = & \\ = \int_{-\infty}^{\infty} & \frac{R(\xi, \omega) \sqrt{\omega^2 - \xi^2}}{\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} H_1\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2}\right)} \times \\ \times \left[ J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) - \right. & \\ - H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) J_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) \Big] \times & \\ \times \frac{H_0\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \rho\right)}{Bzn(\xi)} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i\xi z} d\xi, & \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$p_2(\rho, z) = i\omega \varphi_2(\rho, z), \tag{4.6}$$

$$U_2(\rho, z) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} x_n i^{-n} U_n^q(\rho, z), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} U_n^q(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} & \frac{R(\xi, \omega) \sqrt{\omega^2 - \xi^2}}{H_1\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2}\right)} \times \\ \times \left[ J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) - \right. & \\ - H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) J_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) \Big] \times & \\ \times \frac{H_1\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} \omega^2 - \xi^2} \rho\right)}{Bzn(\xi)} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i\xi z} d\xi. & \end{aligned} \tag{4.8}$$

Применив к соотношению (1.11) обратное преобразование Фурье по  $\xi$  с учетом формул (2.4), (3.2), (3.3), (3.5) и (3.6), получим выражение для определения прогиба тонкой упругой цилиндрической оболочки:

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z), \tag{4.9}$$

$$w_1(z) = \frac{1}{2i\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n i^{-n} w_n^{q1}(z), \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} w_n^{q1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} & R(\xi, \omega) \left[ H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) - \right. \\ - \frac{1}{Bzn(\xi)} \left[ \left( \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - Mn(\xi) \right) \times \right. & \\ \times H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) + R(\xi, \omega) \times & \\ \times H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) \Big] J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) \Big] \times & \\ \times P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i\xi z} d\xi, & \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$w_2(z) = \frac{1}{2i\omega^2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n i^{-n} w_n^{q2}(z), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
w_n^{q2}(\rho, z) &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-R^2(\xi, \omega) \sqrt{\omega^2 - \xi^2}}{\sqrt{\frac{c_1^2}{2}\omega^2 - \xi^2} H_1\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{2}\omega^2 - \xi^2}\right)} \times \\
&\times \left[ J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) - \right. \\
&\left. - H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) J_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) \right] \times \\
&\times \frac{H_0\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{2}\omega^2 - \xi^2} \rho\right)}{Bzn(\xi)} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) e^{i\xi z} d\xi.
\end{aligned} \quad (4.13)$$

При вычислении интегралов (3.9), (4.5), (4.8), (4.11) и (4.13) интервал интегрирования был разбит на следующие отрезки:

- $0 \leq \xi < (c_1/c_2)\omega$ ,  $(c_1/c_2)\omega < \xi < \omega$  и  $\omega < \xi < \infty$ , если  $c_1 < c_2$ ;
- $0 \leq \xi < \omega$ ,  $\omega < \xi < (c_1/c_2)\omega$  и  $(c_1/c_2)\omega < \xi < \infty$ , если  $c_1 > c_2$ .

Верхний бесконечный предел в интегралах заменялся конечным пределом таким образом, чтобы он обеспечивал стабильность полученных результатов, как минимум, в третьем десятичном знаке. Следует отметить, что на рассматриваемых интервалах интегрирования подынтегральные функции имеют особые точки второго рода. К ним, в частности, относятся точки  $\xi = \omega$  и  $\xi = (c_1/c_2)\omega$ . При вычислениях они выделялись достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестностью. Исследование поведения подынтегральных функций в окрестности этих точек показало, что справа и слева от особых точек, соответствующих нулям знаменателя, они принимают одинаковые по модулю и противоположные по знаку значения. Справа и слева от особых точек  $\xi = \omega$ ,  $\xi = (c_1/c_2)\omega$  подынтегральные функции стремятся к одинаковому пределу, которым и определялись значения интегралов в достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестности этих точек.

## 5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все вычисления производились в безразмерных величинах. Использовалась универсальная система математических расчетов *MathCAD PLUS 7.0 PRO*. Скорость звука в среде, заполняющей оболочку, принималась равной  $c_1 = 1500$  м/с, ее плотность –  $\gamma_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Для внешней по отношению к оболочке среды были взяты следующие параметры:  $c_2 = 3000$  м/с,  $\gamma_2 = 3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Материал оболочки полагался таким, что  $\mu = 0.3$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, а отношение плотности “внутренней” жидкости к плотности материала составляло  $f = 1/8$ . Рассматривались оболочки толщинами  $h = 0.001, 0.01$  и  $0.05$ . Нормированное значение радиуса сферы варьировалось в пределах  $r_0 = 0.1 \div 0.9$ . Полагалось, что поверхность сферического тела осциллирует по закону  $V(\theta) = \cos \theta$ .

Использованные для сравнения гидродинамические характеристики жидкости, заполняющей тонкую упругую цилиндрическую оболочку, на оси которой колеблется сфера (без учета влияния внешней среды), были получены в работе [14].

На рисунках показано влияние геометрических размеров взаимодействующих тел на распределение абсолютных значений давления жидкости (рис. 1, 2) и прогибов цилиндрической оболочки (рис. 3, 4) вдоль ее образующей в области  $0 \leq z \leq 3$ . Безразмерное значение круговой частоты принималось равным  $\omega = 2$ . Рис. 1–3 отображают влияние толщины цилиндрической оболочки на распределение абсолютных значений давления вдоль ее образующей и модуль прогиба. Рис. 4 иллюстрирует влияние радиуса сферического тела на прогибы цилиндрической оболочки. На рис. 1, 2 сплошные линии соответствуют давлению внутри, а штриховые – вне оболочки. На рис. 2 представлен случай, когда влияние внешней среды не учитывается. На рис. 3, 4 сплошными линиями показаны характеристики, рассчитанные при наличии внешней по отношению к оболочке среды, а штриховыми – без учета ее влияния.

При осцилляциях сферы абсолютные значения давления вблизи поверхности оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью (без учета влияния внешней среды), существенным образом меняются с изменением ее толщины (см. рис. 2). Видно, что с уменьшением толщины оболочки снижается амплитуда давления вблизи ее поверхности, а характер его распределения становится более монотонным. В то же время, при осцилляциях сферы внутри оболочки, заполненной и окруженной сжимаемой жидкостью, распределение модуля давления по ее поверхности менее зависит от толщины оболочки (см. рис. 1). При этом амплитуда давления вблизи поверхности оболочки несколько возрастает с уменьшением ее толщины. Заметим, что амплитуда давления снаружи оболочки примерно в три раза меньше амплитуды давления, распределенного по ее внутренней поверхности.

Наличие внешней среды существенно влияет на прогиб оболочки (см. рис. 3, 4). Амплитуды прогибов оболочки, находящейся в безграничной сжимаемой жидкости, почти в два – три раза меньше ам-

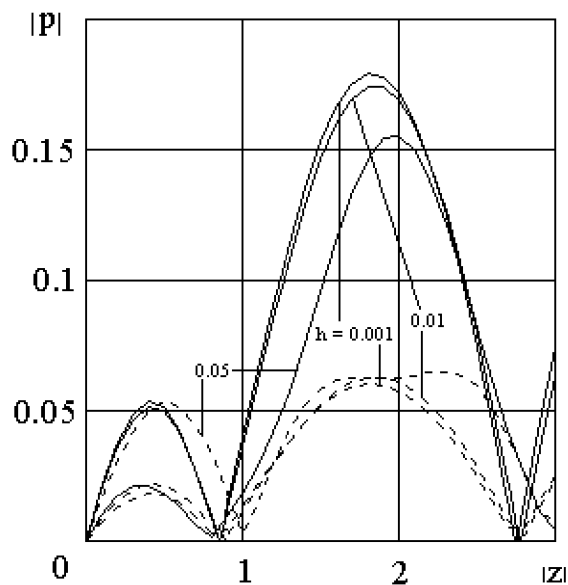


Рис. 1. Влияние толщины оболочки на распределение абсолютных значений давления вдоль ее образующей при  $r_0 = 0.5$ ,  $h = 0.001, 0.01, 0.05$  (внешняя среда учтена)

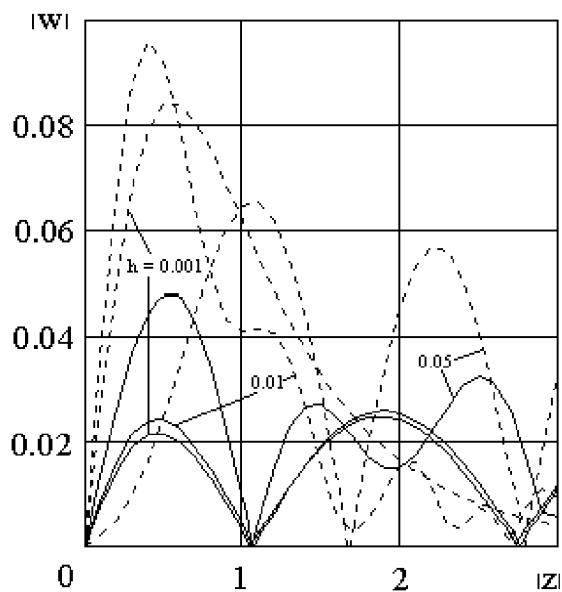


Рис. 3. Влияние толщины оболочки на модуль ее прогиба,  $r_0 = 0.5$ ,  $h = 0.001, 0.01, 0.05$

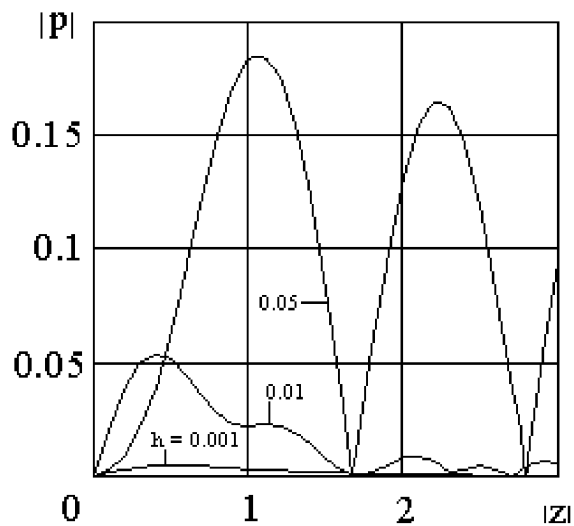


Рис. 2. Влияние толщины оболочки на распределение абсолютных значений давления вдоль ее образующей при  $r_0 = 0.5$ ,  $h = 0.001, 0.01, 0.05$  (внешняя среда не учтена)

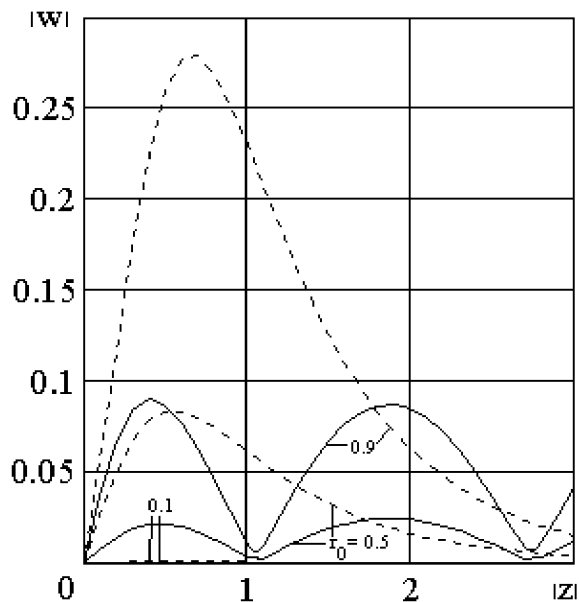


Рис. 4. Влияние радиуса сферы на модуль прогиба оболочки,  $h = 0.01$ ,  $r_0 = 0.01, 0.5, 0.9$



плитуд прогибов оболочки, рассчитанных без учета влияния внешней среды. При этом затухание амплитуд прогибов с увеличением координаты  $z$  в последнем случае происходит быстрее.

Влияние частоты осцилляций сферы радиуса  $r_0=0.5$  на гидродинамические характеристики жидкости демонстрируется рис. 5, 6. На них приведены распределения абсолютных значений давления по поверхности взаимодействующих тел: на рис. 5 – по поверхности осциллирующей сферы (сплошными линиями показаны характеристики, рассчитанные при наличии внешней по отношению к оболочке среды, а штриховыми – без учета ее влияния); на рис. 6 – по поверхности оболочки (сплошные линии соответствуют давлению внутри, а штриховые – вне оболочки).

Как следует из графиков, при частоте возбуждения  $\omega=8.0$  для давлений как во внутренней области оболочки, так и во внешней, наблюдается существенное (в несколько раз) увеличение амплитуды. Это обстоятельство, очевидно, свидетельствует о наличии частот запираания в системе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан подход к решению внутренней осесимметричной задачи о взаимодействии осциллирующего сферического тела с тонкой упругой цилиндрической оболочкой, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью и погруженной в безграничную идеальную сжимаемую жидкость с другими параметрами. Получено точное аналитическое решение указанной задачи. Определены гидродинамические характеристики жидкости, заполняющей цилиндрический объем и окружающей его, а также прогибы цилиндрической оболочки. Исследовано влияние геометрических размеров взаимодействующих тел, а также частоты осцилляций поверхности сферы на распределение абсолютных значений давления жидкости и прогибов цилиндрической оболочки.
2. Установлено, что при осцилляциях сферы абсолютные значения давления вблизи поверхности оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью (без учета влияния внешней среды), значительно меняются с изменением ее толщины. В то же время, при наличии внешней среды распределение модуля давления по внутренней поверхности такой оболочки существенно зависит от толщины ее стенки. Для распределения давления вблизи внутренней поверхности оболочки характерны следу-

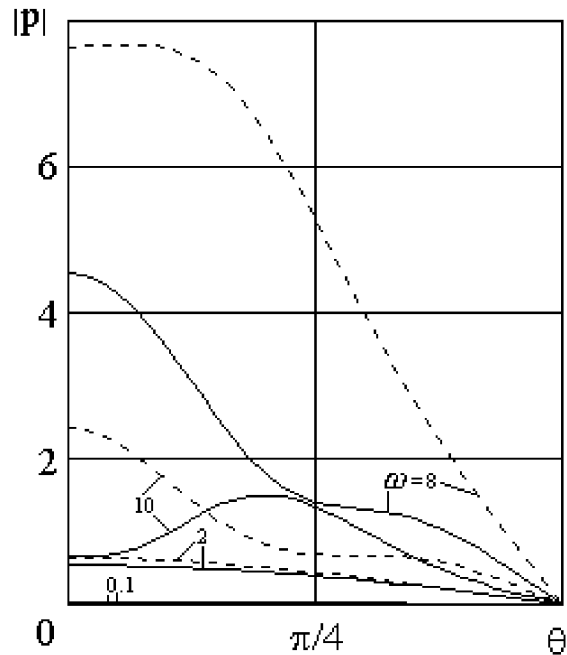


Рис. 5. Влияние частоты осцилляций сферы на распределение абсолютных значений давления по ее поверхности  $r=r_0$  ( $r_0=0.5$ ,  $h=0.001$ ,  $\omega=0.1, 2, 8, 10$ )

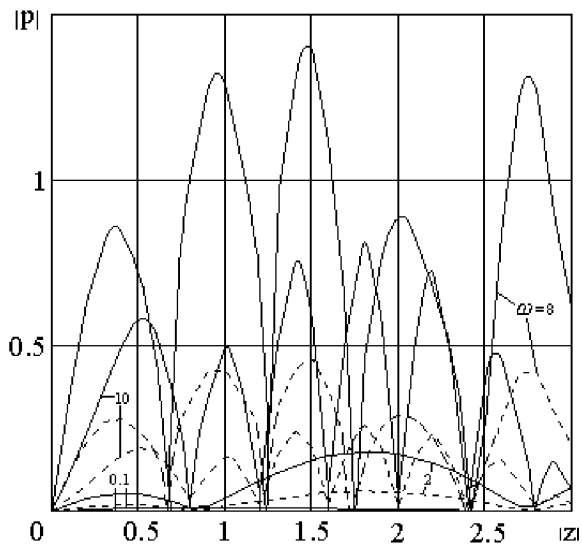


Рис. 6. Влияние частоты осцилляций сферы на распределение абсолютных значений давления по поверхности оболочки  $\rho=\rho_0$  ( $r_0=0.5$ ,  $h=0.001$ ,  $\omega=0.1, 2, 8, 10$ )

- ющие особенности: с уменьшением толщины стенки оболочки амплитуда давления вблизи ее поверхности снижается в случае отсутствия внешней среды и несколько возрастает при ее наличии.
3. Внешняя среда имеет существенное влияние на гидродинамическое давление внутри оболочки и на ее прогиб. Амплитуда давления снаружи оболочки примерно в три раза меньше амплитуды давления, распределенного по ее внутренней поверхности. Амплитуды прогибов оболочки, находящейся в безграничной сжимаемой жидкости, почти в два–три раза меньше амплитуд прогибов оболочки, влияние внешней среды на которую не учитывается. При этом затухание амплитуд прогибов с увеличением координаты  $z$  в последнем случае происходит быстрее.
  4. Обнаружены эффекты, свидетельствующие о наличии частот загираания в системе.
1. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах.– Минск: Наука и техника, 1968.– 548 с.
  2. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики.– Л.: Судостроение, 1972.– 352 с.
  3. *Гузь А. Н., Головчан В. Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах.– К.: Наук. думка, 1972.– 254 с.
  4. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн.– К.: Наук. думка, 1978.– 308 с.
  5. *Кубенко В. Д.* О колебаниях столба жидкости в жестком цилиндрическом сосуде при возбуждении пульсирующей сферой // Прикл. мех.– 1987.– **23**, N 4.– С. 119–122.
  6. *Кубенко В. Д.* О построении потенциала пульсирующей сферы в бесконечной цилиндрической полости, заполненной несжимаемой жидкостью // Прикл. мех.– 1986.– **22**, N 7.– С. 116–119.
  7. *Olsson S.* Point force excitation of an elastic infinite circular cylinder with an embedded spherical cavity // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– **93**, N 5.– P. 2479–2488.
  8. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Крук Л. А.* Колебания несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической полости, содержащей вибрирующее сферическое тело // Доповіді АН України. Сер. А.– 1992.– N 1.– С. 42–47.
  9. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Крук Л. А.* Построение потенциала скоростей жидкости в бесконечной цилиндрической полости, содержащей вибрирующее тело // Прикл. мех.– 1993.– **29**, N 1.– С. 19–25.
  10. *Кубенко В. Д., Крук Л. А.* Взаємодія нескінченної циліндричної оболонки, заповненої нестисливою рідиною, з сферичним тілом, що пульсує на осі оболонки // Доповіді АН України. Сер. А.– 1993.– N 6.– С. 54–58.
  11. *Кубенко В. Д., Крук Л. А.* О колебаниях несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической оболочке, содержащей осциллирующее вдоль оси оболочки сферическое тело // Прикл. мех.– 1994.– **30**, N 4.– С. 31–37.
  12. *Кубенко В. Д., Крук Л. А.* Обтекание сферического тела пульсирующим потоком жидкости в бесконечном цилиндре // Прикл. мех.– 1999.– **35**, N 6.– С. 27–31.
  13. *Кубенко В. Д., Дзюба В. В.* Акустическое поле в жестком цилиндрическом сосуде при возбуждении колеблющейся по заданному закону сферой // Прикл. мех.– 2000.– **36**, N 6.– С. 88–98.
  14. *Кубенко В. Д., Дзюба В. В.* Взаимодействие тонкой упругой цилиндрической оболочки с колеблющейся сферой. Внутренняя осесимметричная задача // Прикл. мех.– 2001.– **37**, N 2.– С. 87–95.
  15. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости.– М.: Наука, 1979.– 320 с.
  16. *Ерофеенко В. Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.– 1982.– N 4.– С. 42–46.
  17. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.– М.-Л.: Физматгиз, 1962.– 708 с.